ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ НАД ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛОСКОСТЬЮ В ПРИСУТСТВИИ НЕОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С. А. Регирер (Москва)

В работе [1] исследовалась общая задача о стационарном продольном обтекании цилиндрической поверхности проводящей жидкостью при наличии магнитного поля и отсоса или вдува. В результате анализа основных уравнений был выделен класс точных решений для случая, когда продольные компоненты скорости и поля зависят только от координаты, нормальной к поверхности. Были указаны также некоторые возможности получения точных решений более сложной структуры. Ниже построен пример такого решения для задачи о течении над проницаемой плоскостью.

Рассмотрим проницаемую цилиндрическую поверхность, которая обтекается вязкой несжимаемой жидкостью в направлении образующей, ориентированной вдоль оси z. Предположим, следуя [1], что векторы скорости и магнитного поля имеют вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + v\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{V}_\perp = v_x(x, y)\,\mathbf{e}_x + v_y(x, y)\,\mathbf{e}_y, \qquad v = v_z(x, y)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + h\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H}_\perp = H_x(x, y)\,\mathbf{e}_x + H_y(x, y)\,\mathbf{e}_y, \qquad h = H_z(x, y, z)$$

Подставляя эти выражения в общие уравнения магнитной гидродинамики, найдем, прежде всего, что $h = z\theta(x, y) + h_0(x, y)$ и

$$\rho(\mathbf{V}_\perp \nabla)\mathbf{V}_\perp = -\nabla' p^* + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}_\perp \nabla)\mathbf{H}_\perp + \eta\Delta\mathbf{V}_\perp \qquad \left(\nabla' = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$(\mathbf{V}_\perp \nabla)\mathbf{H}_\perp = (\mathbf{H}_\perp \nabla)\mathbf{V}_\perp + \nu_m\Delta\mathbf{H}_\perp, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V}_\perp = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_\perp = -\theta, \qquad \theta^2 + \mathbf{V}_\perp\Delta\theta = C \tag{3}$$

$$\mathbf{V}_\perp\nabla\theta = \nu_m\Delta\theta \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \rho\mathbf{V}_\perp\nabla v = -P_z + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_\perp\nabla h_0 + \frac{1}{4\pi}\theta h_0 + \eta\Delta v \\ \mathbf{V}_\perp\nabla h_0 = \mathbf{H}_\perp\nabla v - \theta v + \nu_m\Delta h_0 \end{gathered} \tag{5}$$

Постоянные C и P_z связаны с градиентом полного давления равенством

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = Cz + P_z \qquad \left(p^* = p + \frac{H^2}{8\pi}\right)$$

Первая группа уравнений этой системы —(1) — (4) — вместе с надлежащими краевыми условиями и уравнениями для среды, внешней относительно потока, позволяет отыскать поперечную скорость $\mathbf{V}_\perp$, поперечное поле $\mathbf{H}_\perp$ и функцию $\theta(x, y)$. При этом уравнение (4) не является независимым. Его можно получить из первого уравнения (2), применяя операцию div.

После того, как $\mathbf{V}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$, θ найдены, из системы (5) определяются v, h_0. Таким образом, общая задача расщепляется на две — нелинейную и линейную — решаемые последовательно. Система (1) — (5) применима как ко внешним задачам обтекания, так и ко внутренним задачам о течении в трубах, при условии, что жидкость, вдуваемая через одну часть стенки, полностью отсасывается через другую и расход в основном направлении остается постоянным.

Уравнения (1) — (2) в точности совпадают с соответствующими уравнениями плоской задачи магнитной гидродинамики, а вместо обычного уравнения $\operatorname{div}\mathbf{H}_\perp = 0$ здесь возникают два уравнения (3), содержащие еще одну неизвестную скалярную функцию θ. Если $\theta \equiv 0$, то $C = 0$, и система (1) — (3) полностью совпадает с уравнениями плоской задачи. Поэтому всякое решение последней удовлетворяет одновременно системе (1) — (3) и порождает соответствующее точное решение системы (5). Этот случай при $\mathbf{H}_\perp = \alpha\mathbf{V}_\perp$, $\alpha = \mathrm{const}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{V}_\perp = 0$ рассмотрен в работе [1].

Второе уравнение (3) удовлетворяется тождественно также при любом $\theta = \mathrm{const}$, отличном от нуля. Однако этим не исчерпываются возможные решения системы

(1) — (3). Простое точное решение с $\theta \neq \mathrm{const}$, представленное через табулированные функции, можно получить, предполагая, что во всей области течения векторы $\mathbf{V}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$ сохраняют постоянное направление, например, вдоль оси y. В этом случае уравнения (1) — (3) после исключения θ принимают вид

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}, \qquad v_y = v_y(x) \tag{6}$$

$$v_y \frac{\partial H_y}{\partial y} = \nu_m \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} \right), \qquad \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} \right)^2 - H_y \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = C \tag{7}$$

Второе уравнение (7) может быть проинтегрировано в квадратурах, причем результат будет содержать две произвольные функции от x. Подставляя это решение в оставшиеся уравнения, можно показать, что $v_y \equiv v_0 = \mathrm{const}$, а для H_y имеет место одно из двух выражений

$$H_y = H_0 = \mathrm{const}, \qquad H_y = H_0 e^{\omega y} \qquad (H_0 = \mathrm{const},\ \omega = v_0 / \nu_m) \tag{8}$$

В первом случае $\theta = C = 0$; это решение принадлежит к классу, рассмотренному в работе [1]. Оно изучалось в работах [2-3] для течений в полупространстве и в работах [4-6] — применительно к течению между параллельными стенками [1]. Второму случаю соответствует $\theta = -H_0\omega \exp \omega y$, $C = 0$. Заметим, что к формулам (8) можно прийти и другим путем, если искать, по аналогии с работой [7], плоские магнитные поля, поддерживающие течение с заданной структурой вектора скорости.

Рассмотрим далее решение уравнений (5) при экспоненциально меняющемся поле в предположении, что v, h_0 зависят только от y

$$v_0 \left(\rho \frac{dv}{dy} - \frac{\alpha}{4\pi} e^{\omega y} \frac{dh_0}{dy} \right) = - P_z - \frac{v_0^2 \alpha}{4\pi\nu_m} e^{\omega y} h_0 + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \tag{9}$$

$$v_0 \left(\frac{dh_0}{dy} - \alpha e^{\omega y} \frac{dv}{dy} \right) = \frac{v_0^2 \alpha}{\nu_m} e^{\omega y} v + \nu_m \frac{d^2 h_0}{dy^2} \qquad (\alpha = H_0 / v_0) \tag{10}$$

Для отыскания давления будем иметь из (1)

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{v_0^3 \alpha^2}{4\pi\nu_m} e^{2\omega y}$$

Интегрируя (10) по y, получим

$$\nu_m \frac{\partial h_0}{\partial y} - v_0 h_0 = cE - \alpha v_0 v e^{\omega y} \tag{11}$$

где $E = E_x = \mathrm{const}$ — составляющая электрического поля. После исключения $h_0' - \omega h_0$ из (9), (11) будем иметь

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{v_0}{\nu} \frac{dv}{dy} - \frac{\alpha^2 v_0^2}{4\pi\nu_m \eta} v e^{2\omega y} = \frac{P_z}{\eta} - \frac{cE_1}{4\pi\nu_m} e^{\omega y} \qquad \left(E_1 = \frac{v_0 \alpha E}{\eta} \right)$$

или же, полагая $\xi = e^{\omega y}$

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{1-2s}{\xi} \frac{dv}{d\xi} - m^2 v = \left(\frac{1}{\omega\xi} \right)^2 \left(\frac{P_z}{\eta} - \frac{cE_1}{4\pi\nu_m} \xi \right)$$

$$\left(s = \frac{\nu_m}{2\nu},\quad m = |\alpha| \left(\frac{s}{2\pi\rho} \right)^{1/2} \right) \tag{12}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v = \xi^s [C_1 I_s(m\xi) + C_2 K_s(m\xi)] - \frac{\xi^s}{\omega^2} \left[K_s(m\xi) \int \left(\frac{P_z}{\eta} - \frac{cE_1}{4\pi\nu_m} \xi \right) I_s(m\xi) \xi^{-1-s} d\xi - \right.$$

$$\left. - I_s(m\xi) \int \left(\frac{P_z}{\eta} - \frac{cE_1}{4\pi\nu_m} \xi \right) K_s(m\xi) \xi^{-1-s} d\xi \right] \tag{13}$$

Здесь I_s, K_s — цилиндрические функции мнимого аргумента.

---

[1] Литература по этому вопросу далеко не исчерпывается перечисленными работами. Здесь указаны только наиболее поздние статьи, в которых можно найти и необходимые библиографические сведения.

Величина h_0 находится квадратурой из (11)

$$h_0 = \xi\left[C_3 - \frac{cE}{v_0\xi} - \alpha\int v\,\frac{d\xi}{\xi}\right] \tag{14}$$

Основываясь на формулах (13), (14), можно исследовать краевые задачи о течении в полупространстве и между параллельными стенками. Например, при течении в полупространстве $y > 0$ с отсосом на границе ($v_0 < 0$), постоянные C_1, C_2, C_3, E легко связать с предельными значениями v и h_0, положив

$$\begin{aligned} &v \to v_\infty, \quad h_0 \to h_\infty \quad \text{при } y \to \infty \quad (\xi \to 0) \\ &v \to v_w, \quad h_0 \to h_w \quad \text{при } y \to 0 \quad (\xi \to 1) \end{aligned} \tag{15}$$

Этим условиям удовлетворяет решение

$$v = \xi^s\left\{C_1 I_s(m\xi) + C_2 K_s(m\xi) - \frac{\alpha E c}{4\pi\eta\omega}\int_\xi^1 [K_s(m\xi)\, I_s(mt) - K_s(mt)\, I_s(m\xi)]\, t^{-s}\,dt\right\} \tag{16}$$

$$h_0 = \xi\left(C_3 - \frac{cE}{v_0\xi} + \alpha\int_\xi^1 v(t)\,\frac{dt}{t}\right) \qquad \left(E = -\frac{v_0 h_\infty}{c}\,,\ P_z = 0\right) \tag{17}$$

$$C_1 = \frac{1}{I_s(m)}\left\{v_w - K_s(m)\left[\frac{v_\infty m^s}{2^{s-1}\Gamma(s)} - \frac{\alpha v_0 h_\infty}{4\pi\eta\omega}\int_0^1 I_s(mt)\, t^{-s}\,dt\right]\right\}$$

$$C_2 = \frac{v_\infty m^s}{2^{s-1}\Gamma(s)} - \frac{\alpha v_0 h_\infty}{4\pi\eta\omega}\int_0^1 I_s(mt)\, t^{-s}\,dt, \qquad C_3 = h_w - h_\infty$$

Напряжение трения на границе $\tau_w = \eta\,(\partial v / \partial y)_{y=0}$, соответствующее распределению скорости (16), представляется в виде

$$\tau_w = \frac{\rho v_0 m}{2s\, I_s(m)}\left\{v_w I_{s-1}(m) - \frac{1}{m}\left[\frac{v_\infty m^s}{2^{s-1}\Gamma(s)} - \frac{\alpha v_0 h_\infty}{4\pi\eta\omega}\int_0^1 I_s(mt)\, t^{-s}\,dt\right]\right\} \tag{18}$$

При $m \ll 1$ отсюда получаем

$$\tau_w \approx \rho v_0\left(v_w - v_\infty + \frac{\alpha v_0 h_\infty m}{8\pi\eta\omega s}\right)$$

При $m = 0$ эта формула переходит в обычное гидродинамическое соотношение $\tau_w = \rho v_0 (v_w - v_\infty)$. Если стенка покоится и магнитное поле исчезает на бесконечности ($v_w = h_\infty = 0$), то, как показывает (18), величина $|\tau_w|$ монотонно убывает с ростом m.

По найденным распределениям скорости и магнитного поля можно далее рассчитать поле температур. Будем исходить из уравнения энергии в виде

$$\rho c_v\left(v_0\,\frac{\partial T}{\partial y} + v\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\Delta T + \frac{\nu_m}{4\pi}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{19}$$

Переходя к переменным ξ, $\zeta = \omega z$, получим

$$\begin{gathered} \left(1 - \frac{1}{P_m}\right)\xi\,\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{v}{v_0}\,\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{1}{P_m}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \xi^2\,\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\right) + \frac{1}{4\pi\rho c_v}\left(\xi\,\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2sc_v}\left(\xi\,\frac{dv}{d\xi}\right)^2 \\ P_m = \frac{\rho c_v \nu_m}{k}, \qquad h = -H_0\zeta\xi + h_0(\xi) \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь функции $h_0(\xi)$, $v(\xi)$ определены формулами (16), (17). Обозначим далее

$$Q_0 = \frac{\xi^2}{c_v}\left(\frac{h_0'^2}{4\pi\rho} + \frac{v'^2}{2s}\right), \qquad Q_1 = -\frac{H_0}{2\pi\rho c_v}\,\xi h_0', \qquad Q_2 = \frac{\xi^2 H_0^2}{4\pi\rho c_v}$$

и будем искать решение уравнения (20) в виде

$$T = T_0(\xi) + \zeta T_1(\xi) + \zeta^2 T_2(\xi)$$

Для функций T_i (ξ) получим систему

$$\left(1-\frac{1}{P_m}\right)\xi T_2'=\frac{1}{P_m}\xi^2 T_2''+Q_2\,,\qquad \left(1-\frac{1}{P_m}\right)\xi T_1'=\frac{1}{P_m}\xi^2 T_1''+Q_1-\frac{2v}{v_0}T_2$$

$$\left(1-\frac{1}{P_m}\right)\xi T_0'=\frac{1}{P_m}(\xi^2 T_0''+2T_2)-\frac{v}{v_0}T_1+Q_0 \qquad (21)$$

с условиями

$$T=T_\infty \quad \text{при } y\to\infty \quad (\xi\to 0),\qquad T=T_w \quad \text{при } y=0 \quad (\xi\to 1) \qquad (22)$$

Из (21) найдем квадратурами

$$T_0=T_\infty-\int_0^1\left(\frac{vT_1}{v_0}-\frac{2T_2}{P_m}-Q_0\right)\frac{d\xi}{\xi}+ \qquad (23)$$

$$+\left[T_w-T_\infty+\int_0^1\left(\frac{vT_1}{v_0}-\frac{2T_2}{P_m}-Q_0\right)\frac{d\xi}{\xi}\right]\xi^{P_m}+$$

$$+\int_\xi^1\left(\frac{vT_1}{v_0}-\frac{2T_2}{P_m}-Q_0\right)\frac{d\xi}{\xi}-\xi^{P_m}\int_\xi^1\left(\frac{vT_1}{v_0}-\frac{2T_2}{P_m}-Q_0\right)\xi^{-1-P_m}d\xi$$

$$T_1=(\xi^{P_m}-1)\int_0^1\left(\frac{2vT_2}{v_0}-Q_1\right)\frac{d\xi}{\xi}+\int_\xi^1\left(\frac{2v\,T_2}{v_0}-Q_1\right)\frac{d\xi}{\xi}-$$

$$-\xi^{P_m}\int_\xi^1\left(\frac{2vT_2}{v}-Q_1\right)\xi^{-1-P_m}d\xi\,,\qquad T_2=\frac{H_0^2\,\nu_m}{8\pi k\,(2-P_m)}\xi^2(\xi^{P_m-2}-1)$$

Для теплового потока на стенке отсюда следует формула

$$q_w=-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=k\omega\left\{\zeta^2\frac{H_0^2\nu_m}{8\pi k}-\zeta P_m\left[\int_0^1\left(\frac{2vT_2}{v_0}-Q_1\right)\frac{d\xi}{\xi}\right]-\right.$$

$$\left.-P_m\left[T_w-T_\infty+\int_0^1\left(\frac{vT_1}{v_0}-\frac{2T_2}{P_m}-Q_0\right)\frac{d\xi}{\xi}\right]\right\} \qquad (24)$$

Полученное выше решение (16), (17), (23) при $v_0\to 0$ переходит в решение задачи с однородным поперечным полем [8], так как при этом $H_y\to\text{const}$, $\theta\to 0$. Поэтому оно не является, как это может показаться, обобщением результатов статьи [7], где рассматривалась плоская задача типа

$$\mathbf{V}=\mathbf{e}_z v\,(y),\qquad \mathbf{H}=H_y\,(y)\,\mathbf{e}_y+(z\theta+h_0\,(y))\,\mathbf{e}_z,\qquad \theta=\text{const}$$

несмотря на их очевидное сходство. Заметим, что решение работы [7] имеет соответствующий осесимметричный аналог (см., например, [9]), тогда как задача, рассмотренная выше, такого аналога не имеет: легко проверить, что при $v_r\neq 0$, $\partial H_z/\partial z\neq 0$ уравнения магнитной гидродинамики не допускают решений вида

$$\mathbf{V}=v_r\,(r)\,\mathbf{e}_r+v_z\,(r)\,\mathbf{e}_z,\qquad \mathbf{H}=H_r\,(r)\,\mathbf{e}_r+H_\theta\,(r)\,\mathbf{e}_\theta+H_z\,(r,z)\,\mathbf{e}_z$$

Необходимо отметить в заключение, что практическое осуществление ситуации, описываемой полученным решением, весьма затруднительно.

Поступила 5 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Некоторые магнитогидродинамические задачи о продольном обтекании проницаемой цилиндрической поверхности. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. Kakutani T. Hydromagnetic flow over a plane wall with uniform suction. Z. angew. Math. und Phys., 1961, v. 12, 3, 219—230.
3. Регирер С. А. Течение вязкой проводящей жидкости в областях с проницаемыми границами в присутствии магнитного поля. Сб. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига, 1962, 107—112.

4. Rathy R. K. Hydromagnetic Couette's flow with suction and injection. Z. angew. Math. und Mech., 1963, v. 43, 7/8, 370—374.
5. Ramamoorthy P. A generalized porous-wall Couett-etype flow with uniform suction or blowing and uniform transverse magnetic field. J. Aero/Space Sci., 1962, v. 29, 1, 111—112.
6. Suryaprakasarao U. Laminar flow in channels with porous walls in the presence of a transverse magnetic field. Appl. Scient. Res., 1962, B9, 4/5, 374—382.
7. Регирер С. А. Об одном точном решении уравнений магнитной гидродинамики. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
9. Pai S. J. Laminar flow of an electrically conducting incompressible fluid in a circular pipe. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, 9, 1205—1207.

ОБ ОДНОМ ДВИЖЕНИИ УРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский (Москва)

1. Как известно [1, 2], уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с его центром тяжести, в ньютоновском поле сил

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = 3\frac{g}{R}(C-B)\,\gamma'\gamma'', \quad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \begin{pmatrix} ABC \\ pqr \\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

должны допускать частное решение

$$\gamma = A'\alpha^{-1/2}p, \qquad \gamma' = B'\alpha^{-1/2}q, \qquad \gamma'' = C'\alpha^{-1/2}r \qquad (\alpha = 3g/R) \qquad (1.2)$$

где A', B', C' — некоторые постоянные. Переходя в (1.1) к безразмерным переменным

$$p_1 = \alpha^{-1/2}p, \qquad q_1 = \alpha^{-1/2}q, \qquad r_1 = \alpha^{-1/2}r, \qquad t_1 = \alpha^{1/2}t \qquad (1.3)$$

получим, после замены (1.2), уравнения (1.4)

$$A\frac{dp_1}{dt_1} + (C-B)(1-B'C')\,q_1r_1 = 0, \qquad A'\frac{dp_1}{dt_1} + (C'-B')\,q_1r_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \\ p_1q_1r_1 \end{pmatrix}$$

из которых будем иметь соотношения для определения A', B', C'

$$\frac{C-B}{A}u + v - w = \frac{C-B}{A}, \qquad A' = \sqrt{\frac{u}{vw}}\operatorname{sgn} u \qquad \begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \\ uvw \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Так как линейная система (1.5) имеет равный нулю определитель и совместна, то ее решение

$$u = 1 - a + wa, \qquad v = 1 - b + wb \qquad (a = A/C,\ b = B/C,\ a + b \neq 1) \qquad (1.6)$$

зависит от одной произвольной постоянной w.

Рассмотрим случай

$$u > 0, \qquad v > 0, \qquad w > 0; \qquad\qquad A' > B' > C' \qquad (1.7)$$

который, как это следует из (1.5), будет иметь место при условиях $u > v > w$, выполняющихся, в частности, когда

$$w < 1, \qquad C > B > A \qquad (1.8)$$

Тогда вторую группу уравнений (1.4) можно рассматривать как классические уравнения движения твердого тела с моментами инерции A', B', C' вокруг неподвижной точки в случае Эйлера. Эти уравнения обладают первыми интегралами

$$A'p_1^2 + B'q_1^2 + C'r_1^2 = D^{-1}, \qquad A'^2p_1^2 + B'^2q_1^2 + C'^2r_1^2 = 1 \qquad (1.9)$$

в которых D — произвольная постоянная, а другая произвольная постоянная равна единице (в принятых обозначениях Гринхилла $\mu^2D^2 = 1$) в силу существования тривиального интеграла

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

системы (1.1)