

Подставляя (5.4) и (5.5) в ряд (5.2), получим

$$v_r = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{\partial^{(j)} u_m}{\partial \theta^j} \right)_{\theta=\alpha_0} \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j} \right) r^{m+k} \quad (5.6)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r в рядах (5.2) и (5.6), приходим к равенству

$$\beta_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{m+k=n} \left(\frac{\partial^{(j)} u_m}{\partial \theta^j} \right)_{\theta=\alpha_0} \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j} \right) \quad (5.7)$$

где функции β_n и α_i известны, а в выражения для производных $\partial^{(j)} u_m / \partial \theta^j$ войдут неизвестные функции E_1, \dots, E_{n-1}, E_n и производные по θ от E_n, \dots, E_{n-1} , поэтому из равенства (5.7) можно последовательно найти все функции E_n . Таким же образом разыскиваются и остальные произвольные функции A_n и B_n .

Предлагаемым методом, используя решение типа A , можно искать также решение в окрестности кривой L , когда она является линией возникновения скачка уплотнения. Метод может быть использован как при аналитических исследованиях, так и в численных методах расчета пространственных сверхзвуковых течений газа для нахождения решения в окрестности особых точек.

Что касается сходимости рядов (2.1), то следует отметить, что в случае осесимметричного потенциального течения и аналитических начальных условиях сходимость этих рядов доказана А. А. Дородницким [2]. В общем случае этот вопрос остается открытым.

Поступила I VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Сб. теоретических работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957.
2. Д о р о д н и ц ы н А. А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО КРУГА И СФЕРЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

П. И. Ч у ш к и н (Москва)

При движении затупленных тел с большими сверхзвуковыми скоростями происходит сильная ионизация воздуха за отошедшей ударной волной. Поэтому при помощи внешнего магнитного поля можно воздействовать на это течение, создавая уменьшение теплопередачи и увеличение сопротивления тела, что важно для летательных аппаратов, входящих в плотные слои атмосферы. В практически интересном случае такого течения магнитные числа Рейнольдса R_m невелики и тогда поле течения не оказывает обратного влияния на магнитное поле, которое, следовательно, можно полагать заданным. В работах [1-3] было рассмотрено гиперзвуковое течение в окрестности точки торможения намагниченной сферы, при этом плотность за ударной волной принималась постоянной и число R_m малым. Исследование Буша [4], который изучил аналогичную задачу при конечных значениях магнитного числа Рейнольдса, показало его слабое влияние на решение.

Ниже рассчитывается течение около круга и сферы (во всей области влияния), движущихся с большой сверхзвуковой скоростью в магнитном поле при малых числах R_m . Для решения применяется метод интегральных соотношений А. А. Дородницкина [5]. Этим методом О. М. Белоцерковский [6,7] решил задачу о сверхзвуковом обтекании затупленных тел непроводящим газом. Ниже дается обобщение этого решения на случай намагниченных тел в проводящем газе.

1. **Постановка и уравнения задачи.** Пусть на затупленное намагниченное тело заданной формы (круг или сферу) вдоль оси симметрии набегают равномерный поток совершенного невязкого нетеплопроводного газа с большим сверхзвуковым значением числа Маха M_∞ . Газ перед отошедшей ударной волной предполагается неэлектропроводным, а за ударной волной коэффициент электропроводности газа η будет рассматриваться либо постоянным, либо зависящим от температуры по закону пятой степени. Магнитное число Рейнольдса считается малым. Принимается, что магнитное поле создается плоским или осесимметричным магнитным диполем, расположенным в центре соответственно круга или сферы и имеющим ось, параллельную направлению набегающего потока. Электрическое поле будет всюду равно нулю.

Задача состоит в определении смешанного течения в области влияния, в частности в построении отошедшей ударной волны и расчете параметров течения на поверхности тела. Из-за симметрии достаточно рассматривать только верхнюю полуплоскость.

Система уравнений магнитной газовой динамики (уравнение неразрывности, уравнение импульсов и уравнение энтропии) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{w} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \nabla p = \mathbf{F}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{\kappa - 1}{\rho^\kappa} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \quad (1.1)$$

где пондеромоторная сила \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = b (\mathbf{w} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \quad b = \frac{\eta_* H_*^2 R}{c^2 \rho_\infty a_*^2} \quad (1.2)$$

Система (1.1) записана в безразмерных переменных, причем линейные размеры отнесены к радиусу тела R , скорость w — к критической скорости звука a_* , плотность ρ — к плотности набегающего потока ρ_∞ , давление p — к величине $\rho_\infty a_*^2$, напряженность магнитного поля H — к своему значению в точке торможения H_* . Кроме того, в уравнениях (1.1) и (1.2) обозначены через κ — показатель адиабаты, φ — энтропийная функция, b — безразмерный параметр, характеризующий величину магнитного поля, c — скорость света, η_* — значение коэффициента электропроводности в точке торможения

$$\varphi = p / \rho^\kappa, \quad S = c_v \ln \varphi + \text{const}$$

где S — энтропия, c_v — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме.

Решение задачи проводится для случая круга ($\nu = 0$) и сферы ($\nu = 1$), поэтому применим полярные координаты r, θ с полюсом в центре тела. Составляющие вектора магнитного поля, создаваемого диполем, помещенным в центре круга или сферы, будут равны

$$H_r = \frac{\cos \theta}{r^{2+\nu}}, \quad H_\theta = \frac{\sin \theta}{(1 + \nu) r^{2+\nu}}$$

Соответствующие составляющие пондеромоторной силы выразятся так

$$F_r = -b (u H_\theta - \nu H_r) H_\theta, \quad F_\theta = b (u H_\theta - \nu H_r) H_r$$

где u, ν — составляющие вектора скорости w вдоль r и θ соответственно.

Третье уравнение системы (1.1) дает изменение энтропии вдоль линии тока, обусловленное действием магнитного поля, и может быть переписано в виде

$$d\varphi = - \frac{\kappa - 1}{\rho^\kappa} (F_r dr + F_\theta r d\theta), \quad \frac{dr}{rd\theta} = \frac{u}{\nu} \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.1) имеет интеграл Бернулли, который в рассматриваемом случае при отсутствии электрического поля представляет собой выражение

$$p = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right) \rho \quad (1.4)$$

Интеграл Бернулли будем брать вместо уравнения импульса вдоль линии $r = \text{const}$. Введем функцию τ

$$\tau = \rho \varphi^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left[\frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

и преобразуем уравнение неразрывности с учетом (1.3). Преобразованное уравнение неразрывности и уравнение импульса вдоль $\theta = \text{const}$ запишем в виде

$$\frac{\partial rh}{\partial r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu q}{\partial \theta} = G, \quad \frac{\partial r Q}{\partial r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu P}{\partial \theta} = g \quad (1.5)$$

где

$$h = r^\nu \tau u, \quad q = r^\nu \tau v, \quad \mu = \sin^\nu \theta, \quad G = -r^{1+\nu} \tau p^{-1} (F \cdot w) \\ Q = r^\nu (p + \rho u^2), \quad P = r^\nu \rho uv, \quad g = r^\nu (2^\nu p + \rho v^2 + r F_r)$$

Обозначим через ε расстояние вдоль луча $\theta = \text{const}$ от контура тела до ударной волны и через σ угол наклона ударной волны к оси течения. Тогда для определения радиуса ударной волны

$$r_n(\theta) = 1 + \varepsilon(\theta)$$

будем иметь уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -(1 + \varepsilon) \text{ctg}(\sigma + \theta) \quad (1.6)$$

Уравнения (1.3) — (1.6) образуют систему для пяти неизвестных функций u, v, p, φ и σ . Граничные условия для этой системы будут следующими:

на обтекаемом теле ($r = 1$)

$$u = 0$$

на ударной волне

$$u_n = w_y \sin \theta - w_x \cos \theta, \quad v_n = w_x \sin \theta + w_y \cos \theta \quad (1.7)$$

$$w_x = w_\infty \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(\sin^2 \sigma - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \right], \quad w_y = (w_\infty - w_x) \text{ctg} \sigma \\ w_\infty^2 = \frac{(\kappa + 1) M_\infty^2}{2 + (\kappa - 1) M_\infty^2}, \quad p_n = \frac{2}{\kappa + 1} w_\infty^2 \sin^2 \sigma - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_\infty^2 \right) \\ \rho_n = \frac{(\kappa + 1) w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) w_\infty^2 \cos^2 \sigma}, \quad \varphi_n = \frac{p_n}{\rho_n^\kappa}$$

на оси течения ($\theta = 0$)

$$v = 0, \quad \sigma = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_* = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} w_\infty^{-2\kappa} \left(w_\infty^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) \quad (1.8)$$

Здесь последнее равенство следует из соотношений на ударной волне при $\sigma = 1/2\pi$ и уравнения (1.3), которое показывает, что за ударной волной на оси $\theta = 0$ из-за $F_r = 0$ изменения энтропии не происходит.

2. Интегральные соотношения и аппроксимирующая система. Для решения системы (1.3) — (1.6) применим метод интегральных соотношений. Рассматривая n -е приближение, область течения между телом и ударной волной разделим на n полос при помощи системы линий

$$r = r_i(\theta) = 1 + \frac{i}{n} \varepsilon(\theta) \quad (i = 0, \dots, n)$$

Значения всех функций на линии $r = r_i(\theta)$ будем обозначать индексом i ; таким образом, контуру тела будет отвечать индекс 0, а ударной волне n . Уравнения в частных производных (1.5) проинтегрируем по r от $r_0 = 1$ до каждой линии $r = r_i(\theta)$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда с учетом $h_0 = 0$ получим систему $2n$ независимых интегральных соотношений

$$\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\theta} \int_1^{r_i} \mu q dr - q_i \frac{dr_i}{d\theta} + r_i h_i = \int_1^{r_i} G dr \\ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\theta} \int_1^{r_i} \mu P dr - P_i \frac{dr_i}{d\theta} + r_i Q_i - Q_0 = \int_1^{r_i} g dr \quad (i = 1, \dots, n)$$

Все подинтегральные функции представим приближенно интерполяционными многочленами n -й степени по r с узлами интерполяции на линиях $r = r_i(\theta)$. В результате интегральные соотношения сведутся к $2n$ обыкновенным дифференциальным уравнениями по θ относительно значений искомых функций на линиях $r = r_i(\theta)$. Включая уравнения (1.3) и (1.6), вся аппроксимирующая система будет содержать $3n + 1$ дифференциальных уравнений и после разрешения может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\theta} &= -(1 \mp \varepsilon) \operatorname{ctg}(\sigma \mp \theta), & \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{E_\sigma}{D_0}, & \frac{dv_i}{d\theta} &= \frac{E_i}{D_i} \\ \frac{d\varphi_i}{d\theta} &= -\frac{\kappa-1}{\rho_i^\kappa} \left(F_i \frac{u_i}{v_i} + r_i F_{\theta i} \right), & D_i &= \frac{2}{\kappa+1} (a_i^2 - v_i^2) \\ a_i^2 &= \kappa \frac{P_i}{\rho_i}, & \frac{du_i}{d\theta} &= U_i \quad (u_0 \equiv 0) & (i = 0, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где E_σ, E_i, U_i — некоторые голоморфные в рассматриваемой области функции, вид которых зависит от n . Знаменатели D_i обращаются в нуль в точках, где составляющая скорости v_i достигает местной скорости звука a_i , т. е. в точках, где луч $\theta = \operatorname{const}$ касается характеристики. Эта связь характеристик и особых точек является существенной в данном методе. Таким образом, n уравнений системы (2.1) имеют по одной подвижной особой точке, которые, как показывает исследование, относятся к типу «седло».

Аппроксимирующая система (2.1) интегрируется численно от оси $\theta = 0$, где поставлены условия (1.8) для функций v_i, σ и φ_i . Неизвестные здесь $n-1$ значений u_i и значение ε определяются из требования регулярности решения в n особых точках, где должно быть $E_i = 0$ (при этом автоматически $E_\sigma = 0$). После решения такой краевой задачи находятся значения искомых функций на линиях $r = r_i(\theta)$, а по ним в соответствии с принятыми аппроксимациями может быть построено все поле течения. Отметим еще, что в осесимметричном случае точка $\theta = 0$ для системы (2.1) также будет особой точкой, но регулярного типа, и неопределенность здесь легко раскрывается.

Приведем теперь конкретный вид аппроксимирующей системы (2.1) для приближения $n = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{1}{\alpha_1} \left[g_0 \mp g_1 + (Q_0 - r_1 Q_1) \frac{2}{\varepsilon} - r_1^\nu \rho_1 (v_1^2 - u_1^2) \mp \frac{P_1}{r_1^\nu \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \delta_1 \right] \\ \frac{dv_0}{d\theta} &= \frac{2\kappa\tau_0^{\kappa-2}}{(\kappa+1)D_0} \left[G_0 + G_1 + \left(1 - \frac{2r_1}{\varepsilon}\right) h_1 - \left(q_0 - \frac{q_1}{r_1}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \alpha_0 \frac{d\sigma}{d\theta} - \delta_0 \right] \\ \frac{d\varphi_0}{d\theta} &= -\frac{\kappa-1}{\rho_0^\kappa} F_{\theta 0}, & \frac{d\varepsilon}{d\theta} &= -r_1 \operatorname{ctg}(\sigma \mp \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{r_1^\nu \tau_1^{2-\kappa}}{2\kappa} [(\kappa \mp 1)(1 - v_1^2)v_1' - 2u_1 v_1 u_1'] \\ \alpha_1 &= \frac{\rho_1}{\tau_1} \left[u_1 \left(\alpha_0 - \frac{q_1}{\kappa-1} \varphi_1' \right) + q_1 u_1' \right] \\ \delta_0 &= \nu (q_0 \mp q_1) \operatorname{ctg} \theta, & \delta_1 &= \nu P_1 \operatorname{ctg} \theta \end{aligned}$$

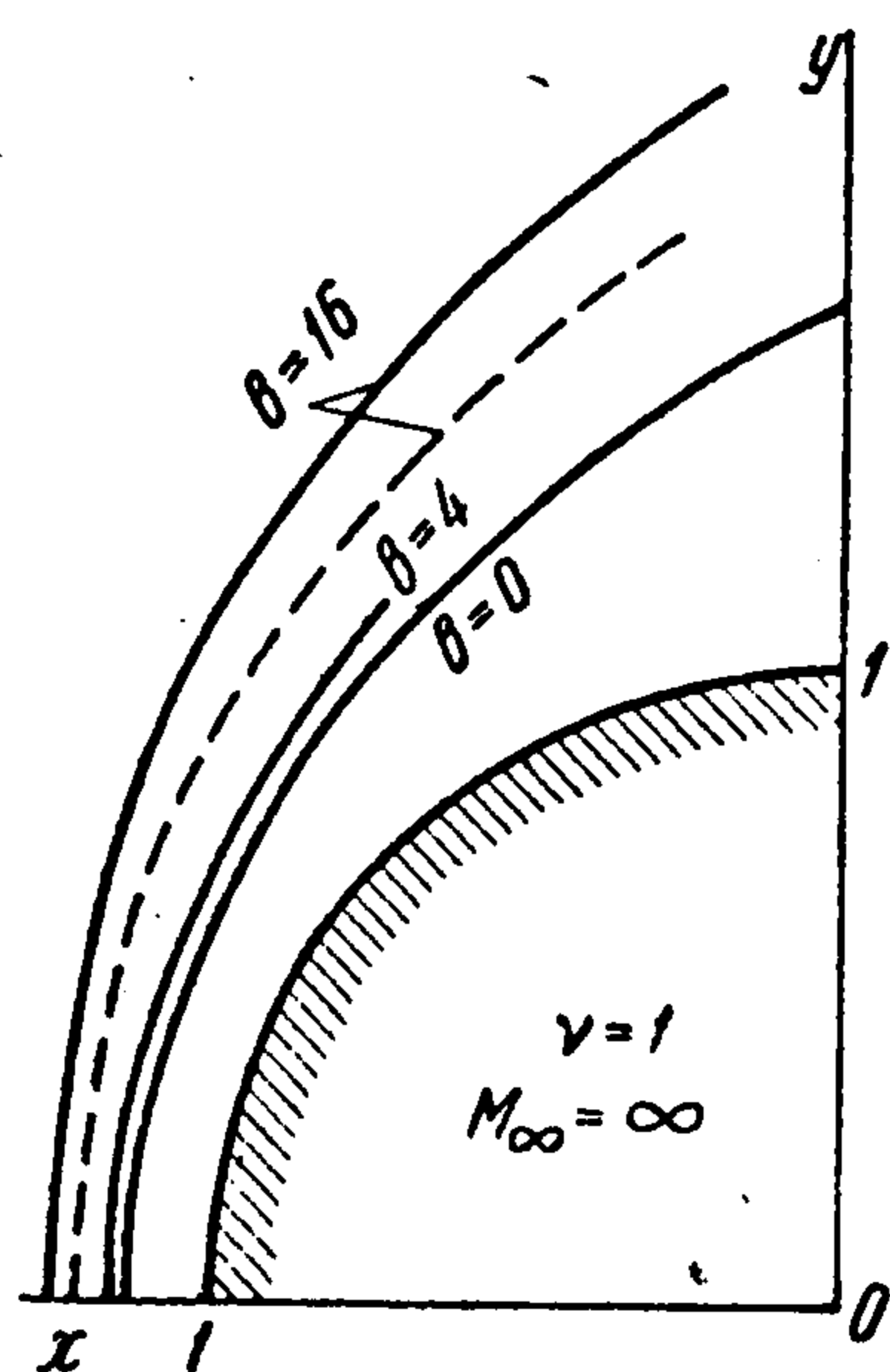
причем здесь через u_1', v_1', φ_1' обозначены производные по σ от этих функций на ударной волне, которые определяются по формулам (1.7).

В уравнениях (2.2) для σ и v_0 в осесимметричном случае при $\theta = 0$ имеет место неопределенность в членах δ_0 и δ_1 . После раскрытия неопределенности уравнениям для σ и v_0 можно придать прежнюю форму, но при этом в них надо брать удвоенные значения D_0, α_0 и α_1 и полагать

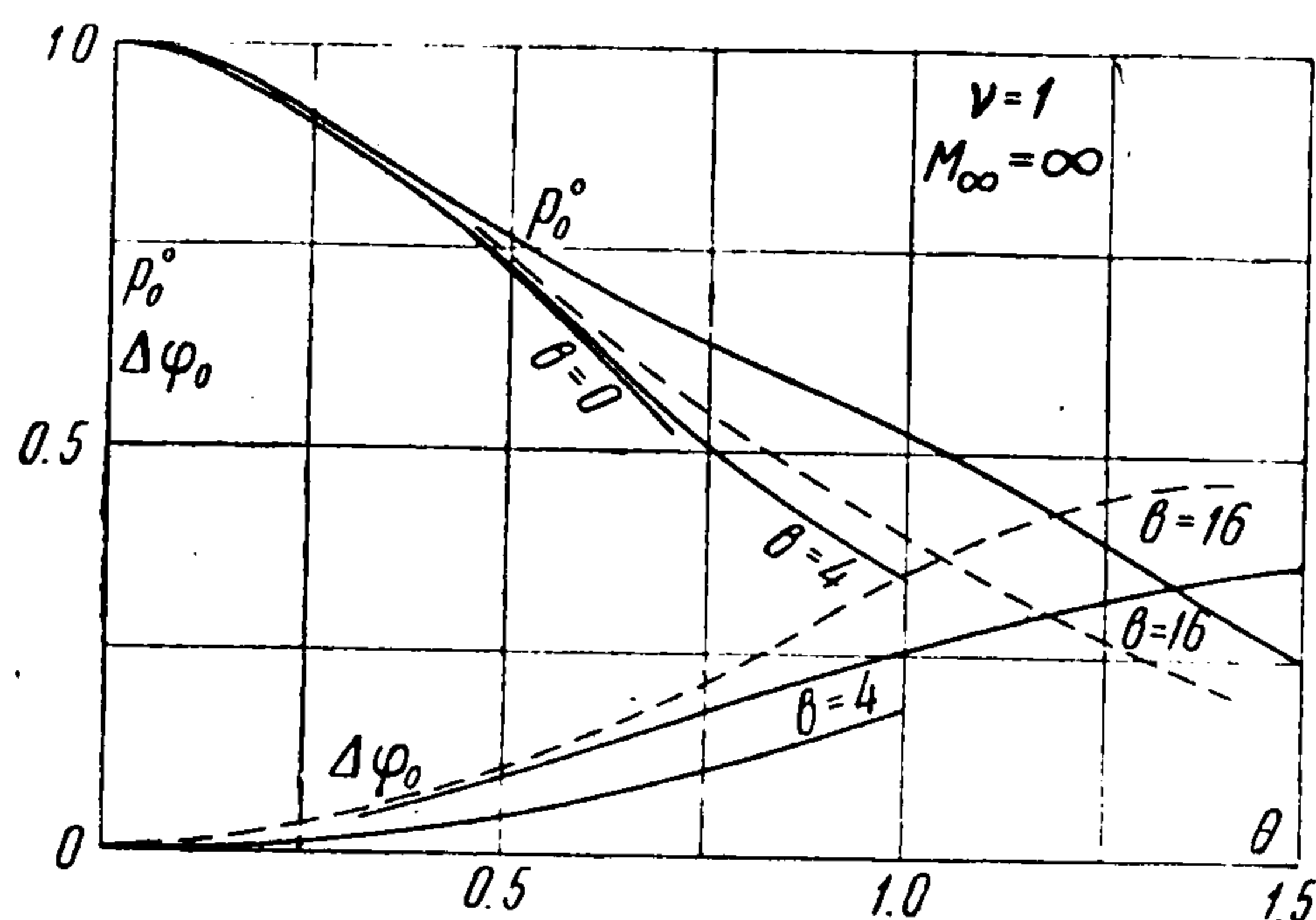
$$\delta_0 = -h_1, \quad \delta_1 = -r_1 \rho_1 u_1^2.$$

Отметим еще, что при $n = 1$ уравнение для v_0 при $\theta = 0$ и при заданных M_∞ , κ и b связывает градиент скорости в точке торможения $dv_0/d\theta$ и расстояние отхода ударной волны ϵ . Поскольку последняя величина определяется в экспериментах в ударных трубах, то по ϵ при помощи этой связи можно приближенно находить значение $dv_0/d\theta$, играющее важную роль в расчете теплопередачи.

3. Примеры. Изложенным выше методом по первому приближению ($n = 1$) было рассчитано обтекание намагниченных круга и сферы при больших сверхзвуковых скоростях. Расчеты проводились только в области дозвукового и смешанного течения, т. е. в рассмотренных случаях до значений θ , отвечающих звуковой точке на теле. Вообще говоря, методом интегральных соотношений можно рассчитывать сверх-



Фиг. 1



Фиг. 2

звуковое течение и до больших θ , однако здесь более целесообразно применение численного метода характеристик.

На фиг. 1—3 приводятся результаты расчетов для случая обтекания сферы потоком воздуха ($\kappa = 1.4$) с числом Маха $M_\infty = \infty$ при значениях параметра магнитного поля $b = 0, 4$ и 16 . Для случая $b = 16$ с целью выяснить характер влияния коэффициента электропроводности η рассматривались два варианта — в одном (сплошные линии на графиках) величина η предполагалась постоянной, а в другом (пунктирные линии) принималась следующая зависимость η от температуры T

$$\frac{\eta}{\eta_*} = \left(\frac{T}{T_*}\right)^5 = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2\right)^5$$

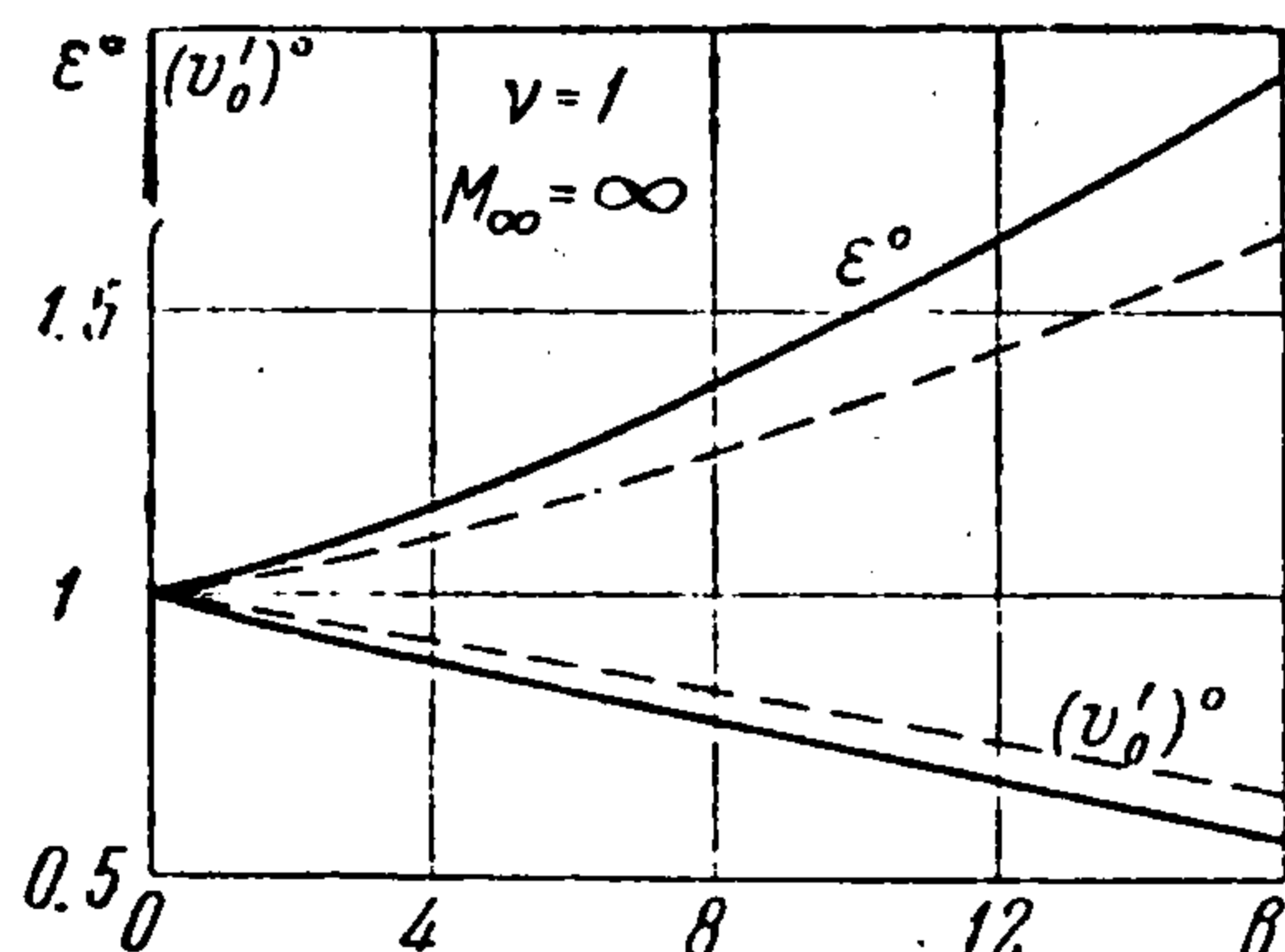
где η_* и T_* — значения η и T в точке торможения. Последняя зависимость получена на основе обработки данных [8].

На фиг. 1 построены ударные волны для $b = 0, 4, 16$. Во всех этих случаях звуковые линии расположены ниже луча $\theta = \text{const}$, проходящего через звуковую точку на теле.

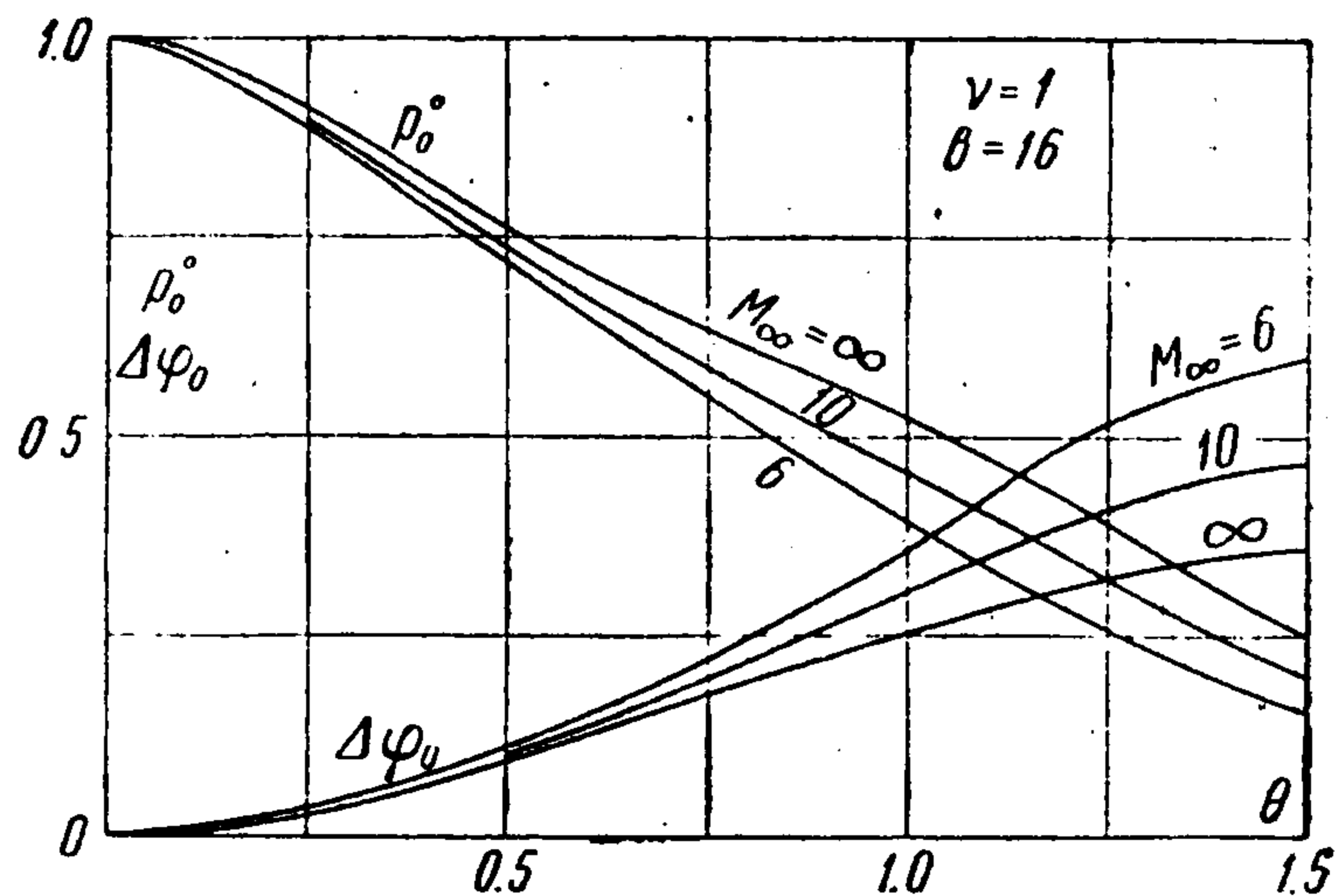
Влияние магнитного поля на распределение давления по телу $p_0^0 = p_0/p_*$, отнесенного к давлению в точке торможения p_* , характеризует фиг. 2. Большие магнитные поля вызывают на теле существенное увеличение давления и сильный сдвиг звуковой точки в сторону больших θ , причем в случае переменного η эти изменения, естественно, меньше. Расчеты показывают, что у сферы коэффициент волнового сопротивления c_x для участка тела, ограниченного звуковой точкой, соответственно возрастает в случае $\eta = \text{const}$ при $b = 4$ на 2.5% и при $b = 16$ на 24% по сравнению с c_x для того же участка тела при $b = 0$. В случае же переменного η при $b = 16$ соответствующее увеличение c_x составляет 8.8%. Для ориентировки укажем, что в условиях орбитального полета спутника значению параметра $b = 1$ отвечает напряженность магнитного поля H_* порядка 10^4 гс.

На фиг. 2 приведены также кривые изменения энтропийной функции $\Delta\phi_0 = (\phi_0 - \phi_*)/\phi_*$ вдоль контура тела.

На фиг. 3 для сферы при $M_\infty = \infty$ и $\kappa = 1.4$ построено в зависимости от параметра b отношение ε° расстояния отхода ударной волны в точке торможения к соответствующему расстоянию отхода ударной волны при отсутствии магнитного поля ($b = 0$). Здесь же представлено аналогичное отношение для градиента скорости в точке торможения на теле $(v_0')^\circ$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Наконец, на фиг. 4 приведены результаты, характеризующие влияние числа Маха M_∞ . Здесь показано распределение давления p_0° и энтропийной функции $\Delta\phi_0$ на сфере при значении параметра $b = 16$ и $M_\infty = 6, 10$ и ∞ . Заметим еще, что величины ε° и $(v_0')^\circ$ в этом случае очень слабо зависят от M_∞ .

В заключение укажем, что метод решения, описанный в данной работе только для случая круга и сферы, нетрудно распространить на случай затупленных симметричных тел более общего вида. Для этого вместо полярных координат r, θ следует применить координаты s_0, n_0 , где s_0 — длина дуги, измеряемая вдоль контура тела, n_0 — нормаль к контуру тела. Отметим, что для решения рассмотренной задачи можно применять также другую схему, в которой аппроксимации проводятся по θ , а аппроксимирующая система интегрируется по r от ударной волны к телу; при этом форма ударной волны определяется по выполнению условий непротекания на теле.

Автор выражает глубокую признательность В. П. Коробейникову за обсуждение работы и К. В. Шароватой за проведение расчетов.

Поступила 15 VIII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. К е м п Н. Н. On hypersonic stagnation-point flow with magnetic field. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 6. Русск. пер. «Механика», 1959, № 1 (53).
2. F r e e m a n N. C. On the flow past a sphere at hypersonic speed with a magnetic field. J. Aeronaut. Space Sci., 1959, vol. 26, № 10. Русск. пер. «Механика», 1960, № 3 (61).
3. К е м п Н. Н. Author's reply. J. Aeronaut. Space Sci., 1959, vol. 26, № 10. Русск. пер. «Механика», 1960, № 3 (61).
4. В у ш W. Magneto-hydrodynamic hypersonic flow past a blunt body. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, № 11. Русск. пер. «Вопросы ракетной техники», 1959, № 4.
5. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 1956, т. 2; 1958, т. 3.
6. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
7. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
8. М е у е r R. X. Magnetohydrodynamics and aerodynamic heating, ARS Journ., 1959, vol. 29, № 3.