

## РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВИХРЕВОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ОКРЕСТНОСТИ КРИВОЙ, НА КОТОРОЙ ПРОИСХОДИТ ИЗЛОМ ЛИНИЙ ТОКА

В. Н. Михайлов (Москва)

Рассматривается задача о нахождении сверхзвукового пространственного течения идеального газа в окрестности кривой  $L$ , в точках которой происходит излом линий тока. Решение трехмерных уравнений движения газа ищется в специальной системе координат в виде рядов по одной из переменных с коэффициентами, зависящими от двух других переменных. Для нахождения коэффициентов рядов получается рекуррентная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения для нулевых членов рядов имеют два решения, которые соответствуют течениям разрежения или сжатия в окрестности кривой  $L$ .

В случае, когда  $L$  является окружностью или дугой окружности, получено решение рекуррентной системы уравнений в виде квадратур.

1. В цилиндрической системе координат  $x, y, \varphi$  (фигура) уравнения пространственного вихревого течения газа имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) - \frac{vw}{c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{v}{y} = 0 \\ & v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1 - V^2}{2\kappa} \frac{\partial S}{\partial x} \\ & v \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{y} - \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) - u \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1 - V^2}{2\kappa} \frac{1}{y} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \\ & u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{w}{y} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{c^2 = 1/2 (\kappa - 1) (1 - V^2)}{S = \lg(p / \rho^\kappa) + \text{const}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь компоненты скорости  $u, v, w$  в направлении  $x, y, \varphi$ , скорость звука  $c$  отнесены к значению максимальной скорости в газе;  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей газа.

Перейдем в (1.1) к новой системе координат по формулам

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta + x_0(\varphi), \\ y &= r \sin \theta + R_0(\varphi), \quad \Phi = \varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $x = x_0(\varphi)$ ,  $y = R_0(\varphi)$  уравнение некоторой кривой  $L$ , а  $r$  и  $\theta$  полярные координаты в плоскости  $\varphi = \text{const}$  с началом в точках кривой  $L$  (фигура).

Составляющие вектора скорости в старой и новой системах координат связаны соотношениями

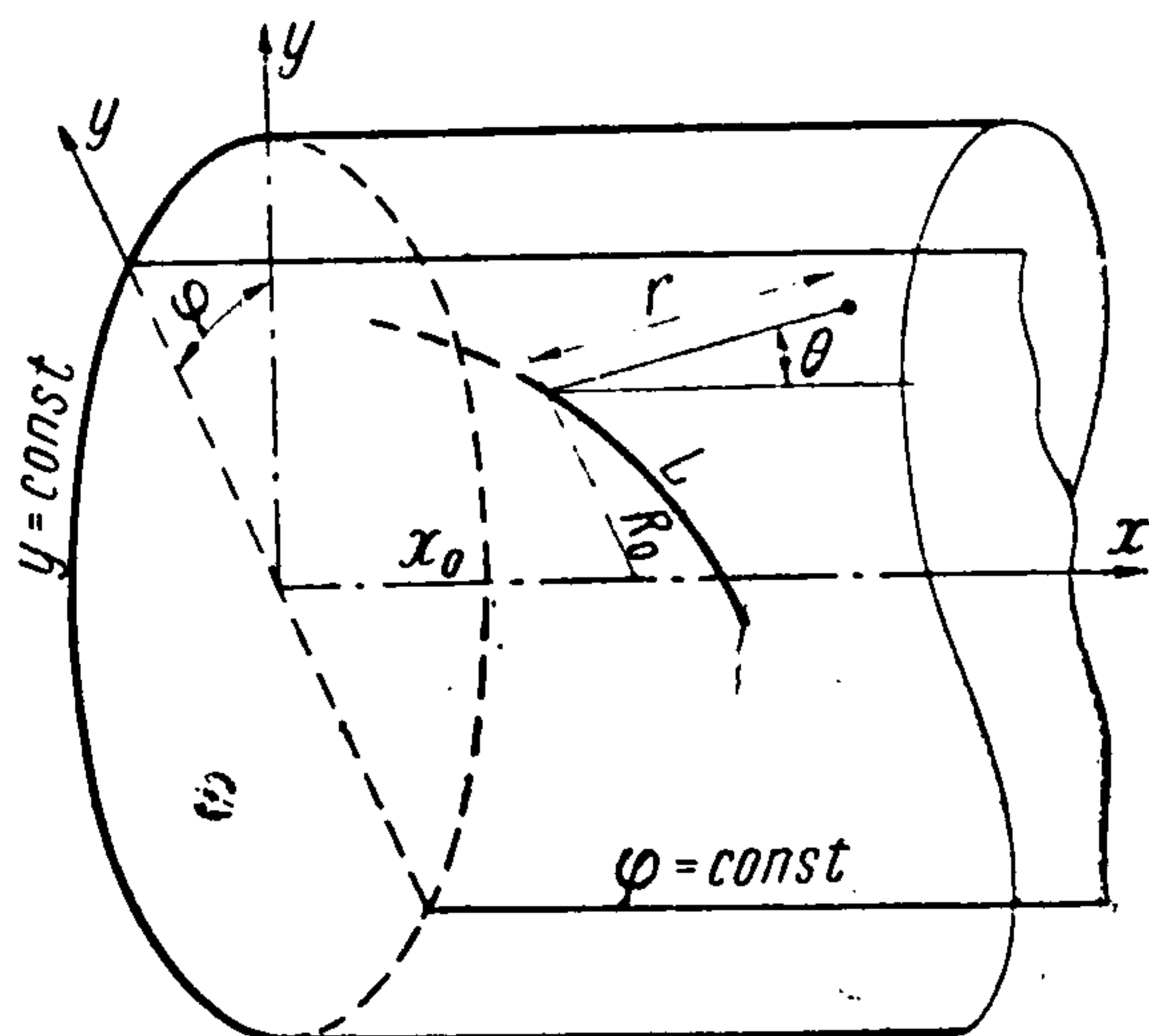
$$\begin{aligned} u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta, \\ v &= v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta, \quad w = w \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $v_r$  и  $v_\theta$  — компоненты скорости, соответственно, в направлении  $r$  и  $\theta$ .

При помощи (1.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \Phi} - B' \frac{\partial}{\partial r} + \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, & B &= x_0' \sin \theta - R_0' \cos \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь точками обозначены производные по  $\varphi$ , а штрихами по  $\theta$ .



В новой системе координат уравнения (1.1) примут вид ( $q^2 = v_r^2 \div v_\theta^2$ )

$$\begin{aligned}
 w \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - B' \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - (R_0 \div r \sin \theta) \left( w \frac{\partial w}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1-V^2}{2\kappa} \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \quad (1.5) \\
 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \left[ \frac{Bw}{r} + v_\theta \left( \frac{R_0}{r} \div \sin \theta \right) \right] - w^2 \sin \theta = 0 \\
 \left( \frac{v_\theta R_0 \div Bw}{r} \div v_\theta \sin \theta \right) \frac{\partial S}{\partial \theta} \div [v_r (R_0 \div r \sin \theta) - B'w] \frac{\partial S}{\partial r} + w \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \\
 (R_0 \div r \sin \theta) v_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{B'}{2} \left( \frac{\partial q^2}{\partial r} + \frac{1-V^2}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \left( \frac{R_0}{r} + \sin \theta \right) v_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
 - \frac{B}{2r} \left( \frac{\partial q^2}{\partial \theta} + \frac{1-V^2}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q^2}{\partial \varphi} + \frac{1-V^2}{\kappa} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) + w (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) = 0 \\
 \left( \frac{R_0}{r} + \sin \theta \right) \left[ c^2 \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{2} \frac{\partial q^2}{\partial \theta} - w v_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \\
 + \frac{B}{r} \left[ (c^2 - w^2) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{2} \frac{\partial q^2}{\partial \theta} \right] \div (R_0 \div r \sin \theta) \left( c^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{2} \frac{\partial q^2}{\partial r} - w v_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \\
 - B' [(c^2 - w^2) \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{2} \frac{\partial q^2}{\partial r}] \div (c^2 - w^2) \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{w}{2} \frac{\partial q^2}{\partial \varphi} \div c^2 (v_r \sin \theta \div v_\theta \cos \theta) = 0
 \end{aligned}$$

2. Решение системы (1.6) ищем в виде рядов

$$\begin{aligned}
 v_r = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n, \quad v_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} v_n r^n, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n r^n, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n \quad (2.1) \\
 (u_n = u_n(\theta, \varphi), \quad v_n = v_n(\theta, \varphi), \quad w_n = w_n(\theta, \varphi), \quad S_n = S(\theta, \varphi))
 \end{aligned}$$

Подставляя ряды (2.1) в систему (1.5) и приравнявая коэффициенты, получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=n} (R_0 v_i \div B w_j) \frac{\partial S_j}{\partial \theta} + \sum_{i+j=n-1} \left[ v_i \sin \theta \frac{\partial S_j}{\partial \theta} \div (j+1)(u_i R_0 - B' w_j) S_{j+1} + w_i \frac{\partial S_i}{\partial \varphi} \right] + \\
 + \sum_{i+j=n-2} (j \div 1) u_i S_{j+1} \sin \theta = 0 \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j=n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - v_i \right) (B w_j + R_0 v_j) + \sum_{i+j+k=n-1} \left\{ w_i \left[ \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} - B' (1+i) u_{j+1} - \right. \right. \\
 \left. \left. - w_j \sin \theta \right] - R_0 a_{ijk} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - v_i \right) v_j \sin \theta \right\} - \sum_{i+j+k=n-2} a_{ijk} \sin \theta = 0 \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j+k=n} \left[ R_0 v_i \frac{\partial w_j}{\partial \theta} - \frac{B}{2} \frac{\partial q_{ij}}{\partial \theta} - \frac{B(1-V_{ij})}{2\kappa} \frac{\partial S_k}{\partial \theta} \right] + \sum_{i+j+k=n-1} [(j \div 1) R_0 u_i w_{j+1} + \\
 \div v_i \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial q_{ij}}{\partial \varphi} - \frac{1-V_{ij}}{2\kappa} \frac{\partial S_k}{\partial \varphi} \div (j \div 1) B' q_{ij+1} + B' \frac{1-V_{ji}}{2\kappa} (k \div 1) S_{k+1} + \\
 \div w_i (u_j \sin \theta \div v_j \cos \theta)] + \sum_{i+j=n-2} (j \div 1) u_i w_{j+1} \sin \theta = 0 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i+j+k=n} \left\{ R_0 b_{ijk} \div B \left[ \frac{\kappa-1}{2} (1-V_{ij}) \frac{\partial w_k}{\partial \theta} - w_i w_j \frac{\partial w_k}{\partial \theta} - w_i \frac{\partial q_{jk}}{\partial \theta} \right] \right\} + \\
 + \sum_{i+j+k=n-1} \left\{ b_{ijk} \sin \theta \div R_0 c_{ijk} + \frac{\kappa-1}{2} (1-V_{ij}) \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} - w_i w_j \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} - \frac{w_i}{2} \frac{\partial q_{jk}}{\partial \varphi} - \right. \\
 \left. - B' (k+1) \left[ \frac{\kappa-1}{2} (1-V_{ij}) w_{k+1} - w_i w_j w_{k+1} - w_i q_{jk+1} \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\kappa - 1}{2} (1 - V_{ij}) (u_k \sin \theta + v_k \cos \theta) \Big\} + \sum_{i+j+k=n-2} c_{ijk} \sin \theta = 0 \quad (2.5) \\
 a_{ijk} & = (k + 1) \left( w_i w_{k+1} + v_i v_{k+1} + \frac{1 - V_{ij}}{2\kappa} S_{k+1} \right), \quad \begin{aligned} q_{ij} & = u_i u_j + v_i v_j, \\ V_{ij} & = u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j \end{aligned} \\
 b_{ijk} & = \frac{1}{2} (\kappa - 1) (1 - V_{ij}) \left( \frac{\partial v_k}{\partial \theta} + u_k \right) - \frac{v_k}{2} \frac{\partial q_{ij}}{\partial \theta} - w_i v_j \frac{\partial w_k}{\partial \theta} \\
 c_{ijk} & = (k + 1) \left[ \frac{1}{2} (\kappa - 1) (1 - V_{ij}) u_{k+1} - u_i q_{jk+1} - w_i u_j w_{k+1} \right]
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.2) — (2.5) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения относительно независимой переменной  $\theta$  с параметром  $\varphi$ .

3. Для нулевых членов рядов (2.1) при  $n = 0$  в (2.2) — (2.5), имеем

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - v_0 \right) (B w_0 + R_0 v_0) = 0, \quad (B w_0 + R_0 v_0) \frac{\partial S_0}{\partial \theta} = 0 \quad (3.1) \\
 R_0 v_0 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) B & = \frac{1 - V_0^2}{2\kappa} \frac{\partial S_0}{\partial \theta} B \quad (V_0^2 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \\
 R_0 c_0^2 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - R_0 v_0 \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) & + [B (c_0^2 - w_0^2) - R_0 w_0 v_0] \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \\
 - B w_0 \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + c_0^2 u_0 R_0 & = 0 \quad (c_0^2 = \frac{1}{2} (\kappa - 1) (1 - V_0^2))
 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы (3.1) находим

$$v_0 = \partial u_0 / \partial \theta, \quad S_0 = S_0(\varphi) \quad (3.2)$$

Теперь третье уравнение (3.1) приведет к виду

$$\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{B}{R_0} \left( u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Четвертое уравнение также упростится и распадается на два

$$u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} = 0, \quad \left( 1 + \frac{B}{R_0^2} \right) c_0^2 - \left( v_0 + \frac{B}{R_0} w_0 \right)^2 = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.3) удается проинтегрировать

$$w_0 + u_0 \frac{B'}{R_0} - v_0 \frac{B}{R_0} = Z_0 w_0^+, \quad Z_0 = \left[ 1 + \left( \frac{x_0}{R_0} \right)^2 + \left( \frac{R_0}{R_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

Это равенство показывает, что проекция вектора скорости  $w_0^+ = w_0^+(\varphi)$  на направление касательной к линии  $L$  не изменяется при повороте потока около кривой  $L$ . Следовательно, для нулевых членов рядов (2.1) имеются два различных вида решений; будем различать решения типа  $A$ , если нулевые члены рядов (2.1) удовлетворяют первому из уравнений (3.4) и решения типа  $B$ , если они удовлетворяют второму.

Интегрируя уравнения (3.2), (3.3) и первое уравнение (3.4), получим для нулевых членов типа  $A$  следующие выражения

$$w_0 = w_0(\varphi), \quad S_0 = S_0(\varphi), \quad u_0 = q_0 \cos(\theta - \delta), \quad v_0 = -q_0 \sin(\theta - \delta) \quad (3.6)$$

Здесь  $q_0$  и  $\delta$  будут функциями угла  $\varphi$ . Решение (3.6) описывает в каждой плоскости  $\varphi = \text{const}$  течение с постоянной скоростью  $V_0$ , направленной под углом  $\delta(\varphi)$  к оси  $x$ . Следующие члены рядов (2.1) будут учитывать как неравномерность набегающего потока, так и форму поверхности тока за линией  $L$ .

Подставив во второе уравнение (3.4) соотношения (3.2) и (3.5), для определения коэффициента  $u_0$  решения типа  $B$  получим линейное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}
 & \gamma \left( 1 + \frac{B^2}{R_0^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + (Z_0^2 + \gamma B^2 B'^2) u_0^2 - \left( \gamma = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right) \\
 & - 2\gamma B B' (1 + B^2) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 2\gamma B (1 + B^2) w_0^+ Z_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \quad (3.7) \\
 & - 2B' (1 + \gamma B^2) w_0^+ Z_0 u_0 + w_0^{+2} Z_0^2 (1 + \gamma B^2) - (1 + B^2) = 0
 \end{aligned}$$

Решением этого уравнения будет функция

$$u_0 = Z_0^{-1} (w_0^+ B' + \sqrt{1 - w_0^{+2}} \sqrt{1 + B^2} \cos \beta) \quad (3.8)$$

$$\beta = 1 / \sqrt{\gamma} \operatorname{arctg} [Z_0^{-1} \operatorname{tg} (\theta + \nu)] + a_0(\varphi), \quad \operatorname{tg} \nu = x_0 / R_0$$

Здесь  $a_0(\varphi)$  — произвольная функция. Из уравнения (3.2) находим

$$v_0 = Z_0^{-1} \left[ -w_0^+ B + \frac{BB' \sqrt{1 - w_0^{+2}}}{\sqrt{1 + B^2}} \cos \beta - 1 / \sqrt{\gamma} \frac{\sqrt{1 - w_0^{+2}}}{\sqrt{1 + B^2}} \sin \beta \right] \quad (3.9)$$

Уравнение (3.7) и его решение значительно упрощаются, если вместо плоскости  $\varphi = \text{const}$  искать решение в плоскости, перпендикулярной к кривой  $L$  в данной точке. Чтобы перейти в эту новую плоскость, следует совершить следующую замену переменной  $\theta$  и искомых функций  $u_0, v_0, w_0$  (3.10)

$$\begin{aligned} \theta^+ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} [Z_0^{-1} \operatorname{tg} (\theta + \nu)], & v_0 &= Z_0^{-1} \left( \frac{Z_0}{\sqrt{1 + B^2}} v_0^+ - B w_0^+ + \frac{BB'}{\sqrt{1 + B^2}} u_0^+ \right) \\ u_0 &= Z_0^{-1} (B' w_0^+ + \sqrt{1 + B^2} u_0^+), & w_0 &= Z_0^{-1} \left( \frac{BZ_0}{\sqrt{1 + B^2}} v_0^+ + w_0^+ - \frac{B'}{\sqrt{1 + B^2}} u_0^+ \right) \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс плюс обозначает компоненты скорости и функции в новой плоскости. Совершив замену (3.10) в уравнениях (3.2), (3.3) и (3.7), получим

$$\frac{\partial w_0^+}{\partial \theta^+} = 0, \quad u_0^+ = \frac{\partial v_0^+}{\partial \theta^+}, \quad \gamma \left( \frac{\partial u_0^+}{\partial \theta^+} \right)^2 + u_0^{+2} + w_0^{+2} - 1 = 0 \quad (3.11)$$

Решением этой системы будут функции

$$\begin{aligned} u_0^+ &= \sqrt{1 - w_0^{+2}} \cos (1/\sqrt{\gamma} \theta^+ + a_0), & w_0^+ &= w_0^+(\varphi) \\ v_0^+ &= -1/\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - w_0^{+2}} \sin (1/\sqrt{\gamma} \theta^+ + a_0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Остается в силе также  $S_0 = S_0(\varphi)$ , так как энтропия не зависит от выбора системы координат.

При  $w_0^+ = 0$  соотношения (3.12) совпадают с известным решением Прандтля—Майера [1], описывающим центрированную волну разрежения в плоском течении; следовательно, решение типа  $B$  будет представлять пространственное течение разрежения в окрестности кривой  $L$ .

Если  $V_{01}$  модуль скорости перед поворотом потока и угол  $\theta^+$  отсчитывается от направления вектора скорости до поворота потока на линии  $L$ , то, учитывая (3.12), будем иметь

$$\begin{aligned} V_{01}^2 &= u_{01}^{+2} + v_{01}^{+2} + w_{01}^{+2} = 1 - (1 - w_0^{+2}) \sin^2 (1/\sqrt{\gamma} \theta_{01}^+ + a_0) \\ v_{01}^+ / u_{01}^+ &= \operatorname{tg} \theta_{01}^+ = -1/\sqrt{\gamma} \operatorname{tg} (1/\sqrt{\gamma} \theta_{01}^+ + a_0) \end{aligned}$$

Из этих соотношений найдем

$$a_0 = \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\gamma} c_{01}}{\sqrt{1 - w_0^{+2}}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c_{01}}{\sqrt{1 - w_0^{+2}} - 1/2 (\kappa + 1) (1 - V_{01}^2)}$$

где  $c_{01}$  — скорость звука. Для того чтобы существовала действительная функция  $a_0$ , необходимо выполнение неравенства

$$1 - w_0^{+2} - 1/2 (\kappa + 1) (1 - V_{01}^2) \geq 0$$

или

$$w_0^+ \leq \sqrt{1/2 (\kappa + 1) V_{01}^2 - 1/2 (\kappa - 1)} = V_{01} \cos \mu_1 \quad (3.13)$$

где  $\mu_1$  — угол Маха перед поворотом потока. Условие (3.13), следовательно, показывает, что решение типа  $B$  существует только тогда, когда конусы Маха, выходящие из точек кривой, не содержат внутри себя ни одной точки этой кривой, т. е. линия  $L$  должна быть «сверхзвуковой кромкой».

4. Интегрирование системы уравнений (2.2) — (2.5) последовательно для  $n = 1, 2, 3, \dots$  можно проводить каким-нибудь численным методом. Однако в случае, когда  $L$  будет дугой окружности, уравнения значительно упрощаются и их решение можно найти в квадратурах.

Если  $L$  — дуга окружности, то  $B = B' = 0$ .

Выделим в уравнениях (2.2) — (2.5) члены с неизвестными функциями  $u_n, v_n, w_n, S_n$ , а остальные известные из предыдущих решений члены обозначим соответственно через  $\Phi_n, G_n, H_n, F_n$ , вычисления дают

$$R_0 v_0 \left( \frac{\partial u_n}{\partial \theta} - v_n \right) - n \left( w_0 w_n R_0 + R_0 v_0 v_n + R_0 \frac{1 - V_0^2}{2\kappa} S_n \right) + \Phi_n = 0 \quad (4.1)$$

$$v_0 R_0 \frac{\partial S_n}{\partial \theta} + n R_0 u_0 S_n + G_n = 0 \quad (4.2)$$

$$v_0 R_0 \frac{\partial w_n}{\partial \theta} + n R_0 u_0 w_n + H_n = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} R_0 \left[ \frac{\kappa - 1}{2} (1 - V_0^2) \left( \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + u_n \right) - v_n \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - w_0 v_0 \frac{\partial w_n}{\partial \theta} - (\kappa - 1) (u_0 u_n + v_0 v_n + w_0 w_n) \left( \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + u_0 \right) - \right. \\ \left. - v_0 \left( u_0 \frac{\partial u_n}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_n}{\partial \theta} + u_n \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + v_n \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \right] + \\ + n R_0 \left[ \frac{\kappa - 1}{2} (1 - V_0^2) u_n - u_0^2 u_n - v_0 u_0 v_n - w_0 u_0 w_n \right] + F_n = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнения (4.2) и (4.3) интегрируются независимо от остальных уравнений. В случае течения разрежения, используя для  $u_0$  и  $v_0$  выражения (3.12), получаем

$$\begin{aligned} S_n &= \sin^{n\delta} \beta \left[ \frac{\delta}{\sqrt{1 - w_0^2}} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{G_n}{\sin^{n\delta+1} \beta} d\beta + A_n(\varphi) \right] \\ w_n &= \sin^{n\delta} \beta \left[ \frac{\delta}{\sqrt{1 - w_0^2}} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{H_n}{\sin^{n\delta+1} \beta} d\beta + B_n(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  произвольные функции. Подставляя уравнения (4.1) — (4.3) в уравнение (4.4) и используя (3.12), получим

$$\sin 2\beta \frac{\partial u_n}{\partial \theta} - \left[ \frac{(n+1)\kappa - 1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \cos 2\beta + \frac{n-1+\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \right] u_n + \Omega_n = 0 \quad (4.6)$$

Здесь

$$\Omega_n = \frac{V\delta}{1 - w_0^2} \left[ u_0 w_0 w_n \left( n - \frac{2}{\delta} \right) + n u_0 \frac{1 - V_0^2}{2\kappa} S_n - \frac{\Phi_n u_0 - w_0 H_n - F_n}{R_0} \right]$$

Решением уравнения (4.6) будет функция

$$u_n = \psi_n \operatorname{tg} \beta \left[ - \frac{V\delta}{2} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\Omega_n}{\psi_n \sin^2 \beta} d\beta + E_n(\varphi) \right] \quad (\psi_n = \sin^{n\delta/2} \beta \cos^{1+n/2} \beta) \quad (4.7)$$

Величина  $v_n$  находится из уравнения (4.1). Уравнение (4.6) и его решение (4.7) совпадают при  $w_n = S_n = 0$  с решением Ю. Д. Шмыглевского [1] для осесимметричного безвихревого потока.

В случае А уравнения (4.2) и (4.3) имеют решение

$$\begin{aligned} S_n &= \sin^n (\theta - \delta) \left[ \frac{1}{q_0 R_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{G_n}{\sin^{n+1} (\theta - \delta)} d\theta + L_n(\varphi) \right] \\ w_n &= \sin^n (\theta - \delta) \left[ \frac{1}{q_0 R_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{H_n}{\sin^{n+1} (\theta - \delta)} d\theta + M_n(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из системы (4.1) — (4.4) для  $u_n$  получается линейное уравнение

$$\left(c_0^2 - \frac{1}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} q_0^2 \cos 2\psi\right) R_0 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + n R_0 q_0^2 \sin 2\psi \frac{\partial u_n}{\partial \theta} + \\ + (n+1) R_0 u_n \left[ (n+1) \left(c_0^2 - \frac{1}{2} q_0^2\right) - \frac{n-1}{2} q_0^2 \cos 2\psi \right] + P_n = 0 \quad (4.9)$$

Здесь

$$P_n = n(n-1) R_0 u_0 \frac{c_0^2}{v_0^2} \left( w_0 w_n + \frac{1-V_0^2}{2\kappa} S_n \right) + \frac{c_0^2 - v_0^2}{v_0^2} n \left( w_0 H_n + \frac{1-V_0^2}{2\kappa} G_n \right) + \\ + \left( \frac{c_0^2}{v_0^2} - n \right) u_0 \Phi_n + \frac{c_0^2 - v_0^2}{v_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} + (n+1) (F_n + w_0 H_n)$$

Уравнению (4.9) удовлетворяет функция (4.10)

$$u_n = y_n \left[ R_n + T^n \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{T^n}{y_n^2} d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \left( \frac{T^n}{y_n^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{P_n y_n}{T^{n+1}} d\theta \right) d\theta \right], \quad y_n = \xi^{n+1} \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m \xi^m \right)$$

$$\xi = \frac{1 - M_0^2 \sin^2 \psi}{M_0^2 - 1}, \quad T = c_0^2 - \frac{1}{2} q_0^2 + \frac{1}{2} q_0^2 \cos 2\psi, \quad g_1 = -\frac{n+1}{4} (M_0^2 - 2)$$

$$2g_2 \frac{n+3}{(1-M_0^2)} - g_1 \left( 1 + \frac{1}{1-M_0^2} \right) \left[ \frac{3}{2} (n+2) - \frac{n}{4} (n+1) \right] + (n+1) + \frac{n^2-1}{4} = 0$$

Остальные  $g_m$  определяются из рекуррентной формулы

$$g_m \frac{m(m+n+1)}{1-M_0^2} - g_{m-1} \left( 1 + \frac{1}{1-M_0^2} \right) [(n+m)(m-1/2) - \\ - 1/4 n(n+1)] + g_{m-2} [(m+n-1)(m-1) + (n^2-1)/4] = 0 \quad (m=3, 4, \dots)$$

Функция  $v_n$  затем находится из уравнения (4.1).

5. Коэффициенты рядов, представляющих решение систем уравнений (1.1) в виде (2.1) определены с точностью до произвольных функций от переменной  $\varphi$ , которые должны определяться из начальных или граничных условий. На примере одной из таких задач покажем возможный путь нахождения неизвестных функций.

Пусть течение перед кривой  $L$  известно, и на этой кривой происходит поворот потока на некоторый угол. Рассмотрим случай разрежения потока. Представим характеристическую поверхность, проходящую через  $L$  и соответствующую течению до поворота потока, посредством ряда

$$\theta = \alpha_0(\varphi) + \alpha_1(\varphi) r + \alpha_2(\varphi) r^2 + \dots \quad (5.1)$$

Параметры течения на этой поверхности запишем также в виде ряда; для примера возьмем компоненту  $v_r$

$$v_r = \beta_0(\varphi) + \beta_1(\varphi) r + \beta_2(\varphi) r^2 + \dots \quad (5.2)$$

С другой стороны,  $v_r$  можно разложить в ряд Тэйлора

$$v_r = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{(j)} v_r}{\partial \theta^j} \right)_{\theta=\alpha_0} \frac{(\theta - \alpha_0)^j}{j!} \quad (5.3)$$

Из рядов (2.1) находим

$$\frac{\partial^{(j)} v_r}{\partial \theta^j} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^{(j)} u_m}{\partial \theta^j} r^m \quad (5.4)$$

Из (5.1)

$$(\theta - \alpha_0)^j = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i r^i \right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j} \right) r^k \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) и (5.5) в ряд (5.2), получим

$$v_r = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left( \frac{\partial^{(j)} u_m}{\partial \theta^j} \right)_{\theta=\alpha_0} \left( \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j} \right) r^{m+k} \quad (5.6)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$  в рядах (5.2) и (5.6), приходим к равенству

$$\beta_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{m+k=n} \left( \frac{\partial^{(j)} u_m}{\partial \theta^j} \right)_{\theta=\alpha_0} \left( \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j} \right) \quad (5.7)$$

где функции  $\beta_n$  и  $\alpha_i$  известны, а в выражения для производных  $\partial^{(j)} u_m / \partial \theta^j$  войдут неизвестные функции  $E_1, \dots, E_{n-1}, E_n$  и производные по  $\theta$  от  $E_n, \dots, E_{n-1}$ , поэтому из равенства (5.7) можно последовательно найти все функции  $E_n$ . Таким же образом разыскиваются и остальные произвольные функции  $A_n$  и  $B_n$ .

Предлагаемым методом, используя решение типа  $A$ , можно искать также решение в окрестности кривой  $L$ , когда она является линией возникновения скачка уплотнения. Метод может быть использован как при аналитических исследованиях, так и в численных методах расчета пространственных сверхзвуковых течений газа для нахождения решения в окрестности особых точек.

Что касается сходимости рядов (2.1), то следует отметить, что в случае осесимметричного потенциального течения и аналитических начальных условиях сходимость этих рядов доказана А. А. Дородницким [2]. В общем случае этот вопрос остается открытым.

Поступила I VII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Сб. теоретических работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957.
2. Д о р о д н и ц ы н А. А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Сб. теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.

### ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ОКОЛО КРУГА И СФЕРЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

П. И. Ч у ш к и н (Москва)

При движении затупленных тел с большими сверхзвуковыми скоростями происходит сильная ионизация воздуха за отошедшей ударной волной. Поэтому при помощи внешнего магнитного поля можно воздействовать на это течение, создавая уменьшение теплопередачи и увеличение сопротивления тела, что важно для летательных аппаратов, входящих в плотные слои атмосферы. В практически интересном случае такого течения магнитные числа Рейнольдса  $R_m$  невелики и тогда поле течения не оказывает обратного влияния на магнитное поле, которое, следовательно, можно полагать заданным. В работах [1-3] было рассмотрено гиперзвуковое течение в окрестности точки торможения намагниченной сферы, при этом плотность за ударной волной принималась постоянной и число  $R_m$  малым. Исследование Буша [4], который изучил аналогичную задачу при конечных значениях магнитного числа Рейнольдса, показало его слабое влияние на решение.

Ниже рассчитывается течение около круга и сферы (во всей области влияния), движущихся с большой сверхзвуковой скоростью в магнитном поле при малых числах  $R_m$ . Для решения применяется метод интегральных соотношений А. А. Дородницкина [5]. Этим методом О. М. Белоцерковский [6,7] решил задачу о сверхзвуковом обтекании затупленных тел непроводящим газом. Ниже дается обобщение этого решения на случай намагниченных тел в проводящем газе.