

Уравнение (2.6) принимает вид

$$\alpha \frac{d^2 \Lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{\Lambda^3} - f \left( \frac{V}{v_1} + \frac{d\Lambda}{d\tau} \right) \Lambda \quad (3.3)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{3\pi}{1-v^2}} \frac{Eh}{2K(0) \sqrt{2H}} \quad (\text{задача 1})$$

$$\alpha = \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{3\pi}{1-v^2}} \frac{Eh}{4K(0) \sqrt{H}} \quad (\text{задача 2})$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.4)$$

Исследование уравнения (3.3) показывает, что, как и в [1], при  $V > v_*$  стационарное расклинивание устойчиво по отношению к малым возмущениям. При  $V < v_*$  стационарное расклинивание неустойчиво и имеет место автоколебательный режим распространения трещины. Вообще говоря, автоколебания могут быть двух типов — с остановками и без остановок конца трещины. Длина волны колебаний возрастает с ростом скорости клина. Для расчета возникающих автоколебаний нужно проводить численное интегрирование, задаваясь конкретным видом функции  $f$ . Исследование предельных случаев проводится вполне аналогично [1].

Известно, что при малых скоростях резания отделяющаяся стружка получается ребристой, причем система поперечных ребер оказывается близкой к периодической; ребра редют при повышении скорости резания и совсем исчезают при скорости, большей некоторой критической. Не исключено, что это явление объясняется рассмотренным здесь автоколебательным процессом, связанным с колебаниями конца свободной трещины, образующейся перед резцом. При перенесении развитого здесь подхода на резание следует иметь в виду, что для тонких стружек плотность поверхностной энергии и модуль сцепления могут оказаться зависящими от толщины стружек, так как пластическая область вблизи конца трещины может пронизывать стружку насквозь.

Поступила 2 IX 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
2. O b r e i m o v I. V. The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc., 1930, A 127, 290—297.
3. B e n b o w J. J. and R o e s l e r F. C. Experiments on controlled fractures. Proc. Phys. Soc., 1957, B 70, 201—211.

### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Г. П. Черепанов (Москва)

Ниже предлагается упрощенная постановка некоторых задач о развитии трещин в твердых телах под воздействием интенсивных давлений. В качестве модели твердого тела используется идеальная жидкость; эта модель уже нашла широкое применение в гидродинамической теории кумуляции и взрыва [1, 2] и в акустической теории откола [3], где также имеют место весьма большие давления. Предлагаемая упрощенная постановка позволяет найти эффективное решение ряда задач, недоступных для исследования при более строгой постановке. Полученные решения могут иметь также самостоятельное значение в рамках идеальной жидкости.

§ 1. Гидродинамическая постановка некоторых статических задач о трещинах в твердых телах. 1°. Пусть твердое тело, покоящееся в начальный момент, подвергается воздействию весьма интенсивных массовых сил и поверхностных давлений в течение некоторого промежутка времени  $\Delta t$ . Примем в качестве модели твердого тела идеальную жидкость. По-видимому, это допущение оправдано для больших давлений. Допустим, кроме того, что

$$v \ll c, \quad v \Delta t \ll L \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  — характерная скорость частиц тела после действия больших давлений и массовых сил,  $c$  — скорость звука в теле,  $L$  — характерный линейный размер. При выполнении условий (1.1) можно показать [4], что для скорости частиц тела после удара  $v$  и импульсивных давлений

$$P = \int_0^{\Delta t} p dt \quad (p — \text{давление})$$

имеют место основные соотношения

$$v = \text{grad } \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi = U + \rho^{-1}P, \quad F = \text{grad } U \quad (1.2)$$

Здесь  $F$  — импульсивные массовые силы,  $U$  — потенциал,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

2°. В работах по теории взрыва принимается [2,5], что поверхности, образующиеся после взрыва, являются весьма гладкими. Если для несвязных и малосвязных грунтов типа песков такое предположение будет достаточно достоверным, то для хрупких тел (скальные породы) оно малообосновано, так как поверхности, образующиеся после взрыва в таких породах, имеют неровный характер с разветвленными трещинами, уходящими в глубь тела. Поэтому представляет интерес, не отказываясь от модели идеальной жидкости, построить решения ударных задач для жидкости с трещинами.

Допустим, что выполняется условие

$$V \Delta t \gg l \quad (1.3)$$

Здесь  $V$  — скорость распространения трещины,  $l$  — длина трещины, образующейся после взрыва. Условие (1.3) означает, что время неустановившегося развития трещины мало по сравнению с временем действия интенсивных давлений. Заметим, что максимальная скорость распространения трещины имеет порядок скорости звука [6,7], а так как  $v \Delta t \ll l$ , то уравнения (1.1) и (1.3) не будут противоречивыми.

При выполнении условия (1.3), очевидно, можно принять, что трещины развиваются мгновенно, а импульс сил сцепления за время распространения трещины пренебрежимо мал по сравнению с импульсом сил сцепления за то время, когда трещина не движется. Относительно последних сил сцепления примем две гипотезы Г. И. Баренблатта о малости и автономности концевой области трещины, в которой действуют силы сцепления [7]. При этом интенсивность сил сцепления, очевидно, будет совпадать с интенсивностью сил сцепления для статической трещины.

Используя условие конечности импульсивного давления в кончике трещины, аналогичное условию С. А. Христиановича в теории трещин, отсюда нетрудно получить аналог условия Г. И. Баренблатта [7]: импульсивное давление в окрестности кончика трещины имеет особенность типа

$$P = \frac{K \Delta t}{\pi \sqrt{s}} \quad (1.4)$$

где  $K$  — статический модуль сцепления,  $s$  — малое расстояние от кончика трещины на ее продолжении. Условие (1.4) служит для определения длины трещины, не известной заранее.

Отметим, что, когда импульсом сил сцепления можно пренебречь по сравнению с другими силами, сдерживающими развитие трещины, то для определения длины трещины достаточно одного условия конечности.

Условия (1.1) представляют собой условия статики для твердого тела. Смещение  $u$  и давление в твердом теле  $p$  легко найти из решения задачи в указанной упрощенной постановке, если предположить, что действующие на тело давления не зависят от времени в течение промежутка  $\Delta t$ , а скорость  $v$  возрастает со временем линейно в течение этого же промежутка времени  $\Delta t$ . Тогда

$$P = p \Delta t, \quad u = \frac{1}{2} v \Delta t \quad (1.5)$$

и в силу линейности задачи множитель  $\Delta t$  в окончательных формулах сокращается. При этом, естественно, можно решать лишь такие задачи, в которых на граничных поверхностях заданы нормальные усилия или нормальные смещения, а тангенциальная нагрузка равна нулю.

§ 2. Конкретные задачи. Рассмотрим некоторые конкретные задачи о трещинах в твердых телах в предлагаемой упрощенной постановке. При этом ограничимся лишь плоскими задачами, для которых основные соотношения (1.2) удобно записать в виде

$$P = \rho \operatorname{Re} f(z), \quad v = v_x + iv_y = \overline{f'(z)} \quad (2.1)$$

где  $f'(z)$  — аналитическая функция  $z = x + iy$ ;  $v_x$  и  $v_y$  — составляющие скорости по декартовым осям координат  $x$  и  $y$ . Здесь предполагается, что импульсивные массовые силы отсутствуют ( $F = 0$ ).

1°. *Простейшие задачи.* Пусть в бесконечном теле имеется вырез произвольной формы, имеющий конечные размеры и поверхность которого свободна от нагрузки. На бесконечности действует постоянное импульсивное давление  $P = P_\infty$ , в результате которого с поверхности тела выходят трещины, также свободные от нагрузки. Конфигурацию трещин считаем известной.

Можно показать, что в том случае, когда трещин одна или две, решение соответственно для одной и двух трещин записывается в виде

$$f(z) = \frac{P_\infty}{\rho} \sqrt{\frac{g(z) + L}{g(z) - L}}, \quad f(z) = \frac{P_\infty g(z)}{\rho \sqrt{g^2(z) - L^2}} \quad (2.2)$$

Здесь  $g(z)$  — функция, осуществляющая конформное отображение внешности контура в физической плоскости  $z$  на внешность отрезка  $(-L, +L)$  с соответствием бесконечно удаленных точек и концов разрезов. Также легко получить решение в общем виде для любого числа трещин, выходящих на границу тела.

Рассмотрим для примера случай, когда вырез представляет окружность радиуса  $R$  с двумя одинаковыми трещинами длины  $l$  вдоль оси  $x$ . В этом случае преобразующая функция  $g(z)$  запишется в виде

$$g(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right), \quad L = \frac{1}{2} \left( \frac{l+R}{R} + \frac{R}{l+R} \right) \quad (2.3)$$

а условие (1.4), определяющее размер трещины  $l$ , можно привести к виду

$$\frac{K \Delta t}{\pi P_\infty \sqrt{R}} = \sqrt{\frac{(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)}{2\lambda(2 + \lambda)}}, \quad \lambda = \frac{l}{R} \quad (2.4)$$

Представляет интерес также задача о взаимодействии трещин. Решение задач об однорядовой решетке трещин, а также соответствующие результаты с точностью до постоянного множителя совпадают с результатами, полученными в работе [8, § 3]. Мы их приводить не будем. Также аналогично изложенному в работе [8] может быть рассмотрен вопрос о развитии криволинейных трещин.

2°. *Взрыв в цилиндрической полости.* Пусть в цилиндрической полости радиуса  $R$  произошел взрыв интенсивности  $P_0$ , в результате которого в теле развилось  $2n$  симметричных трещин одинаковой длины  $l$ , выходящих с границы полости. На бесконечности действует горное давление  $q$ , так что соответствующее импульсивное давление сжатия на бесконечности равно  $q \Delta t$ .

Граничные условия задачи, очевидно, запишутся в виде

$$\begin{aligned} P &= 0 \quad \text{при } \arg z = k\pi/n \quad (k = 0, 1, \dots, 2n; |z| < l + R) \\ P &= P_0 \quad \text{при } |z| = R \\ P &= q \Delta t + o(1) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

Условия (2.5) перепишем в виде краевой задачи для определения функции  $f(z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= 0 \quad \text{при } \arg z = k\pi/n \quad (k = 0, 1, \dots, 2n; |z| < l + R) \\ \operatorname{Re} f(z) &= P_0 / \rho \quad \text{при } |z| = R \\ f(z) &= q \Delta t / \rho + o(1) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение краевой задачи (2.6) имеет вид [9]

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{P_0}{\pi \rho i \sqrt{\zeta^2 - L^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{t^2 - L^2}}{t - \zeta} dt + \frac{q \Delta t \zeta}{\rho \sqrt{\zeta^2 - L^2}} = \\
 &= \frac{P_0}{\pi \rho i} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - L^2}} \ln \frac{2 \sqrt{1 - L^2} + 2(1 - \zeta) + \zeta^2 - L^2}{2 \sqrt{1 - L^2} + 2(-1 - \zeta) + \zeta^2 - L^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \ln \frac{(1 + \zeta) [\sqrt{(\zeta^2 - L^2)(1 - L^2)} + \zeta^2 - L^2 + \zeta(1 - \zeta)]}{(1 - \zeta) [-\sqrt{(\zeta^2 - L^2)(1 - L^2)} - (\zeta^2 - L^2) + \zeta(1 + \zeta)]} \right\} + \frac{q \Delta t \zeta}{\rho \sqrt{\zeta^2 - L^2}} \\
 \zeta &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^n}{R^n} + \frac{R^n}{z^n} \right), \quad L = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{l}{R} \right)^n + \left( 1 + \frac{l}{R} \right)^{-n} \right] \\
 \sqrt{\zeta^2 - L^2} &= \zeta + O(\zeta^{-1}) \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Рассмотрим два наиболее важных частных случая общей задачи. Пусть сначала  $K / q \sqrt{l} \ll 1$ , так что прочностные силы в кончике трещины малы по сравнению с силами горного давления. Тогда потенциал  $f(z)$  равен

$$f(z) = -\frac{P_0}{\pi \rho i} \ln \frac{(1 + \zeta) [\sqrt{(1 - L^2)(\zeta^2 - L^2)} + \zeta^2 - L^2 + \zeta(1 - \zeta)]}{(1 - \zeta) [\sqrt{(1 - L^2)(\zeta^2 - L^2)} - (\zeta^2 - L^2) + \zeta(1 + \zeta)]} \tag{2.8}$$

При этом длина трещин  $l$  определяется из условия конечности импульсивного давления в кончике трещины, которое можно привести к виду

$$\frac{l}{R} = \left( \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi q \Delta t}{P_0}} + \operatorname{ctg} \frac{\pi q \Delta t}{P_0} \right)^{1/n} - 1 \tag{2.9}$$

Когда  $P_0 \gg q \Delta t$ , условие (2.9) принимает вид

$$\frac{l}{R} = \left( \frac{2P_0}{\pi q \Delta t} \right)^{1/n} - 1 \tag{2.10}$$

Пусть теперь  $K / q \sqrt{l} \gg 1$ , так что прочностные силы в кончике трещины велики по сравнению с горным давлением. Тогда в выражении (2.7) для  $f(z)$  можно положить  $q = 0$ , а длину трещин  $l$  определить из условия (1.4), которое в данном случае можно привести к виду

$$\frac{P_0 \sqrt{R}}{K \Delta t} = \left( \frac{n [(1 + l/R)^n - (1 + l/R)^{-n}]}{L (1 + l/R)} \right)^{1/2} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L + 1}{L - 1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{L - 1}{L + 1}} \right]^{-1} \tag{2.11}$$

Зависимости (2.11) и (2.7) служат для определения длины трещин  $l$ . Когда  $P_0 \sqrt{R} / K \Delta t \gg 1$ , т. е. импульсивные нагрузки велики по сравнению с прочностными силами, действующими в концевой области трещины, так что  $l \gg R$ , то формулы (2.11) и (2.7) значительно упрощаются

$$\frac{P_0^2 R}{K^2 (\Delta t)^2} = \frac{n}{2} \left( \frac{l}{R} \right)^{2n-1} \tag{2.12}$$

Формулы (2.9) — (2.12) показывают, что длина трещин сильно зависит от числа трещин  $2n$ , которое, вообще говоря, неопределенно. Для его нахождения требуется дополнительное физическое условие. Физически очевидно, что число  $n$  определяется в первую очередь величиной импульса  $P_0$  и свойствами материала.

§ 3. Некоторые динамические задачи о трещинах в акустическом приближении. Для акустических задач о движении идеальной сжимаемой жидкости имеют место основные соотношения [4]

$$c^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{3.1}$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал возмущенного движения, характеризуемого скоростью  $\mathbf{v}$  и давлением  $p$ .

Рассмотрим две плоские задачи, иллюстрирующие возможность применения акустической модели для решения некоторых динамических задач теории трещин.

1°. *Установившееся распространение трещин.* Пусть в бесконечном теле с постоянной скоростью  $V$  движется вдоль своей оси симметрии тонкий абсолютно жесткий полубесконечный клин. Толщину клина для простоты примем постоянной и равной  $2h$ . Материал тела считаем идеальной сжимаемой жидкостью. Впереди клина бежит трещина длины  $l$ , которую требуется определить. В рамках идеальной сжимаемой жидкости полость, образованная трещиной, может быть интерпретирована как некоторая застойная зона. Ось симметрии клина примем за ось  $x$ , направленную противоположно направлению движения клина.

Ввиду малости толщины клина граничные условия можно снести на ось  $x$

$$\begin{aligned} v_y &= 0 & \text{при } x < Vt, \quad x > Vt + l \\ p &= 0 & \text{при } Vt < x < Vt + l \end{aligned} \quad (3.2)$$

При помощи основных соотношений (3.1) для возмущенных скорости и давления при установившемся движении жидкости можно получить представления

$$\begin{aligned} p &= \rho V \operatorname{Re} \Phi'(z), & v_x &= \operatorname{Re} \Phi'(z), & v_y &= -\sqrt{1-m^2} \operatorname{Im} \Phi'(z) \\ z &= x - Vt + i\sqrt{1-m^2}y, & m &= V/c & (m \ll 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\Phi(z)$  — аналитическая функция. Используя представления (3.3), граничные условия (3.2) при  $\operatorname{Im} z = 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi'(z) &= 0 & \text{при } \operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Re} z > l \\ \operatorname{Re} \Phi'(z) &= 0 & \text{при } 0 < \operatorname{Re} z < l \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение краевой задачи (3.4) имеет вид [9]

$$\Phi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z(z-l)}}, \quad \sqrt{z(z-l)} = z + O(z^{-1}) \text{ при } z \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Действительную постоянную  $C$  определим из очевидного условия

$$\int_0^l v_y dx = hV \quad (3.6)$$

Получаем

$$C = \frac{hV}{\pi \sqrt{1-m^2}} \quad (3.7)$$

Длину трещины  $l$  находим из условия, полученного в работе [6]

$$l = \frac{\rho^2 c^4 h^2 m^4}{K^2 (1-m^2)} \quad (K — модуль сцепления) \quad (3.8)$$

Рассмотренная задача является аналогом задачи о расклинивании хрупких тел [6]. Однако полученный результат (3.8) даже качественно не согласуется с соответствующим результатом расклинивания хрупких тел [6]. Это показывает, что к аналогичным и упрощенным постановкам задач нужно подходить крайне осторожно. В то же время результат (3.8) достаточно объясним для идеальной упругой жидкости, если под трещиной понимать некоторую застойную зону.

2°. *Неустановившееся распространение трещин.* Пусть бесконечная упругая идеальная жидкость находится под постоянным отрицательным давлением  $p = -p_0$ . В начальный момент времени из начала координат вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $V$  начинает расширяться полость, которую идеализированно представим себе в виде разреза вдоль действительной оси  $(-Vt, Vt)$ , где  $V \ll c$ . Полость свободна от давления. Эта задача — аналог задачи Броберга для упругих тел [10].

Давление  $p$  удовлетворяет волновому уравнению

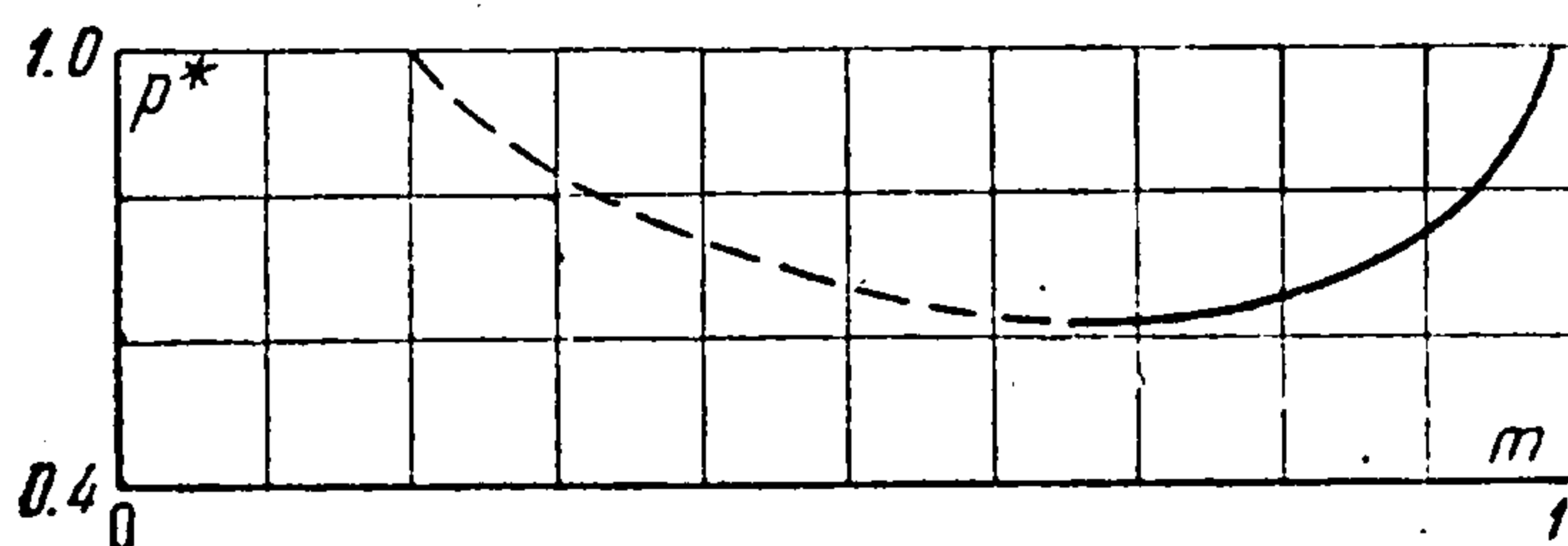
$$c^2 \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

Решим следующую краевую задачу для волнового уравнения (3.9)

$$p = p_0 \quad \text{при } y = 0, |x| < Vt, \quad p = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.10)$$

Наложив на решение этой задачи постоянное давление —  $p_0$ , получим, очевидно, решение исходной задачи.

Решение краевой задачи (3.9), (3.10) принадлежит классу функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [11]



$$p = \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (3.11)$$

$$z = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - c^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}$$

где  $\Phi(z)$  — аналитическая функция.

На плоскости комплексного переменного  $z$  для определения функции  $\Phi(z)$  получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(z) &= p_0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| > 1/V \\ \operatorname{Re} \Phi(z) &= 0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| < 1/c \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение краевой задачи (3.12) после вычисления интегралов можно привести к виду

$$\Phi(z) = p_0 - \frac{2p_0 Vz}{\pi i} \sqrt{\frac{z^2 - 1/c^2}{z^2 - 1/V^2}} \left[ K(m) + \left( \frac{1}{V^2 z^2} - 1 \right) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{c^2 z^2}, m\right) \right] \quad (3.13)$$

$$m = V/c$$

где  $K$  и  $\Pi$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и третьего рода. Функция  $\sqrt{z^2 - c^2} / \sqrt{z^2 - V^{-2}}$  положительна на верхнем берегу разреза  $(-c^{-1}, c^{-1})$ .

Для определения скорости расширения полости используем условие, полученное в работе [12]. Находим

$$p^* = \frac{p_0 \sqrt{c}}{R} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{m(1-m^2)} K(m)} \quad (3.14)$$

где  $R$  — динамический модуль сцепления [12].

Качественное объяснение зависимости (3.14), изображенной на фигуре, аналогично объяснению соответствующей зависимости для упругой задачи, приведенному в работе [12]. Очевидно, рассмотренная задача имеет также самостоятельное значение при изучении разрыва идеальной жидкости под действием отрицательных давлений.

Поступила 25 VIII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принципы его работы. Успехи матем. наук, 1957, т. XII, вып. 4.
2. Власов О. Е. Основы теории действия взрыва. ВИА, 1957.
3. Ленский В. С. Акустический вариант теории откола. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехтеоретиздат, 1948, т. I, II.
5. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
7. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
8. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз. М.—Л., 1958.
10. Вгоберг К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv för Fysik, 1960, vol. 18, 159—192.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Физматгиз, т. 3, ч. 2, 1958.
12. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л., Черепанов Г. П. О неустановившемся распространении трещин. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.