

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ ПРИ РАСКЛИНИВАНИИ ТОНКИХ ТЕЛ

Г. И. Баренблатт, Р. Л. Салганик

(Москва)

Настоящая заметка представляет собой краткое дополнение к работе [1], в которой была предложена теоретическая схема автоколебательных явлений, возникающих при расклинивании бесконечного хрупкого тела жестким клином, движущимся с постоянной скоростью. Исходя из предположения, что модуль сцепления зависит от скорости движения конца трещины, вначале убывая с увеличением этой скорости, было показано, что режим распространения трещины с постоянной скоростью при малой скорости расклинивания неустойчив и что развитие трещины носит колебательный характер.

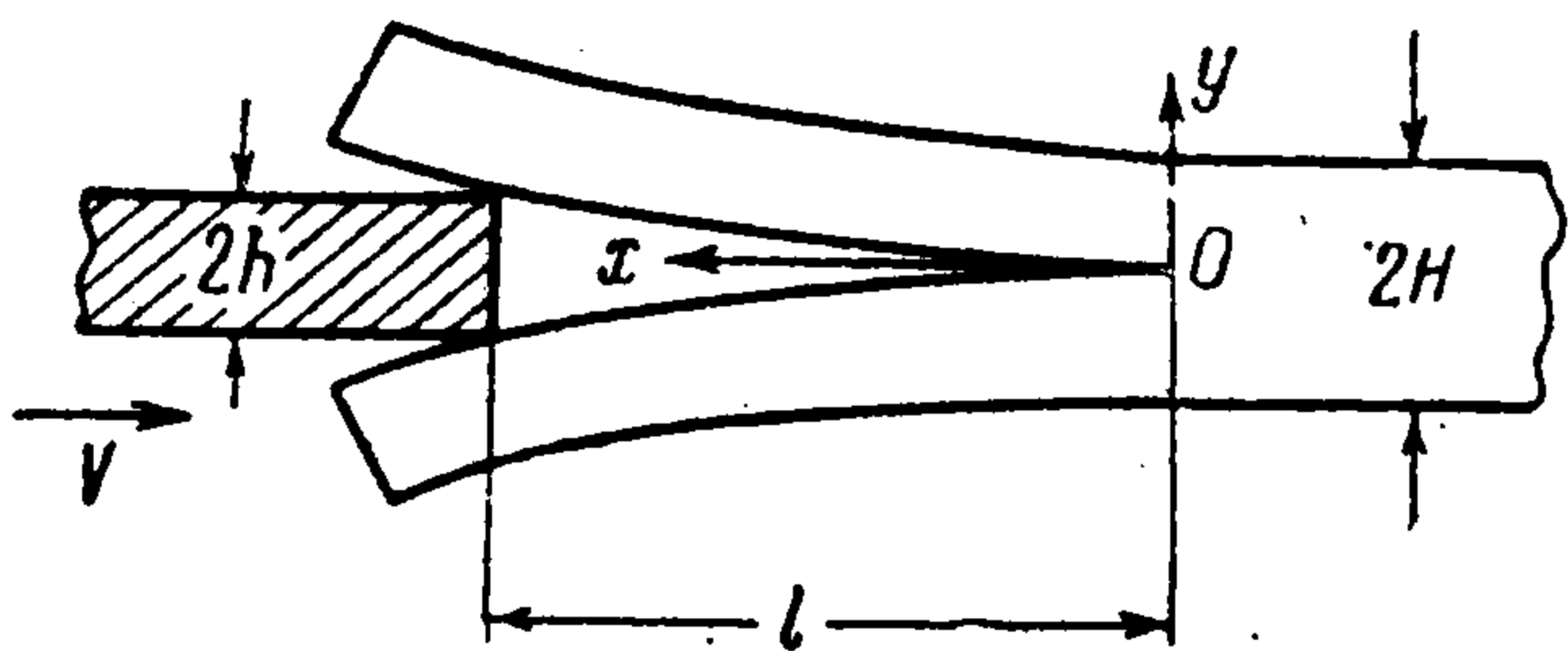
В эксперименте может оказаться неудобным применять достаточно большие по всем направлениям пластинки, на которых реализуется схема расклинивания бесконечного тела. С другой стороны, не удастся провести в эффективной аналитической форме исследование для произвольных ограниченных тел. Однако существуют два предельных случая, допускающих весьма простое аналитическое исследование и, вместе с тем, достаточно близких к эксперименту: расклинивание тонкой балки и отщепление тонкой стружки от большого тела. Соответствующие статические задачи расклинивания были решены И. В. Обреимовым [2] и Реслером и Бенбоу [3]. В предлагаемой заметке проводится исследование автоколебаний при расклинивании в этих двух предельных случаях. Представляется, что исследование автоколебаний при отщеплении тонкой стружки может пролить некоторый дополнительный свет на природу автоколебаний, возникающих при резании.

1°. Рассматриваются, таким образом, следующие задачи.

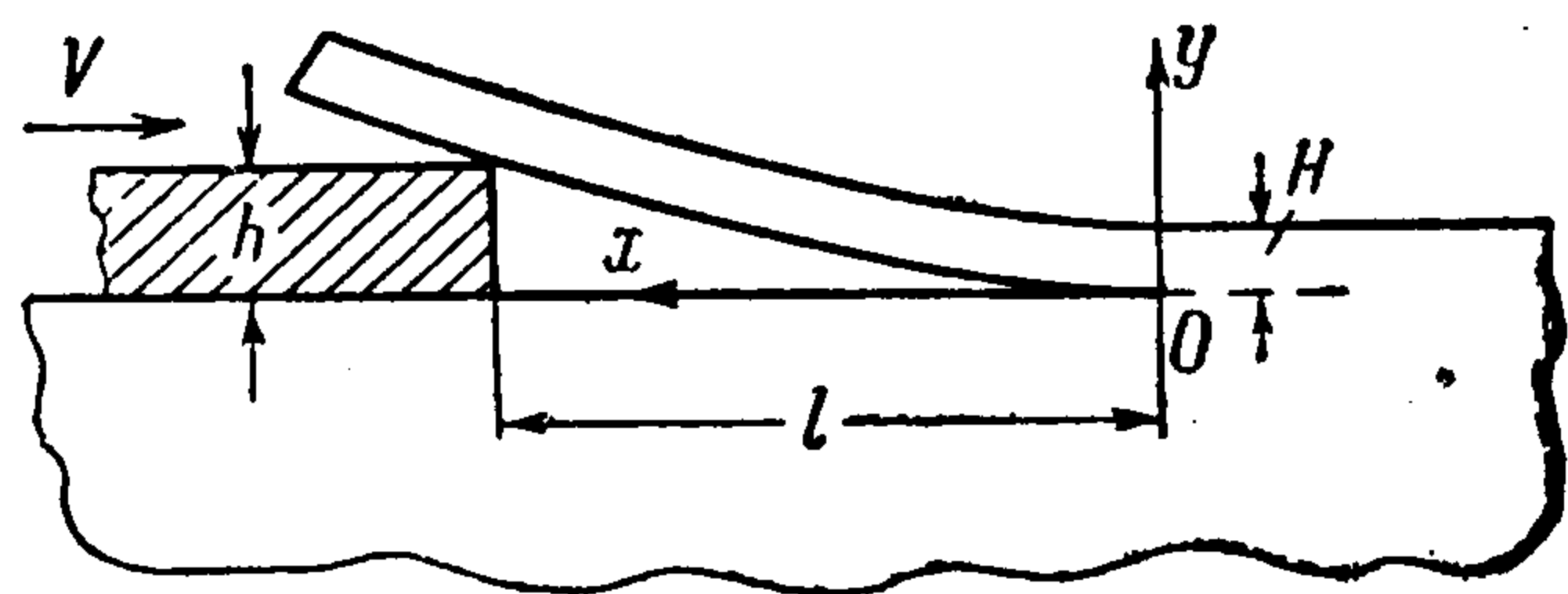
(1) Тонкая балка высотой $2H$ и толщиной b расклинивается пополам жестким клином высотой $2h$, движущимся с постоянной скоростью V (фиг. 1).

(2) Тонкая стружка высотой H отщепляется от весьма большого тела толщины b жестким клином высотой h , движущимся с постоянной скоростью V (фиг. 2).

Как и в работе [1], делаем предположение, что плотность поверхностной энергии T и модуль сцепления K зависят от мгновенной скорости конца трещины v , причем с увеличением скорости v от нуля до $v = v_*$ величины T и K убывают, а затем начинают возрастать.



Фиг. 1



Фиг. 2

В ходе процесса расклинивания длина трещины l меняется, так что скорость перемещения ее конца равна $v = V + dl/dt$.

В обоих случаях будем считать, что деформация расклиниваемых тел происходит по балочной схеме и что в конце трещины балки жестко заделаны. В принятом приближении сила, приложенная со стороны клина, и силы сцепления, действующие в конце трещины, деформируют только ту часть материала, которая находится между ними. Поэтому их работа равна изменению энергии только этой части. Следовательно, уравнение баланса энергии для обоих случаев имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = FV - 2T(v)vb \quad (1.1)$$

Здесь ε и Π — кинетическая и потенциальная энергии материала, расположенного между передним краем клина и концом трещины, F — расклинивающая сила, действующая со стороны клина на расклиниваемое тело.

Рассмотрим вспомогательное движение, в котором конец трещины неподвижен ($v = 0$), а величины l, \dot{l}, \dots в данный момент совпадают с соответствующими величинами для основного движения. Уравнение баланса энергии для вспомогательного движения имеет вид

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} + \frac{d\Pi'}{dt} = -F' \frac{dl}{dt} \quad (1.2)$$

где ε', Π', F' — соответствующие величины для вспомогательного движения. Ввиду того, что скорость движения клина мала сравнительно со скоростью звука, можно, как и в [1], принять, что $F' = F$ и $d\Pi'/dt = d\Pi/dt$, так что, вычитая (1.2) из (1.1), получаем основное уравнение

$$\frac{d(\varepsilon - \varepsilon')}{dt} = [F - 2T(v)b]v \quad (1.3)$$

2°. Для вычисления величин $\varepsilon, \varepsilon'$ и F используем квазистатическое приближение, которое возможно в силу малости скорости клина. Для задачи (1) имеем

$$\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{2} \rho b H \int_0^l \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx \quad (2.1)$$

где $y(x, t)$ — кривая прогиба балки, ρ — плотность.

Следуя [3], считаем, что при $x = 0$ имеет место жесткая заделка, так что статическое распределение прогибов имеет вид

$$y = 3h \left(\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{6} \xi^3 \right), \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (2.2)$$

Имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} v + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{dl}{dt} = \frac{3h}{l} (v - \xi) (v - \xi \dot{l}) \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и выполняя несложные вычисления, находим

$$\frac{d(\varepsilon - \varepsilon')}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\rho b H h^2}{l} v \ddot{l} \quad (2.4)$$

Здесь отброшены члены, содержащие первые производные. Это можно сделать, потому что инерция мала (см. соответствующие оценки в [1]).

Имеем, далее, в том же квазистатическом приближении

$$\Pi = \frac{3EIh^2}{l^3}, \quad I = \frac{bH^3}{12}, \quad F = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} = \frac{3EbH^3h^2}{4l^4} \quad (2.5)$$

Здесь E — модуль Юнга. Подставляя (2.4) и (2.5) в (1.3), получаем основное дифференциальное уравнение для функции $l(t)$

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{A}{l^3} - BK^2(v)l, \quad A = \frac{EH^2}{\rho}, \quad B = \frac{8(1-\nu^2)}{3\pi E\rho Hh^2} \quad (2.6)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Вполне аналогично, для задачи (2) получаем такое же уравнение (2.6), но выражение для коэффициента B будет

$$B = \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi E\rho Hh^2} \quad (2.7)$$

3°. В уравнении (2.6) удобно перейти к безразмерному виду, полагая

$$\Lambda = \frac{l}{l_*(0)}, \quad \tau = \frac{v_1 t}{l_*(0)}, \quad f \left[\frac{V}{v_1} + \frac{d\Lambda}{d\tau} \right] = \frac{K^2(v)}{K^2(0)} \quad (3.1)$$

где v_1 — характерная скорость, которую можно выбирать по-разному, $l_*(0)$ — длина свободной трещины при нулевой скорости, равная

$$l_*(0) = H \left(\frac{3\pi E^2 h^2}{8 K^2(0) H (1-\nu^2)} \right)^{1/4} \quad (\text{задача 1})$$

$$l_*(0) = H \left(\frac{3\pi E^2 h^2}{16 K^2(0) H (1-\nu^2)} \right)^{1/4} \quad (\text{задача 2}) \quad (3.2)$$

Уравнение (2.6) принимает вид

$$\alpha \frac{d^2 \Lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{\Lambda^3} - f \left(\frac{V}{v_1} + \frac{d\Lambda}{d\tau} \right) \Lambda \quad (3.3)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{3\pi}{1-v^2}} \frac{Eh}{2K(0) \sqrt{2H}} \quad (\text{задача 1})$$

$$\alpha = \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{3\pi}{1-v^2}} \frac{Eh}{4K(0) \sqrt{H}} \quad (\text{задача 2})$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.4)$$

Исследование уравнения (3.3) показывает, что, как и в [1], при $V > v_*$ стационарное расклинивание устойчиво по отношению к малым возмущениям. При $V < v_*$ стационарное расклинивание неустойчиво и имеет место автоколебательный режим распространения трещины. Вообще говоря, автоколебания могут быть двух типов — с остановками и без остановок конца трещины. Длина волны колебаний возрастает с ростом скорости клина. Для расчета возникающих автоколебаний нужно проводить численное интегрирование, задаваясь конкретным видом функции f . Исследование предельных случаев проводится вполне аналогично [1].

Известно, что при малых скоростях резания отделяющаяся стружка получается ребристой, причем система поперечных ребер оказывается близкой к периодической; ребра редуют при повышении скорости резания и совсем исчезают при скорости, большей некоторой критической. Не исключено, что это явление объясняется рассмотренным здесь автоколебательным процессом, связанным с колебаниями конца свободной трещины, образующейся перед резцом. При перенесении развитого здесь подхода на резание следует иметь в виду, что для тонких стружек плотность поверхностной энергии и модуль сцепления могут оказаться зависящими от толщины стружек, так как пластическая область вблизи конца трещины может пронизывать стружку насквозь.

Поступила 2 IX 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Салганик Р. Л. О расклинивании хрупких тел. Автоколебания при расклинивании. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 3.
2. O b r e i m o v I. V. The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc., 1930, A 127, 290—297.
3. B e n b o w J. J. and R o e s l e r F. C. Experiments on controlled fractures. Proc. Phys. Soc., 1957, B 70, 201—211.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Г. П. Черепанов (Москва)

Ниже предлагается упрощенная постановка некоторых задач о развитии трещин в твердых телах под воздействием интенсивных давлений. В качестве модели твердого тела используется идеальная жидкость; эта модель уже нашла широкое применение в гидродинамической теории кумуляции и взрыва [1, 2] и в акустической теории откола [3], где также имеют место весьма большие давления. Предлагаемая упрощенная постановка позволяет найти эффективное решение ряда задач, недоступных для исследования при более строгой постановке. Полученные решения могут иметь также самостоятельное значение в рамках идеальной жидкости.

§ 1. Гидродинамическая постановка некоторых статических задач о трещинах в твердых телах. 1°. Пусть твердое тело, покоящееся в начальный момент, подвергается воздействию весьма интенсивных массовых сил и поверхностных давлений в течение некоторого промежутка времени Δt . Примем в качестве модели твердого тела идеальную жидкость. По-видимому, это допущение оправдано для больших давлений. Допустим, кроме того, что

$$v \ll c, \quad v \Delta t \ll L \quad (1.1)$$