

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛИТЫ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

О. К. Аксентян, И. И. Ворович

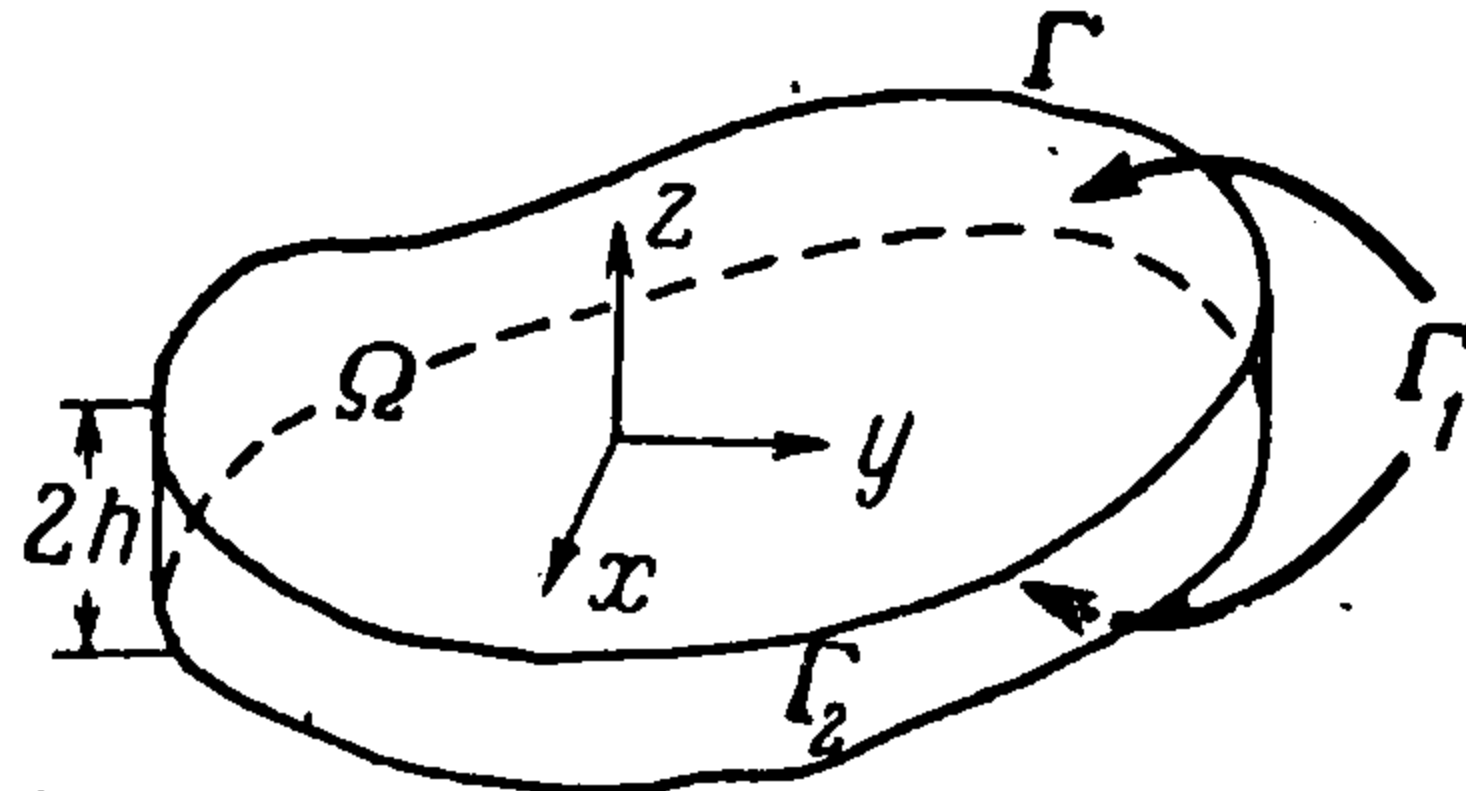
(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача теории упругости для плиты при заданных на границе напряжениях. Изучается поведение напряженного состояния при уменьшении толщины плиты.

Методы построения асимптотических процессов для этой задачи предлагались ранее А. Л. Гольденвейзером в докладе на I Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в 1960 г., а также в работах Фридрикса и Дресслера [1], Грина [2], Рейса [3], А. Л. Гольденвейзера [4].

Предлагаемый здесь метод сводит построение асимптотики к последовательному решению ряда бигармонических проблем, эквивалентных проблеме прикладной теории изгиба пластин, и обращению некоторой бесконечной матрицы. Указанная матрица не зависит от геометрии пластины и ее обращение должно быть сделано один раз для всех пластин и нагрузок.

§ 1. Рассмотрим плиту из изотропного однородного материала толщиной $2h$ (фиг. 1). Граница плиты состоит из двух плоскостей Γ_1 и цилиндрической поверхности Γ_2 . Будем предполагать, что граница Γ_1 свободна от усилий, а усилия, приложенные к Γ_2 , образуют статически эквивалентную нулю систему. Предположение о том, что Γ_1 свободна от усилий, вводится для упрощения. Эти напряжения всегда могут быть сняты решением соответствующей задачи для бесконечного слоя (см., например, книгу А. И. Лурье [5]). Причем для этих решений можно построить асимптотические разложения при малых h . Более сложным представляется поведение напряженного состояния, обусловленного усилиями на Γ_2 . Этот вопрос и составляет основное содержание статьи.



Фиг. 1

Авторы рассматривают здесь лишь алгоритм построения асимптотики, оставляя в стороне вопросы использования данного алгоритма и его обоснование. Все рассмотрения здесь проведены для случая изгиба плиты, хотя, разумеется, изложенный ниже метод применим и к общему случаю деформации плиты.

Будем исходить из соотношений работы А. И. Лурье [6]. Здесь показано, что при отсутствии усилий на Γ_1 напряженное состояние в плите при изгибе складывается из трех напряженных состояний, которые в дальнейшем будем именовать бигармоническим⁽¹⁾, вихревым⁽²⁾ и потенциальным⁽³⁾. Смысл этих наименований будет ясен ниже.

Бигармоническое напряженное состояние дается формулами

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \lambda a \left[(\nu + 1) \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi} \right] \\ v^{(1)} &= \lambda a \left[(\nu + 1) \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$w^{(1)} = -(\nu + 1) a \psi - (\nu - 1) \frac{\zeta^2}{2} a \lambda^2 \Delta \psi + 2\nu a \lambda^2 \Delta \psi$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)} &= 2\mu\nu\lambda^2 (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \xi}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = 2\mu\nu\lambda^2 (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \eta}, \quad \sigma_z^{(1)} = 0 \\ \sigma_x^{(1)} &= 2\mu\lambda \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (\nu - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right] \zeta - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \xi^2} \right\} \\ \sigma_y^{(1)} &= 2\mu\lambda \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + (\nu - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right] \zeta - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \eta^2} \right\} \\ \tau_{xy}^{(1)} &= 2\mu\lambda \left\{ (\nu + 1) \zeta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(\zeta = z/h, \xi = x/a, \eta = y/a, \lambda = h/a)$$

Здесь a — характерный линейный размер плиты в плоскости x, y ; ψ — некоторая бигармоническая функция переменных ξ, η ; μ — модуль сдвига; где σ — коэффициент Пуассона; Δ — оператор Лапласа.

Вихревое напряженное состояние дается соотношениями

$$u^{(2)} = 2\lambda^2 a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \frac{\partial B_k}{\partial \eta}, \quad v^{(2)} = -2\lambda^2 a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \frac{\partial B_k}{\partial \xi}, \quad w^{(2)} = 0 \quad (1.3)$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = 2\mu\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \cos \sigma_k \zeta \frac{\partial B_k}{\partial \eta}, \quad \tau_{yz}^{(2)} = -2\mu\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \cos \sigma_k \zeta \frac{\partial B_k}{\partial \xi}, \quad \sigma_z^{(2)} = 0$$

$$\sigma_x^{(2)} = -\sigma_y^{(2)} = 4\mu\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi \partial \eta} \quad (1.4)$$

$$\tau_{yz}^{(2)} = 2\mu\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi^2} \right)$$

Здесь $B_k(\xi, \eta)$ находятся из уравнений

$$\frac{\partial^2 B_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 B_k}{\partial \eta^2} - \frac{\sigma_k^2}{\lambda^2} B_k = 0, \quad \sigma_k = \frac{2k+1}{2} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

Потенциальное напряженное состояние дается формулами

$$u^{(3)} = \lambda a \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial \xi}, \quad v^{(3)} = \lambda a \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial \eta}, \quad w^{(3)} = -a \sum_{p=1}^{\infty} q_p(\zeta) C_p \quad (1.6)$$

$$\tau_{xz}^{(3)} = 2\mu \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial \xi}, \quad \tau_{yz}^{(3)} = 2\mu \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial \eta}$$

$$\sigma_z^{(3)} = \frac{2\mu}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta) C_p, \quad \tau_{xy}^{(3)} = 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial^2 C_p}{\partial \xi \partial \eta} \quad (1.7)$$

$$\sigma_x^{(3)} = 2\mu \left[\frac{\nu-1}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) C_p + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial^2 C_p}{\partial \xi^2} \right]$$

$$\sigma_y^{(3)} = 2\mu \left[\frac{\nu-1}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) C_p + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial^2 C_p}{\partial \eta^2} \right]$$

где

$$\begin{aligned} n_p(\zeta) &= \sin \gamma_p \zeta \left(v \sin \gamma_p + \frac{\cos \gamma_p}{\gamma_p} \right) + v \zeta \cos \gamma_p \cos \gamma_p \zeta \\ q_p(\zeta) &= \cos \gamma_p \zeta [(1 + v) \cos \gamma_p - v \gamma_p \sin \gamma_p] + v \gamma_p \zeta \cos \gamma_p \sin \gamma_p \zeta \\ s_p(\zeta) &= \gamma_p \cos \gamma_p \sin \gamma_p \zeta, \quad r_p(\zeta) = v \gamma_p (\sin \gamma_p \cos \gamma_p \zeta - \zeta \cos \gamma_p \sin \gamma_p \zeta) \\ t_p(\zeta) &= v \gamma_p^2 \left[\sin \gamma_p \zeta \left(\frac{\cos \gamma_p}{\gamma_p} - \sin \gamma_p \right) - \zeta \cos \gamma_p \cos \gamma_p \zeta \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

В формулах (1.6) — (1.7) $C_p(\xi, \eta)$ находятся из уравнений

$$\frac{\partial^2 C_p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C_p}{\partial \eta^2} - \frac{\gamma_p^2}{\lambda^2} C_p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

где $2\gamma_p$ — корни функции $\sin x / x - 1$.

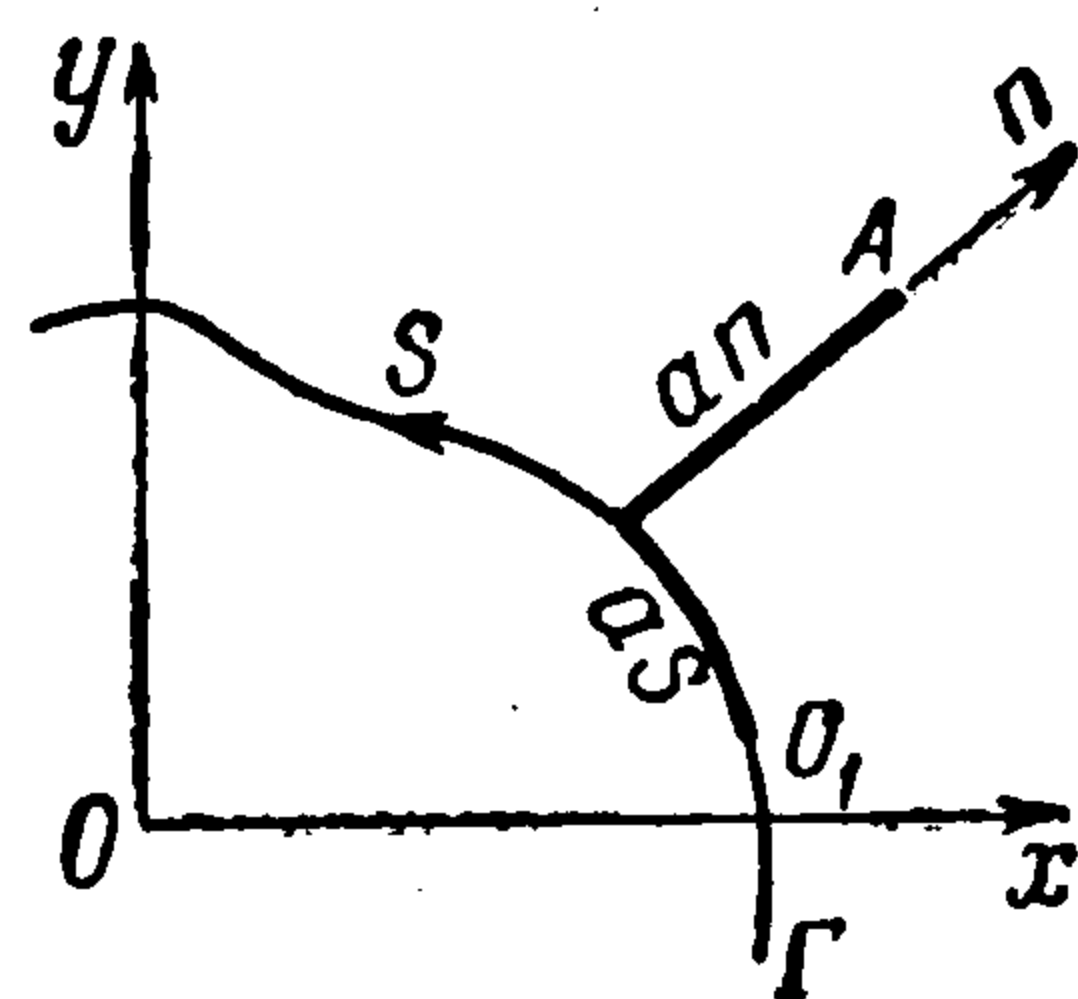
Суммирование в (1.6) — (1.7) ведется по корням γ_p , вещественная часть которых положительна. Формулы (1.3), (1.6) показывают, что перемещения u, v в вихревом случае будут составляющими ротора некоторой функции, а в потенциальном — градиента некоторой функции.

Поставленная задача о напряженном состоянии плиты была бы решена, если по заданным напряжениям на Γ_2 определить необходимые для полного нахождения ψ, B_k, C_p граничные задания. Это будет сделано ниже при помощи принципа возможных перемещений Лагранжа. Предварительно скажем несколько слов о степени произвола в определении ψ, B_k, C_p . Допустим, что все напряжения в плите равны нулю. В силу независимости напряженных состояний должны исчезать порознь бигармоническое, вихревое и потенциальное напряженные состояния. Если исчезает бигармоническое напряженное состояние, то из (1.2) имеем

$$2v \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (v - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad (v - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2v \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что при реально возможных значениях $v \psi$ имеет равными нулю все вторые производные и, следовательно, имеет вид: $\psi = k_1 \xi + k_2 \eta + k_3$. Легко видеть, что это соответствует попросту движению плиты как твердого тела. Чтобы в дальнейшем исключить это движение, при определении ψ примем

$$w^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \eta = \zeta = 0 \quad (1.11)$$



Фиг. 2

Аналогичное рассмотрение показывает, что B_k и C_p обращаются в нуль, если обращаются в нуль соответствующие напряжения. Таким образом, в определении B_k и C_p никакого произвола не получаем.

§ 2. Для дальнейшего потребуются некоторые формулы, характеризующие поведение решений уравнений (1.5) и (1.9) при малых h . Оба эти уравнения можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \Phi = 0, \quad \text{Re } \alpha > 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) рассмотрим при граничных условиях Дирихле. Для получения соотношений, характеризующих поставленную задачу при малых h , перейдем к местной системе безразмерных координат s, n (фиг. 2).

При этом уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \frac{R^2}{(R+an)^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{a}{R+an} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{anRR'_s}{(R+an)^3} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \Phi = 0 \quad (2.2)$$

где R — радиус кривизны контура Γ границы Γ_1 (фиг. 1).

Чтобы получить асимптотику решения (2.2) при $\lambda \rightarrow 0$, применим метод, изложенный в [7]. Для этого произведем растяжение вдоль нормали, положив $n = \lambda t$. При этом уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \frac{\lambda^2 R^2}{(R+a\lambda t)^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{a\lambda}{R+a\lambda t} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{at\lambda^3 RR'_s}{(R+a\lambda t)^3} - \alpha^2 \Phi = 0 \quad (2.3)$$

Будем искать решение (2.3) в виде

$$\Phi(s, t) = \chi(s, t) \exp at \quad (2.4)$$

Если подставить (2.4) в (2.3), то для $\chi(s, t)$ получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \frac{\lambda^2 R^2}{(R+a\lambda t)^2} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \left(2\alpha + \frac{a\lambda}{R+a\lambda t} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial s} \frac{at\lambda^3 RR'_s}{(R+a\lambda t)^3} + \chi \frac{\alpha a\lambda}{R+a\lambda t} = 0 \quad (2.5)$$

Положим, далее, что $\chi(s, t)$ дается рядом

$$\chi(s, t) = \chi_0(s, t) + \lambda \chi_1(s, t) + \lambda^2 \chi_2(s, t) + \dots \quad (2.6)$$

Из (2.5) получаем для $\chi_k(s, t)$ рекуррентную систему

$$\begin{aligned} \chi_{0tt} + 2\alpha \chi_{0t} &= 0, & \chi_{1tt} + 2\alpha \chi_{1t} &= -\frac{\alpha a \chi_0}{R} - \frac{1}{R} \chi_{0t} \\ \chi_{2tt} + 2\alpha \chi_{2t} &= -\chi_{0ss} - \frac{a}{R} \left(-\frac{at}{R} \chi_{0t} + \chi_{1t} - \frac{\alpha at}{R} \chi_{0t} + \alpha \chi_1 \right) \\ \chi_{3tt} + 2\alpha \chi_{3t} &= -\chi_{0st} \frac{aR'_s}{R^2} - \chi_{1ss} + 2t \frac{a}{R} \chi_{0ss} - \frac{a}{R} \left(\chi_{2t} - t \frac{a}{R} \chi_{1t} + \right. \\ &\quad \left. + t^2 \frac{a^2}{R^2} \chi_{0t} + \alpha \chi_2 - \alpha t \frac{a}{R} \chi_1 + \alpha t^2 \frac{a^2}{R^2} \chi_0 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.7) находим

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \chi_0(s), & \chi_1 &= -\frac{\chi_{0at}}{2R}, & \chi_2 &= \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{3\alpha a^2}{4R^2} \chi_{0t^2} - \chi_0'' t - \frac{a^2}{4R^2} \chi_{0t} \right) \\ \chi_3 &= \frac{1}{2\alpha} \left\{ -\frac{5\alpha a^3}{8R^3} \chi_{0t^3} + t^2 \left[\frac{3a}{2R} \chi_0'' - \frac{aR'}{R^2} \chi_0' + \frac{a\chi_0}{4R^3} (2R'^2 - RR'' + \frac{3}{2} a^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{2\alpha} \left[-\frac{2a}{R} \chi_0'' + \frac{2aR'}{R^2} \chi_0' - \frac{a}{2R^3} \chi_0 (2R'^2 - RR'' + a^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\chi_0(s)$ — некоторая, пока произвольная, достаточно гладкая функция, определяемая из граничного условия при $t = 0$. Пусть $\Phi(s, t)|_{\Gamma} = \varphi(s)$. В этом случае из (2.4), (2.6) и (2.8) вытекает $\chi_0(s) = \varphi(s)$.

Таким образом, для $\Phi(s, n)$ получаем асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \Phi(s, n) &= \left\{ \varphi - \frac{a}{2R} n\varphi + \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{3a^2\alpha}{4R^2} n^2\varphi - \frac{a^2}{4R^2} \lambda n\varphi - \lambda n\varphi'' \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{2\alpha} \left[-\frac{5a^3}{8R^3} \alpha n^3\varphi + \lambda n^2 \left(\frac{3a}{2R} \varphi'' - \frac{aR'}{R^2} \varphi' + a \frac{2R'^2 - RR'' + \frac{3}{2} a^2}{4R^3} \varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\lambda^2 n}{2\alpha} \left(-\frac{2a}{R} \varphi'' + \frac{2aR'}{R^2} \varphi' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{2R^3} \varphi \right) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\alpha n}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение (2.9) обладает тем свойством, что $\Phi \rightarrow 0$ при продвижении точки внутрь области ($n \rightarrow -\infty$). В дальнейшем потребуются выражения производных по нормали на контуре из (2.9) вытекает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \alpha \Phi - \frac{a}{2R} \Phi \lambda - \left[\frac{a^2}{2\alpha R^2} \Phi + \frac{\Phi''}{2\alpha} \right] \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{a}{2\alpha^2 R} \Phi'' + \frac{aR'}{2\alpha^2 R^2} \Phi' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{8\alpha^2 R^3} \Phi \right] \lambda^3 + \dots \right\} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \alpha^2 \Phi - \frac{\alpha a}{R} \Phi \lambda + \left[\frac{a^2}{2R^2} \Phi - \Phi'' \right] \lambda^2 + \left[\frac{a}{2\alpha R} \Phi'' + \frac{a^3}{8\alpha R^3} \Phi \right] \lambda^3 + \dots \right\}$$

Будем предполагать, что на границе $\Phi(s)$ представляется в виде ряда

$$\Phi(s) = \Phi_0(s) + \lambda \Phi_1(s) + \lambda^2 \Phi_2(s) + \dots \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda} \left\{ \alpha \Phi_0 + \lambda \left(\alpha \Phi_1 - \frac{a}{2R} \Phi_0 \right) + \lambda^2 \left[\alpha \Phi_2 - \frac{a}{2R} \Phi_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{a^2}{8\alpha R^2} \Phi_0 - \frac{\Phi_0''}{2\alpha} \right) \right] + \lambda^3 \left[\alpha \Phi_3 - \frac{a}{2R} \Phi_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{a^2}{8\alpha R^2} \Phi_1 + \frac{\Phi_1''}{2\alpha} \right) + \left(-\frac{a}{2\alpha^2 R} \Phi_0'' + \frac{aR'}{2\alpha^2 R^2} \Phi_0' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{8\alpha^2 R^3} \Phi_0 \right) \right] + \dots \right\} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \alpha^2 \Phi_0 + \lambda \left(\alpha^2 \Phi_1 - \frac{\alpha a}{R} \Phi_0 \right) + \lambda^2 \left[\alpha^2 \Phi_2 - \frac{\alpha a}{R} \Phi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{a^2}{2R^2} \Phi_0 - \Phi_0'' \right) \right] + \right. \\ \left. + \lambda^3 \left[\alpha^2 \Phi_3 - \frac{\alpha a}{R} \Phi_2 + \left(\frac{a^2}{2R^2} \Phi_1 - \Phi_1'' \right) + \left(\frac{a}{2\alpha R} \Phi_0'' + \frac{a^3}{8\alpha R^3} \Phi_0 \right) \right] + \dots \right\} \quad (2.13)$$

§ 3. Уточним теперь предположения относительно внешней нагрузки и контура Γ . Будем считать, что в каждой точке Γ_2 задана система усилий $N(z, s)$, $T(z, s)$, $Z(z, s)$ (фиг. 3). Запишем условия равенства нулю момента этой системы сил относительно осей x, y . Имеем

$$\oint_{\Gamma} \int_{-h}^h [-Tz \cos nx - Nz \sin nx + Zy] dz ds = 0 \\ \oint_{\Gamma} \int_{-h}^h [-Tz \sin nx + Nz \cos nx - Zx] dz ds = 0 \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что Z должно иметь относительно $\lambda = h/a$ порядок на единицу больший, чем T и N .

Введем следующие статические характеристики внешней нагрузки:

$$\int_{-h}^h Nz dz = h^2 M_1(s), \quad \int_{-h}^h Nz^3 dz = h^4 M_3(s), \quad \int_{-h}^h Tz dz = h^2 G_1(s) \\ \int_{-h}^h Tz^3 dz = h^4 G_3(s), \quad \int_{-1}^1 T \frac{\sin \sigma_m \xi}{\sigma_m} d\xi = T_m(s) \quad (3.2) \\ \int_{-h}^h Z dz = h Q_0(s), \quad \int_{-h}^h Zz^2 dz = h^3 Q_2(s), \quad \int_{-1}^1 N \frac{\sin \sigma_m \xi}{\sigma_m} d\xi = N_m(s) \\ \int_{-1}^1 N n_t(\xi) d\xi = N_t(s), \quad \int_{-1}^1 T n_t(\xi) d\xi = T_t(s), \quad \int_{-1}^1 Z q_t(\xi) d\xi = Z_t(s)$$

Предположим, что все эти статические характеристики могут быть представлены в виде рядов по степеням λ . При этом, очевидно, для M_1 естественным будет разложение

$$M_1(s) = \lambda M_{11}(s) + \lambda^2 M_{12}(s) + \lambda^3 M_{13}(s) + \dots \quad (3.3)$$

Очевидно, такого же вида разложения будут естественны для $M_3, G_1, G_3, N_m, T_m, N_t, T_t$. Разложения для Q_0, Q_2, Z_t будут начинаться с членов второго порядка. Будем, далее, считать, что все эти функции имеют достаточное количество производных по s .

Предположим также, что контур Γ ограничивает односвязную область Ω , является достаточно гладким, и пусть радиус кривизны R контура Γ как функция s имеет достаточное число производных.

§ 4. Определим граничные условия для ψ, B_k и C_p , используя то обстоятельство, что на границе плиты известны напряжения. Будем исходить из принципа возможных перемещений Лагранжа, который в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\delta \iiint_V W dx dy dz - \int_{\Gamma_2} (N \delta u_n + T \delta u_s + Z \delta w) d\sigma = 0 \quad (4.1)$$

где u_n, u_s — составляющие перемещений в осях n, s .

Будем искать деформированное состояние плиты в виде

$$\begin{aligned} u &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} \\ v &= v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} \\ w &= w^{(1)} + w^{(2)} + w^{(3)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

принимая за обобщенные перемещения значения функций ψ, B_k, C_p и значение нормальной производной функции ψ на Γ . Подставим (4.2) в (4.1) и учтем, что перемещения (4.2) должны быть точными решениями уравнений теории упругости. Как известно [8], объемный интеграл в

левой части (4.1) в этом случае превратится в поверхностный

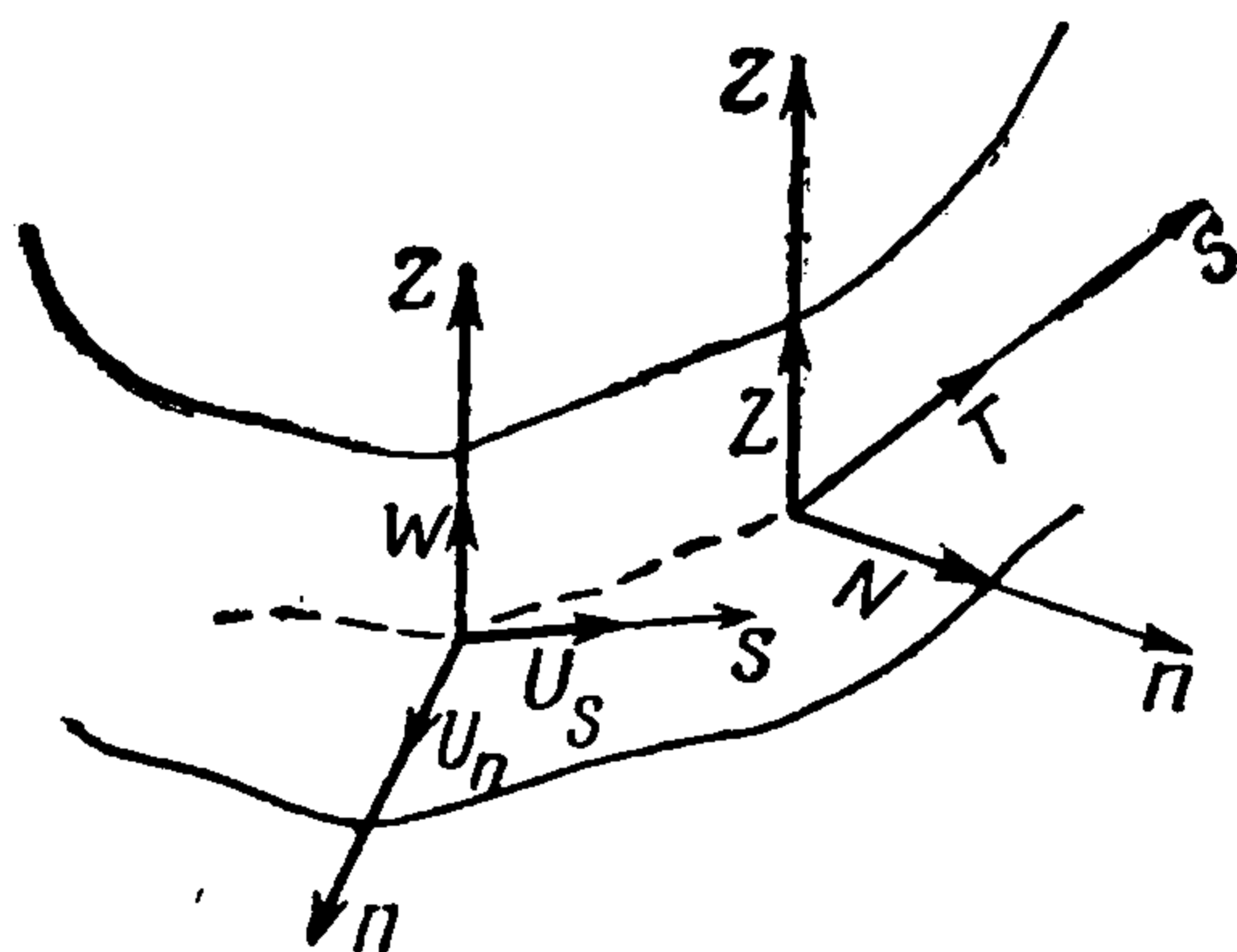
$$\iint_{\Gamma_2} (\sigma_n \delta u_n + \tau_{ns} \delta u_s + \tau_{nz} \delta w) d\sigma = \iint_{\Gamma_2} (N \delta u_n + T \delta u_s + Z \delta w) d\sigma \quad (4.3)$$

где $\sigma_n, \tau_{ns}, \tau_{nz}, u_n, u_s$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} + \sigma_x^{(3)}) l^2 + (\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} + \sigma_y^{(3)}) m^2 + \\ &\quad + 2(\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} + \tau_{xy}^{(3)}) lm \\ \tau_{ns} &= (\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} + \tau_{xy}^{(3)}) (l^2 - m^2) + (\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} + \\ &\quad + \sigma_y^{(3)} - \sigma_x^{(1)} - \sigma_x^{(2)} - \sigma_x^{(3)}) lm \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\tau_{nz} = (\tau_{xz}^{(1)} + \tau_{xz}^{(2)} + \tau_{xz}^{(3)}) l + (\tau_{yz}^{(1)} + \tau_{yz}^{(2)} + \tau_{yz}^{(3)}) m$$

$$\begin{aligned} u_n &= (u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}) l + (v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}) m \\ u_s &= -(u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}) m + (v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}) l \end{aligned} \quad (4.5)$$



Фиг. 3

В (4.4) все стоящие в правых частях напряжения следует взять из (1.2), (1.4), (1.7), а в (4.5) — перемещения из (1.1), (1.3), (1.6). При этом получим

$$\begin{aligned} \sigma_n = & 2\mu\lambda \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial n} + n \frac{aR'}{R^2} \frac{1}{H^3} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right] \zeta - \right. \\ & \left. - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} \right\} + 4\mu\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial B_k}{\partial s} \right) + \\ & + 2\mu \left[\frac{\nu - 1}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) C_p + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \right] \\ \tau_{ns} = & 2\mu\lambda \left\{ (\nu + 1) \zeta \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial s} - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^2 \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n \partial s} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} \right) \right\} + 2\mu\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 B_k}{\partial s^2} + \frac{1}{H} \frac{a}{R} \frac{\partial B_k}{\partial n} + \right. \\ & \left. + n \frac{aR'}{R^2} \frac{1}{H^3} \frac{\partial B_k}{\partial s} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \right) + 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial C_p}{\partial s} \right) \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\tau_{nz} = 2\mu\nu\lambda^2(1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + 2\mu\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \cos \sigma_k \zeta \frac{\partial B_k}{\partial s} + 2\mu \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial n}$$

$$\begin{aligned} u_n = & (\nu + 1) a\lambda\zeta \frac{\partial \psi}{\partial n} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^3 a \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + \\ & + 2\lambda^2 a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \frac{1}{H} \frac{\partial B_k}{\partial s} + \lambda a \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{\partial C_p}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_s = & (\nu + 1) a\lambda\zeta \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial s} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\zeta^3}{2} \lambda^3 a \frac{1}{H} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} - \quad \left(H=1 + n \frac{a}{R} \right) \\ & - 2\lambda^2 a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \sigma_k \zeta}{\sigma_k} \frac{\partial B_k}{\partial n} + \lambda a \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \frac{1}{H} \frac{\partial C_p}{\partial s} \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$w = -(\nu + 1) a\psi - (\nu - 1) \frac{\zeta^2}{2} \lambda^2 a \Delta \psi + 2\nu\lambda^2 a \Delta \psi - a \sum_{p=1}^{\infty} q_p(\zeta) C_p$$

Значения функций $B_k(s, n)$ и $C_p(s, n)$ на Γ обозначим соответственно $b_k(s)$ и $c_p(s)$. Будем в уравнении (4.3) варьировать только граничное значение ψ , положив $\delta b_k = \delta c_p = 0$. В этом случае получим

$$\begin{aligned} & 2\mu \oint_{\Gamma} ds \left\{ A\delta \frac{\partial \psi}{\partial n} + B\delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + C\delta \frac{\partial \psi}{\partial s} + D\delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} + E\delta \psi + F\delta \Delta \psi \right\} = \\ & = \oint_{\Gamma} ds \left\{ (\nu + 1) \lambda M_1 \delta \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 M_3 \delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + (\nu + 1) \lambda G_1 \delta \frac{\partial \psi}{\partial s} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 G_3 \delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} - (\nu + 1) Q_0 \delta \psi + \lambda^2 \left(\frac{\nu - 1}{2} Q_2 + 2\nu Q_0 \right) \delta \Delta \psi \right\} \quad (4.8) \end{aligned}$$

где

$$A = \left\{ \frac{2}{3} (\nu + 1) \lambda^2 \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) (\nu + 1) \lambda^4 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} + 4 (\nu + 1) \lambda^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^3} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial b_k}{\partial s} \right) + \right. \\ \left. + 2 (\nu^2 - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \sin^2 \gamma_p \left(c_p - \frac{\lambda^2}{\gamma_p^2} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \right) \right\}_{n=0} \quad (4.9)$$

$$B = \left\{ - \frac{1}{5} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{14} \left(\nu + \frac{1}{3} \right)^2 \lambda^6 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} - 2 \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (3\sigma_k^2 - 6)}{\sigma_k^5} \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial b_k}{\partial s} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \nu) \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_p^2 - 6}{\gamma_p^2} \sin^2 \gamma_p + 2 \right) \left(c_p - \frac{\lambda^2}{\gamma_p^2} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \right) - \right. \\ \left. - 12\nu \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^4} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \right\}_{n=0} \quad (4.10)$$

$$C = \left\{ \frac{2}{3} (\nu + 1)^2 \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \frac{1}{5} (\nu + 1) \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} \right) + \right. \\ \left. + 2 (\nu + 1) \lambda^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^3} \left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial B_k}{\partial n} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 (\nu^2 - 1) \lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^2} \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) \right\}_{n=0} \quad (4.11)$$

$$D = \left\{ - \frac{1}{5} (\nu + 1) \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{14} \left(\nu + \frac{1}{3} \right)^2 \lambda^6 \left(\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} \right) - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^5 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial s^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{R} \frac{\partial B_k}{\partial n} - \frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} \right) \frac{3\sigma_k^2 - 6}{\sigma_k^5} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_p^2} \left[\left(\frac{\gamma_p^2 - 6}{\gamma_p^2} \sin^2 \gamma_p + 2 \right) (1 - \nu) + \right. \right. \\ \left. \left. + 12\nu \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^2} \right] \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) \right\}_{n=0} \quad (4.12)$$

$$E = - \frac{4}{3} \nu (\nu + 1) \lambda^2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} \Big|_{n=0} - 2 (\nu + 1) \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k} \frac{\partial b_k}{\partial s} \quad (4.13)$$

$$F = \left\{ \frac{2}{15} \nu (19\nu + 1) \lambda^4 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + \lambda^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left[4\nu - (\nu - 1) \frac{\sigma_k^2 - 2}{\sigma_k^2} \right] \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k} \frac{\partial b_k}{\partial s} - \right. \\ \left. - 4\nu (\nu - 1) \lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p^2} \frac{\partial C_p}{\partial n} \right\}_{n=0} \quad (4.14)$$

Интегрированием некоторых членов по частям соотношению (4.8) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & 2\mu \oint_{\Gamma} ds \left\{ A \delta \frac{\partial \psi}{\partial n} + B \delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} + \left(E - \frac{\partial C}{\partial s} \right) \delta \psi + \left(F - \frac{\partial D}{\partial s} \right) \delta \Delta \psi \right\} = \\
 & = \oint_{\Gamma} ds \left\{ (\nu + 1) \lambda M_1 \delta \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 M_3 \delta \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} - (\nu + 1) \left(Q_0 + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s} \right) \delta \psi + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\lambda^2 \left(\frac{\nu - 1}{2} Q_2 + 2\nu Q_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \frac{\partial G_3}{\partial s} \right] \delta \Delta \psi \right\} \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Предполагаем, что в вариационном уравнении (4.15) $\psi|_{\Gamma}$ и $\partial\psi/\partial n|_{\Gamma}$ независимы. Так как ψ — бигармоническая функция, то $\Delta\psi$ и $\partial\Delta\psi/\partial n$ на Γ выражаются через $\psi|_{\Gamma}$ и $\partial\psi/\partial n|_{\Gamma}$. Конкретно это выражение можно осуществить следующим образом: известно, что всякая бигармоническая функция определяется своим значением и значением нормальной производной на граничном контуре формулой

$$\psi(P) = \oint_{\Gamma} K_1(P, Q) \psi(Q) dQ + \oint_{\Gamma} K_2(P, Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(Q) dQ \quad (4.16)$$

Здесь K_1 и K_2 выражаются через функцию Грина $G(P, Q)$ первой краевой задачи для бигармонического уравнения. Из (4.16) можно получить

$$\Delta\psi|_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} K_{11}(s, \sigma) \psi(\sigma, 0) d\sigma + \oint_{\Gamma} K_{12}(s, \sigma) \frac{\partial \psi(\sigma, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} d\sigma \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta\psi|_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} K_{21}(s, \sigma) \psi(\sigma, 0) d\sigma + \oint_{\Gamma} K_{22}(s, \sigma) \frac{\partial \psi(\sigma, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} d\sigma \quad (4.18)$$

При этом функции K_{ij} выписываются через производные от $G(P, Q)$ и содержат дельта-функцию от s, σ и ее производные, что, однако, для наших рассуждений в дальнейшем не будет существенно. Из (4.17) и (4.18) можно выразить вариации $\delta\Delta\psi|_{\Gamma}$ и $\delta[\partial\Delta\psi/\partial n]_{\Gamma}$ через $\delta\psi|_{\Gamma}$ и $\delta[\partial\psi/\partial n]_{\Gamma}$.

При этом формула (4.15) примет вид

$$\begin{aligned}
 & 2\mu \oint_{\Gamma} \left\{ A(s) \delta \frac{\partial \psi(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} + \left[E(s) - \frac{\partial C(s)}{\partial s} \right] \delta \psi(s, 0) \right\} ds + \\
 & + 2\mu \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left\{ B(s) K_{21}(s, \sigma) + \left[F(s) - \frac{\partial D(s)}{\partial s} \right] K_{11}(s, \sigma) \right\} \delta \psi(\sigma, 0) ds d\sigma + \\
 & + 2\mu \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left\{ B(s) K_{22}(s, \sigma) + \left[F(s) - \frac{\partial D(s)}{\partial s} \right] K_{12}(s, \sigma) \right\} \delta \frac{\partial \psi(\sigma, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} ds d\sigma = \\
 & = \oint_{\Gamma} \left\{ (\nu + 1) \lambda M_1(s) \delta \frac{\partial \psi(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} - (\nu + 1) \left[Q_0(s) + \lambda \frac{\partial G_1(s)}{\partial s} \right] \delta \psi(s, 0) \right\} ds + \\
 & + \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 M_3(s) K_{21}(s, \sigma) + \left[\frac{\nu - 1}{2} \lambda^2 Q_2(s) + 2\nu \lambda^2 Q_0(s) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \frac{\partial G_3(s)}{\partial s} \right] K_{11}(s, \sigma) \right\} \delta \psi(\sigma, 0) ds d\sigma + \\
 & + \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 M_3(s) K_{22}(s, \sigma) + \left[\frac{\nu - 1}{2} \lambda^2 Q_2(s) + 2\nu \lambda^2 Q_0(s) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \frac{\partial G_3(s)}{\partial s} \right] K_{12}(s, \sigma) \right\} \delta \frac{\partial \psi(\sigma, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} ds d\sigma \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Если теперь в двойных интегралах поменять порядок интегрирования, приравнять в правой и левой частях (4.19) коэффициенты соответственно при $\delta [\partial\psi(s, n) / \partial n]_{n=0}$ и $\delta\psi(s, 0)$, получим два следующих функциональных уравнения для определения граничных значений ψ , $\partial\psi / \partial n$, B_k и C_p

$$\begin{aligned}
 A(s) + \oint_{\Gamma} B(\sigma) K_{22}(\sigma, s) d\sigma + \oint_{\Gamma} \left[F(\sigma) - \frac{\partial D(\sigma)}{\partial \sigma} \right] K_{12}(\sigma, s) d\sigma = & \quad (4.20) \\
 = \frac{1}{2\mu} (\nu + 1) \lambda M_1(s) - \frac{1}{4\mu} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \oint_{\Gamma} M_3(\sigma) K_{22}(\sigma, s) d\sigma + \\
 + \frac{1}{2\mu} \oint_{\Gamma} K_{12}(\sigma, s) \left\{ \lambda^2 \left[\frac{\nu-1}{2} Q_2(\sigma) + 2\nu Q_0(\sigma) \right] + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \frac{\partial G_3(\sigma)}{\partial \sigma} \right\} d\sigma \\
 E(s) - \frac{\partial C(s)}{\partial s} + \oint_{\Gamma} B(\sigma) K_{21}(\sigma, s) d\sigma + \oint_{\Gamma} \left[F(\sigma) - \frac{\partial D(\sigma)}{\partial \sigma} \right] K_{11}(\sigma, s) d\sigma = \\
 = -\frac{\nu+1}{2\mu} \left[Q_0(s) + \lambda \frac{\partial G_1(s)}{\partial s} \right] - \frac{1}{4\mu} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \oint_{\Gamma} M_3(\sigma) K_{21}(\sigma, s) d\sigma + \\
 + \frac{1}{2\mu} \oint_{\Gamma} K_{11}(\sigma, s) \left\{ \lambda^2 \left[\frac{\nu-1}{2} Q_2(\sigma) + 2\nu Q_0(\sigma) \right] + \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^3 \frac{\partial G_3(\sigma)}{\partial \sigma} \right\} d\sigma
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

§ 5. Предположим теперь, что варьирование всех величин, входящих в уравнение (4.3), осуществляется только за счет варьирования граничного значения B_m . Отметим, что входящие в вариационное уравнение $\delta [\partial B_m / \partial n]_{\Gamma}$ выражаем через δb_m по соотношению (2.10). Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{2\lambda^2}{\sigma_m^3} (-1)^{m+1} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial s \partial n^2} \lambda + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial s^3} - \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial n} \right) \lambda - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{3\sigma_m^2 - 6}{\sigma_m^2} \lambda^3 \frac{\partial^3 \Delta \psi}{\partial s \partial n^2} \right\}_{n=0} + & \quad (5.1) \\
 + \frac{2\lambda^2}{\sigma_m^3} (-1)^{m+1} \left\{ \left[\sigma_m - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\sigma_m} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left[(\nu + 1) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{3\sigma_m^2 - 6}{\sigma_m^2} \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} \right) \right] \right\}_{n=0} + \\
 + \frac{\lambda^3}{\sigma_m^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^3 B_m}{\partial s^2 \partial n} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial b_m}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 b_m}{\partial s^2} \right) \lambda + \right. \\
 \left. + \left[\sigma_m - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\sigma_m} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left[\frac{\partial^2 b_m}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 B_m}{\partial n^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial B_m}{\partial n} \right] \right\}_{n=0} - \\
 - \frac{2\lambda^2 (-1)^{m+1}}{\sigma_m} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \left\{ \frac{\nu-1}{\lambda} \gamma_p^2 \frac{\partial c_p}{\partial s} + \left(1 - \nu \frac{\gamma_p^2 + \sigma_m^2}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \right) \frac{\partial^3 C_p}{\partial s \partial n^2} \lambda + \right. \\
 \left. + \left(1 - \nu \frac{\gamma_p^2 + \sigma_m^2}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \right) \left[\sigma_m - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\sigma_m} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left(\frac{\partial^2 C_p}{\partial n \partial s} - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{a}{R} \frac{\partial c_p}{\partial s} \right) \right\}_{n=0} = \frac{\lambda}{2\mu} \left\{ \lambda \frac{\partial N_m}{\partial s} + \left[\sigma_m - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\sigma_m} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] T_m \right\} \\
 (m = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Если аналогично в уравнении (4.3) считать отличной от нуля δc_t , получим следующее функциональное уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 2(1 - \nu^2) \lambda^4 \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t^2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial s^2 \partial n} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\lambda^6}{\gamma_t^2} \left[\left(\frac{\gamma_t^2 - 6}{\gamma_t^2} \sin^2 \gamma_t + 2 \right) (1 - \nu) + 12\nu \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t^2} \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{\partial^3 \Delta \psi}{\partial s^2 \partial n} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial s^2} \right) + 12\nu \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \lambda^4 \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t^2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} \right\}_{n=0} - \\
 & - \left[\gamma_t - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\gamma_t} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \right] \times \right. \\
 & \times 2(1 - \nu) \lambda^3 \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t^2} - \left(\nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\lambda^5}{\gamma_t^2} \left[\left(\frac{\gamma_t^2 - 6}{\gamma_t^2} \sin^2 \gamma_t + 2 \right) (1 - \nu) + \right. \\
 & \left. + 12\nu \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t^2} \right] \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial n^2} \left. \right\}_{n=0} - 2\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos^2 \gamma_t}{\sigma_k (\gamma_t^2 - \sigma_k^2)} \left\{ \left(1 - \nu \frac{\gamma_t^2 + \sigma_k^2}{\gamma_t^2 - \sigma_k^2} \right) \lambda^3 \times \right. \\
 & \times \left(\frac{\partial^3 b_k}{\partial s^3} - \frac{\partial^3 B_k}{\partial s \partial n^2} - \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial B_k}{\partial n} + \frac{a}{R} \frac{\partial^2 B_k}{\partial s \partial n} \right) + \\
 & + \sigma_k^2 \left(1 - \nu \frac{\sigma_k^2 - 3\gamma_t^2}{\gamma_t^2 - \sigma_k^2} \right) \lambda \frac{\partial b_k}{\partial s} - 2\lambda^2 \left(1 - \nu \frac{\gamma_t^2 + \sigma_k^2}{\gamma_t^2 - \sigma_k^2} \right) \times \\
 & \times \left[\gamma_t - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\gamma_t} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left(\frac{\partial^2 B_k}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial b_k}{\partial s} \right) \left. \right\}_{n=0} + \\
 & + 2\lambda \sum_{p=1(p \neq t)}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \gamma_t^2} \left\{ \lambda^3 \left[1 - \nu^2 - 8\nu^2 \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2} \right] \times \right. \\
 & \times \left(\frac{\partial^3 C_p}{\partial s^2 \partial n} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial c_p}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 c_p}{\partial s^2} \right) - 2\nu\lambda \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2}{\gamma_t^2 - \gamma_p^2} \left(1 + \nu \frac{\gamma_p^2 + 3\gamma_t^2}{\gamma_t^2 - \gamma_p^2} \right) \frac{\partial C_p}{\partial n} - \\
 & - \left[\gamma_t - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\gamma_t} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \left[(\nu - 1) \gamma_p^2 \left(1 - \nu \frac{\gamma_t^2 + \gamma_p^2}{\gamma_t^2 - \gamma_p^2} \right) c_p + \right. \\
 & \left. + \lambda^2 \left(1 - \nu^2 - 8\nu^2 \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2} \right) \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} \right]_{n=0} + \\
 & + \nu\lambda \left\{ \lambda^3 \left(\nu + 2 - \frac{2}{3} \nu \cos^2 \gamma_t \right) \left(\frac{\partial^3 C_t}{\partial s^2 \partial n} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial c_t}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 c_t}{\partial s^2} \right) + \right. \\
 & + \lambda\gamma_t^2 \left(1 + \frac{2}{3} \nu \cos^2 \gamma_t \right) \frac{\partial C_t}{\partial n} - \left[\gamma_t - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\gamma_t} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] \times \\
 & \times \left[(\nu - 1) \gamma_t^2 c_t + \lambda^2 \left(\nu + 2 - \frac{2}{3} \nu \cos^2 \gamma_t \right) \frac{\partial^2 C_t}{\partial n^2} \right] \left. \right\}_{n=0} = \\
 & = \frac{\lambda^2}{2\mu} \left\{ \lambda \frac{\partial T_t}{\partial s} + Z_t - \left[\gamma_t - \frac{a\lambda}{2R} - \frac{\lambda^2}{2\gamma_t} \left(\frac{a^2}{4R^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \dots \right] N_t \right\} \quad (t = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Таким образом, полагая в уравнениях (5.1) — (5.2) $m = 0, 1, 2, \dots$; $t = 1, 2, 3, \dots$, получим дополнительно две счетные системы функциональных уравнений, которые вместе с (4.20) и (4.21) образуют систему

из $2\infty + 2$ уравнений с таким же числом неизвестных, которыми будут $\psi|_{\Gamma}$, $\partial\psi/\partial n|_{\Gamma}$, b_k , c_p .

§ 6. Вернемся теперь к вопросу об определении граничных значений ψ , $\partial\psi/\partial n$, B_k , C_p . Будем искать ψ , b_k , c_p в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned}\psi(s, n) &= \psi_0(s, n) + \lambda\psi_1(s, n) + \lambda^2\psi_2(s, n) + \dots \\ b_k(s) &= b_{k0}(s) + \lambda b_{k1}(s) + \lambda^2 b_{k2}(s) + \dots \\ c_p(s) &= c_{p0}(s) + \lambda c_{p1}(s) + \lambda^2 c_{p2}(s) + \dots\end{aligned}\quad (6.1)$$

Тогда в соответствии с формулами (2.13) — (2.14) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_p}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \gamma_p c_{p0} + \lambda \left(\gamma_p c_{p1} - \frac{a}{2R} c_{p0} \right) + \lambda^2 \left[\gamma_p c_{p2} - \frac{a}{2R} c_{p1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{a^2}{8\gamma_p R^2} c_{p0} + \frac{c_{p0}''}{2\gamma_p} \right) \right] + \lambda^3 \left[\gamma_p c_{p3} - \frac{a}{2R} c_{p2} - \left(\frac{a^2}{8\gamma_p R^2} c_{p1} + \frac{c_{p1}''}{2\gamma_p} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\frac{a}{2\gamma_p^2 R} c_{p0}'' + \frac{aR'}{2\gamma_p^2 R^2} c_{p0}' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{8\gamma_p^2 R^3} c_{p0} \right) \right] + \dots \right\}\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \gamma_p^2 c_{p0} + \lambda \left(\gamma_p^2 c_{p1} - \frac{\gamma_p a}{R} c_{p0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left[\gamma_p^2 c_{p2} - \frac{\gamma_p a}{R} c_{p1} + \left(\frac{a^2}{2R^2} c_{p0} - c_{p0}'' \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^3 \left[\gamma_p^2 c_{p3} - \frac{\gamma_p a}{R} c_{p2} + \left(\frac{a^2}{2R^2} c_{p1} - c_{p1}'' \right) + \left(\frac{a}{2\gamma_p R} c_{p0}'' + \frac{a^3}{8\gamma_p R^3} c_{p0} \right) \right] + \dots \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_k}{\partial n}\Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sigma_k b_{k0} + \lambda \left(\sigma_k b_{k1} - \frac{a}{2R} b_{k0} \right) + \lambda^2 \left[\sigma_k b_{k2} - \frac{a}{2R} b_{k1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{a^2}{8\sigma_k R^2} b_{k0} + \frac{b_{k0}''}{2\sigma_k} \right) \right] + \lambda^3 \left[\sigma_k b_{k3} - \frac{a}{2R} b_{k2} - \left(\frac{a^2}{8\sigma_k R^2} b_{k1} + \frac{b_{k1}''}{2\sigma_k} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\frac{a}{2\sigma_k^2 R} b_{k0}'' + \frac{aR'}{2\sigma_k^2 R^2} b_{k0}' - a \frac{2R'^2 - RR'' + a^2}{8\sigma_k^2 R^3} b_{k0} \right) \right] + \dots \right\}\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \sigma_k^2 b_{k0} + \lambda \left(\sigma_k^2 b_{k1} - \frac{\sigma_k a}{R} b_{k0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left[\sigma_k^2 b_{k2} - \frac{\sigma_k a}{R} b_{k1} + \left(\frac{a^2}{2R^2} b_{k0} - b_{k0}'' \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^3 \left[\sigma_k^2 b_{k3} - \frac{\sigma_k a}{R} b_{k2} + \left(\frac{a^2}{2R^2} b_{k1} - b_{k1}'' \right) + \left(\frac{a}{2\sigma_k R} b_{k0}'' + \frac{a^3}{8\sigma_k R^3} b_{k0} \right) \right] + \dots \right\}\end{aligned}$$

Если теперь подставить (6.1) — (6.3) и разложения вида (3.3) в систему (4.20), (4.21), (5.1), (5.2) и сгруппировать члены при одинаковых степенях λ , то система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}P_1\lambda + P_2\lambda^2 + P_3\lambda^3 + \dots &= 0, & R_1\lambda + R_2\lambda^2 + R_3\lambda^3 + \dots &= 0 \\ S_{m1}\lambda + S_{m2}\lambda^2 + S_{m3}\lambda^3 + \dots &= 0 & (m=0, 1, 2, \dots) & \\ T_{t1}\lambda + T_{t2}\lambda^2 + T_{t3}\lambda^3 + \dots &= 0 & (t=1, 2, \dots) &\end{aligned}\quad (6.4)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при соответствующих степенях λ в левых частях (6.4), получим рекуррентные системы, из которых после-

довательно найдутся все ψ_i , b_{mi} , c_{ti} . В первом приближении имеем

$$P_1 = 2(v^2 - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \frac{a}{R} c_{p0} - 4v(v-1) \times \quad (6.5)$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p0}(\sigma) K_{12}(\sigma, s) d\sigma = 0$$

$$R_1 = 2(v^2 - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p0}'' - 4v(v-1) \times \quad (6.6)$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p0}(\sigma) K_{11}(\sigma, s) d\sigma = 0$$

$$S_{m1} = -\sigma_m b_{m0} - \frac{2(-1)^{m+1}}{\sigma_m} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \left\{ (v-1) \gamma_p^2 c_{p0}' + \quad (6.7)$$

$$+ \left(1 - v \frac{\gamma_p^2 + \sigma_m^2}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \right) (\gamma_p^2 + \sigma_m \gamma_p) c_{p0}' \right\} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$T_{t1} = -4v \sum_{p=1(p \neq t)}^{\infty} \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2 (\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p)}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2 (\gamma_t - \gamma_p)} [(v-1)(\gamma_p^2 + \gamma_t^2) + \quad (6.8)$$

$$+ 2(v+1)\gamma_p \gamma_t] c_{p0} + 2v^2 \gamma_t^3 \left(\frac{2}{3} \cos^2 \gamma_t - 1 \right) c_{t0} = 0 \quad (t=1, 2, \dots)$$

Более детальное исследование системы (6.8) показывает, что она имеет только нулевое решение $c_{t0} \equiv 0$, если интересоваться решениями, приводящими к физически осмысленным напряженным и деформированным состояниям. Тогда из (6.7) получаем: $b_{m0} \equiv 0$. При этом будут удовлетворены и уравнения (6.5), (6.6).

Приравнявая коэффициенты при λ^2 , получаем следующие соотношения:

$$P_2 = \frac{2(v+1)}{3} \left[2v \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} + (v-1) \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right) \right]_{n=0} + \quad (6.9)$$

$$+ 2(v^2-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \frac{a}{R} c_{p1} -$$

$$- 4v(v-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p1}(\sigma) K_{12}(\sigma, s) d\sigma - \frac{v+1}{2\mu} M_{11} = 0$$

$$R_2 = -\frac{2}{3}(v+1) \left[2v \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} + (v+1) \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial n \partial s^2} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} \right) \right]_{n=0} + \quad (6.10)$$

$$+ 2(v^2-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p1}'' - 4v(v-1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p1}(\sigma) K_{11}(\sigma, s) d\sigma +$$

$$+ \frac{v+1}{2\mu} \left(Q_{02} + \frac{\partial G_{11}}{\partial s} \right) = 0$$

$$S_{m2} = \frac{2(-1)^{m+1}(v+1)}{\sigma_m^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right)_{n=0} - \sigma_m b_{m1} - \quad (6.11)$$

$$- \frac{2(-1)^{m+1}}{\sigma_m} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \left\{ (v-1) \gamma_p^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1 - v \frac{\gamma_p^2 + \sigma_m^2}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \right) (\gamma_p^2 + \sigma_m \gamma_p) \right\} c_{p1}' - \frac{\sigma_m}{2\mu} T_{m1} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$T_{t2} = -4\nu \sum_{p=1(p \neq t)}^{\infty} \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2 (\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p)}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2 (\gamma_t - \gamma_p)} [(\nu - 1)(\gamma_p^2 + \gamma_t^2) + 2(\nu + 1)\gamma_p \gamma_t] c_{p1} + \\ + c_1 + 2\nu^2 \gamma_t^3 \left(\frac{2}{3} \cos^2 \gamma_t - 1 \right) c_{t1} = 0 \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.12)$$

Из системы (6.12) снова получаем, что $c_{t1} \equiv 0$. Из (6.9), (6.10) получаем граничные условия для определения ψ_0 , которые, как легко видеть, в точности совпадают с граничными условиями прикладной теории изгиба пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа. Система (6.11) позволяет определить b_{m1} . Приравнявая коэффициенты при λ^3 , получаем

$$P_3 = \frac{2}{3} (\nu + 1) \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) \right]_{n=0} + \\ + 4(\nu + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} b_{k1}' + 2(\nu^2 - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \frac{a}{R} c_{p2} - \\ - 4\nu(\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p2}(\sigma) K_{12}(\sigma, s) d\sigma - \frac{\nu + 1}{2\mu} M_{12} = 0 \quad (6.13)$$

$$R_3 = -\frac{2}{3} (\nu + 1) \left[2\nu \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial n} + \left(\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial n \partial s^2} + \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} \right) \right]_{n=0} - \\ - 4(\nu + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma_k^2} \left(-\frac{aR'}{R^2} b_{k1} + \frac{a}{R} b_{k1}' \right) + 2(\nu^2 - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p2}'' - \\ - 4\nu(\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \oint_{\Gamma} c_{p2}(\sigma) K_{11}(\sigma, s) d\sigma + \frac{\nu + 1}{2\mu} \left(Q_{03} + \frac{\partial G_{12}}{\partial s} \right) = 0 \quad (6.14)$$

$$S_{m3} = \frac{2(-1)^{m+1}}{\sigma_m^3} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial s \partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial s^3} - \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} + \frac{a}{R} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s \partial n} \right) + \right. \\ \left. + (\nu + 1) \left[\sigma_m \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right) - \frac{a}{2R} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s \partial n} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right) \right] \right\}_{n=0} + \\ + \left[-\sigma_m b_{m2} + \frac{5a}{2R} b_{m1} \right] - \frac{2(-1)^{m+1}}{\sigma_m} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_p}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \times \\ \times \left\{ (\nu - 1) \gamma_p^2 c_{p2}' + \left(1 - \nu \frac{\gamma_p^2 + \sigma_m^2}{\gamma_p^2 - \sigma_m^2} \right) (\gamma_p^2 c_{p2} + \gamma_p \sigma_m c_{p2}') \right\} - \\ - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial N_{m1}}{\partial s} + \sigma_m T_{m2} - \frac{a}{2R} T_{m1} \right) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.15)$$

$$T_{t3} = -2(1 - \nu) \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t} \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right) \right]_{n=0} - \\ - 4\nu \sum_{p=1(p \neq t)}^{\infty} \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2 (\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p)}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2 (\gamma_t - \gamma_p)} [(\nu - 1)(\gamma_p^2 + \gamma_t^2) + 2(\nu + 1)\gamma_p \gamma_t] c_{p2} + \\ + 2\nu^2 \gamma_t^3 \left(\frac{2}{3} \cos^2 \gamma_t - 1 \right) c_{t2} + \frac{\gamma_t}{2\mu} N_{t1} = 0 \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.16)$$

Из системы (6.16) определяем c_{t2} , которые уже, вообще говоря, отличны от нуля. После этого из (6.13), (6.14) находим граничные условия для ψ_1 , а из системы (6.15) определяем b_{m2} . Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко при достаточной гладкости Γ и нагрузки.

Как легко заметить, на каждом этапе построения асимптотических разложений приходится решать такую же бигармоническую проблему для области Ω , которая возникает в прикладной теории изгиба пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа; сверх того приходится также решать некоторую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, т. е. по существу обращать некоторую бесконечную матрицу. Следует особо подчеркнуть, что коэффициенты этой системы являются вполне определенными числами, независимыми ни от внешней нагрузки, ни от граничного контура плиты G . Матрица этой системы может быть обращена раз и навсегда. Как показывает дополнительное изучение, обращение этой матрицы в физически осмысленных классах решений вполне возможно и практически может быть осуществлено методом урезания.

Можно также показать, что бигармоническая проблема, с которой сталкиваемся на каждом этапе построения приближений, разрешима.

§ 7. При сделанных допущениях относительно внешней нагрузки, приведенных в § 3, коэффициенты B_k , характеризующие вихревое напряженное состояние, имеют порядок малости относительно λ на единицу больше, чем бигармоническое решение, а коэффициенты C_p , характеризующие потенциальное напряженное состояние, имеют порядок малости относительно λ на две единицы больше, чем бигармоническое решение. Поэтому разложения (6.1) фактически имеют вид

$$\psi(s, n) = \psi_0(s, n) + \lambda\psi_1(s, n) + \lambda^2\psi_2(s, n) + \dots \quad (7.1)$$

$$b_k(s) = \lambda b_{k1}(s) + \lambda^2 b_{k2}(s) + \lambda^3 b_{k3}(s) + \dots \quad (7.2)$$

$$c_p(s) = \lambda^2 c_{p2}(s) + \lambda^3 c_{p3}(s) + \lambda^4 c_{p4}(s) + \dots$$

Используя формулу (2.9), получаем для B_k и C_p асимптотические разложения:

$$B_k(s, n) = \left\{ \lambda \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) + \lambda^2 \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times b_{k2}(s) + \frac{1}{2\sigma_k} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) b_{k1}(s) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda}$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial n} = \left\{ \sigma_k \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) + \lambda \left[\left(-\frac{a}{2R} + n \frac{3a^2}{4R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_k \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k2}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) b_{k1}(s) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial^2 B_k}{\partial n^2} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \sigma_k^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) + \right. \\ \left. + \left[2\sigma_k \left(-\frac{a}{2R} + n \frac{3a^2}{4R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) + \sigma_k^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k2}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sigma_k}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) b_{k1}(s) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda}$$

$$C_p(s, n) = \left\{ \lambda^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) + \lambda^3 \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times c_{p3}(s) + \frac{1}{2\gamma_p} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) c_{p2}(s) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda}$$

$$\frac{\partial C_p}{\partial n} = \left\{ \lambda \gamma_p \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) + \lambda^2 \left[\left(-\frac{a}{2R} + n \frac{3a^2}{4R^2} - \dots \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times c_{p2}(s) + \gamma_p \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p3}(s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) c_{p2}(s) \right] + \dots \right\} \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_p}{\partial n^2} = & \left\{ \gamma_p^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) \diamond \right. \\ & + \lambda \left[2\gamma_p \left(-\frac{a}{2R} + n \frac{3a^2}{4R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) \diamond \gamma_p^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p3}(s) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma_p}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} \diamond \dots \right) c_{p2}(s) \right] \diamond \dots \right\} \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \end{aligned}$$

Если подставить (7.1), (7.3) и (7.4) в формулы (4.6), (4.7), получим

$$\begin{aligned} \sigma_n = & 2\mu\lambda \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} \diamond (\nu - 1) \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} \diamond \frac{1}{H} \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \diamond \frac{1}{H^3} n \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right) \right] \zeta + \\ & + 2\mu\lambda \left[(\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) \diamond \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \gamma_p^2 \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) \right] \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} \diamond (\nu - 1) \left(\frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{1}{H} \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{1}{H^3} n \frac{aR'}{R^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right) \right] \zeta \diamond \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sin \sigma_k \zeta \frac{1}{H} \left[b_{k1}(s) \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) \right]'_s \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \diamond \right. \\ & \left. + (\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p3}(s) \diamond \frac{1}{2\gamma_p} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) c_{p2}(s) \right] \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \gamma_p^2 \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p3}(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\gamma_p} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots \right) c_{p2}(s) \right] \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \diamond \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \gamma_p \left(-\frac{a}{R} \diamond n \frac{3a^2}{2R^2} + \dots \right) c_{p2}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \right\} + \dots \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$\tau_{ns} = 2\mu\lambda (\nu \diamond 1) \zeta \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n \partial s} - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right) \diamond \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} & + 2\mu\lambda \left\{ - \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sin \sigma_k \zeta \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \right\} + \\ & \diamond 2\mu\lambda^2 \left\{ (\nu \diamond 1) \zeta \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n \partial s} - \frac{1}{H^2} \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sin \sigma_k \zeta \left[\frac{1}{H} \frac{a}{R} \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) - \right. \right. \\ & \left. - \sigma_k \left(1 - n \frac{a}{2R} + n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) b_{k2}(s) - \frac{1}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} \diamond \dots \right) b_{k1}(s) - \right. \\ & \left. \left. - \left(-\frac{a}{R} + n \frac{3a^2}{2R^2} - \dots \right) b_{k1}(s) \right] \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \diamond \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \gamma_p H^{-1} \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots \right) c_{p2}(s) \right]'_s \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \right\} \diamond \dots \end{aligned}$$

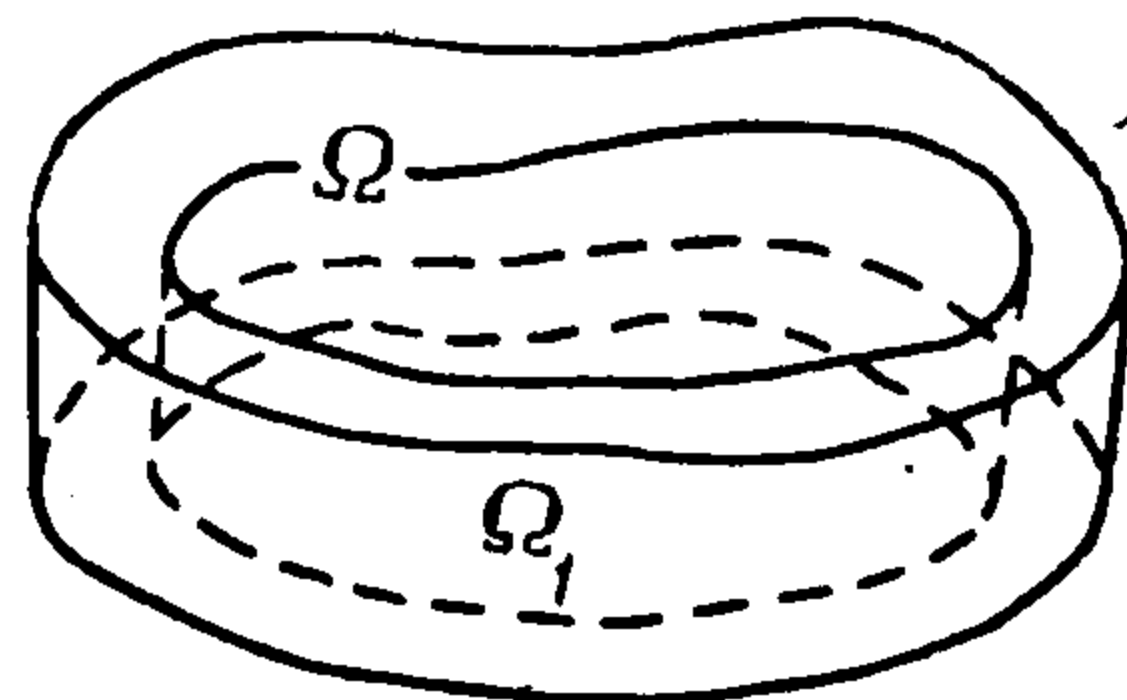
$$\begin{aligned} \tau_{nz} = & 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \gamma_p \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) c_{p2}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ \nu (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} + \sum_{k=0}^{\infty} \cos \sigma_k \zeta \left[\left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) b_{k1}(s) \right]' \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} + \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \left[\gamma_p \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) c_{p3}(s) \diamond \frac{1}{2} \left(-n \frac{a^2}{4R^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - n \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots\right) c_{p2}(s) + \left(-\frac{a}{2R} \diamond n \frac{3a^2}{4R^2} - \dots\right) c_{p2}(s) \right] \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \left. \right\} \diamond \dots \quad (7.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n = & \lambda (\nu \diamond 1) a \zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \diamond \lambda^2 \left\{ (\nu \diamond 1) a \zeta \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \right. \\ & + a \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \gamma_p \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) c_{p2}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \left. \right\} \diamond \dots \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_s = & \lambda (\nu \diamond 1) a \zeta H^{-1} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \diamond \lambda^2 \left\{ (\nu \diamond 1) a \zeta H^{-1} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \right. \\ & - 2a \sum_{k=0}^{\infty} \sin \sigma_k \zeta \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) b_{k1}(s) \exp \frac{\sigma_k n}{\lambda} \left. \right\} \diamond \dots \\ w = & - (\nu \diamond 1) a \psi_0 - \lambda (\nu \diamond 1) a \psi_1 \diamond \lambda^2 \left[- (\nu \diamond 1) a \psi_2 - (\nu - 1) \frac{\zeta^2}{2} a \Delta \psi_0 + \right. \\ & + 2\nu a \Delta \psi_0 - a \sum_{p=1}^{\infty} q_p(\zeta) \left(1 - n \frac{a}{2R} \diamond n^2 \frac{3a^2}{8R^2} - \dots\right) c_{p2}(s) \exp \frac{\gamma_p n}{\lambda} \left. \right] \diamond \dots \end{aligned}$$

В формулах (7.8) первые члены в правой части соответствуют решению прикладной теории изгиба плит. Отсюда следует, что погрешность в определении перемещений по гипотезе Кирхгофа будет иметь порядок λ по сравнению с единицей во всей замкнутой области, занятой плитой. Этот результат находится в соответствии с известным результатом, полученным на основе качественного исследования [9, 10].

Несколько сложнее дело обстоит с напряжениями. Если рассмотреть поведение напряжений в замкнутой цилиндрической подобласти $\Omega' \times 2h$ (фиг. 4), то здесь при определении напряжений гипотеза Кирхгофа будет иметь погрешность порядка λ по сравнению с единицей¹. Однако этот результат справедлив именно для всякой подобласти $\Omega' \times 2h$, целиком лежащей внутри $\Omega \times 2h$. В самом деле, на границе Ω , где $n = 0$, будем иметь



Фиг. 4.

$$\begin{aligned} \sigma_n = & 2\mu\lambda\zeta \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right) \right]_{n=0} + \\ & + 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p(\zeta) \diamond \gamma_p^2 n_p(\zeta)] c_{p2}(s) + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ \left[2\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} \diamond (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) \right] \zeta + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sin \sigma_k \zeta b'_{k1}(s) + \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p(\zeta) \diamond \gamma_p^2 n_p(\zeta)] c_{p3}(s) - \frac{a}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p n_p(\zeta) c_{p2}(s) \left. \right\} + \dots \quad (7.9) \end{aligned}$$

¹ При подсчете порядка погрешности, естественно, не учитывались члены, которые имеют показательный порядок убывания относительно λ , т. е. члены, содержащие $\exp \sigma_k n / \lambda$ и $\exp \gamma_p n / \lambda$.

$$\begin{aligned} \tau_{ns} = & 2\mu\lambda (\nu + 1) \zeta \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right) - 2\mu\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \sin \sigma_k \zeta b_{k1}(s) + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ (\nu + 1) \zeta \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n \partial s} - \frac{a}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sin \sigma_k \zeta \left[\frac{2a}{R} b_{k1}(s) - \sigma_k b_{k2}(s) \right] + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \gamma_p c_{p2}'(s) \right\} + \dots \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{nz} = & 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \gamma_p c_{p2}(s) + 2\mu\lambda^2 \left\{ \nu (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} \Big|_{n=0} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \cos \sigma_k \zeta b_{k1}'(s) + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \left[\gamma_p c_{p3}(s) - \frac{a}{2R} c_{p2}(s) \right] \right\} + \dots \quad (7.11) \end{aligned}$$

Первые члены в правых частях (7.9), (7.10) соответствуют решению прикладной теории изгиба плит. Остальные члены будут дополнительными к решению теории Кирхгофа. Формулы показывают, что среди них имеются члены того же порядка относительно λ , что и решение прикладной теории изгиба. Иными словами, погрешность при использовании гипотезы Кирхгофа будет иметь при $\lambda \rightarrow 0$ нулевой порядок относительно λ по сравнению с единицей. Если рассмотреть выражение (7.11) для τ_{nz} , то при $\lambda \rightarrow 0$ основную роль начинают играть поправочные к гипотезе Кирхгофа члены, и погрешность гипотезы Кирхгофа здесь получается сколь угодно большой.

Эти выводы, на наш взгляд, имеют существенное значение. Они, например, указывают на то, что необходимо подходить с осторожностью к оценке напряженного состояния на границе плиты на основе гипотезы Кирхгофа. Последний вопрос имеет большое практическое значение, ибо при изгибе плит наибольшие напряжения имеют место обычно на контуре отверстий и по этим напряжениям вычисляется коэффициент концентрации напряжений. Развитый здесь подход дает возможность изучить вопрос о применимости теории Кирхгофа к расчету концентрации напряжений.

Отметим, далее, следующий факт: допустим, что в каждом сечении $s = \text{const}$ имеем на контуре статически эквивалентную нулю нагрузку. В этом случае, как легко видеть, $\psi_0 = 0$, а ψ_1 , вообще говоря, отлично от нуля. Это говорит о том, что в данном случае, несмотря на статическую эквивалентность нулю нагрузки в каждом сечении, будет иметь место напряженное состояние, проникающее без затухания в глубь плиты. Однако оно будет более высокого порядка. Концентрация напряжений в этом случае, разумеется, не может быть найдена из прикладной теории изгиба плит.

Поступила 24 VI 1963.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A boundary-layer theory for elastic plates. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. XIV, № 1.
2. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Roy. Soc.*, 1962, A 266 № 1325, 143—160. (Русск. пер. в журн. «Механика, Период. сб. пер. иностр. статей», 1963, № 2.
3. Reiss E. L. Symmetric bending of thick circular plates. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1962, 10, № 4.
4. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *ПММ*, 1962, т. XXVI, вып. 4.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат 1955.
6. Лурье А. И. К теории толстых плит. *ПММ*, 1942, т. VI, вып. 2—3.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *Успехи матем. наук*, 1957, т. XII, вып. 5 (77).
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
9. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М., О погрешностях гипотез Кирхгофа в теории оболочек. *ПММ*, 1943, т. VII.
10. Муштарь Х. М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа—Лява. *ПММ*, 1947, т. XI, вып. 5.