

**ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
К АНАЛИЗУ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА ИЗГИБА  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННО  
ДЕЙСТВУЮЩЕЙ КРАЕВОЙ НАГРУЗКЕ**

У. К. Ни гу л  
(Таллин)

Волновые процессы деформации изгибного типа, вызванные кратковременно действующей нагрузкой в бесконечных или полубесконечных плитах и балках, изучены в литературе на основе теории Кирхгоффа [1-4] и теории типа Тимошенко [5-15]. С привлечением математического аппарата интегральных преобразований последняя впервые применялась Я. С. Уфляндом [5]. Благодаря гиперболическому типу она позволила устранить существенные дефекты [1, 5], присущие решениям по параболической теории Кирхгоффа. Скоро были исправлены [8] неточности, допущенные в первых работах [5, 6] при применении интегральных преобразований, и проработаны приближенные методы обращения контурных интегралов [8-11, 14, 15], появляющихся при использовании теории типа Тимошенко. Однако проблема о точности теории типа Тимошенко в задачах распространения волн осталась почти неизученной.

Ниже применяется трехмерная теория упругости. В качестве конкретного примера рассматривается волновой процесс, возбужденный в полубесконечной плите внезапно приложенными краевыми напряжениями, линейно распределенными по толщине плиты. Методом двукратных интегральных преобразований, аналогичным принятому в [16, 17], составляется формальное решение в виде бесконечной суммы одномерных контурных интегралов преобразования Лапласа (п. 1-6). Рассматривается их приближенное обращение методом седловых точек и излагаются численные результаты для шести первых интегралов (п. 7-9). Исследуется погрешность теории Кирхгоффа и теории типа Тимошенко (п. 10-14). При выполнении работы использован опыт применения трехмерной теории в смежных задачах [16-20].

1. Рассмотрим напряженные состояния, зависящие от продольной координаты  $x_1$ , нормальной координаты  $x_3$  и времени  $t$ .

Пусть  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $2h$  — толщина плиты;  $c_1, c_2$  — скорости распространения волн расширения и сдвига (искажения);  $\xi, \zeta$  — безразмерные координаты;  $\tau$  — безразмерное время;  $u, w$  — безразмерные (деленные на  $h$ ) перемещения в направлениях  $x_1, x_3$  соответственно;  $w_0$  — нормальное перемещение срединной поверхности  $\zeta = 0$ ;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) — напряжения, умноженные на  $(1 + \mu)E^{-1}$ . При этом

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}, \quad k^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\mu}{2 - 2\mu} \quad (1.1)$$

Безразмерные величины типа изгибающего момента, поперечной силы и интегральных перемещений определим по формулам

$$M = \int_{-1}^{+1} \sigma_{11} \zeta d\zeta, \quad Q = \int_{-1}^{+1} \sigma_{13} d\zeta \quad (1.2)$$

$$U = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} u \zeta d\zeta, \quad W = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} w d\zeta \quad (1.3)$$

Для символов дифференцирования введем укороченные обозначения:

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (1.4)$$

В принятых обозначениях уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u + k^{-2} \partial_1^2 u + (1-2\mu)^{-1} \partial_1 \partial_3 w &= \partial_\tau^2 u \\ \partial_3^2 w + k^2 \partial_1^2 w + (2-2\mu)^{-1} \partial_1 \partial_3 u &= k^2 \partial_\tau^2 w \end{aligned} \quad (1.5)$$

На основе известных соотношений теории упругости следует из (1.5) для интегральных величин (1.2), (1.3) уравнения:

$$\partial_1 M - Q = 1/3 \partial_\tau^2 U, \quad \partial_1 Q = \partial^2 W \quad (1.6)$$

2. Для конкретности примем следующие условия задачи:

а) на плоскости  $\xi = 0$  полубесконечной плиты:

$$\sigma_{11}(0, \zeta; \tau) = \frac{\zeta}{1-\mu} A(\tau), \quad w(0, \zeta; \tau) = 0 \quad (2.1)$$

б) на плоскостях  $\zeta = \pm 1$ :

$$\sigma_{13}(0, \pm 1; \tau) = \sigma_{33}(0, \pm 1; \tau) = 0 \quad (2.2)$$

в) нулевые начальные условия, т. е.  $A(\tau)$  и все искомые величины тождественно равны нулю при  $\tau < 0$ .

Из (2.1) следует, что

$$\partial_1 u(0, \zeta; \tau) = \frac{1-2\mu}{1-\mu} \sigma_{11}(0, \zeta; \tau) = \frac{2k^2 \zeta}{1-\mu} A(\tau) \quad (2.3)$$

$$M(0; \tau) = \frac{2}{3-3\mu} A(\tau), \quad w_0(0; \tau) = 0, \quad W(0; \tau) = 0 \quad (2.4)$$

Первое и второе из условий (2.4) могут быть использованы в качестве краевых условий при приближенном решении задачи на основе теории Кирхгоффа [1, стр. 409], а первое и третье — при ее решении на основе теории типа Тимошенко [9, 14].

3. Определим преобразование Лапласа по формулам

$$\int_0^\infty F e^{-s\tau} d\tau = F^L, \quad F = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F^L e^{s\tau} ds \quad (3.1)$$

где  $F$  обозначает любую из рассматриваемых величин. В частности,

$$\int_0^\infty A(\tau) e^{-s\tau} d\tau = A^L \quad (3.2)$$

Косинус- и синус-преобразования Фурье определим по формулам

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1 \cos \kappa \xi d\xi = F_1^c, \quad F_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1^c \cos \kappa \xi d\kappa \quad (3.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_2 \sin \kappa \xi d\xi = F_2^s, \quad F_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_2^s \sin \kappa \xi d\kappa \quad (3.4)$$

Следуя работам [16, 17], умножим первое и второе из уравнений (1.5) соответственно на величины

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-s\tau} \cos k\xi, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-s\tau} \sin k\xi \quad (3.5)$$

и интегрируем от 0 до  $\infty$  как по  $\xi$ , так и по  $\tau$ . Применяя далее интегрирование по частям с учетом (2.1), (2.3), имеем

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u^{Lc} + (1-2\mu)^{-1} k \partial_3 w^{Ls} - k^{-2} \kappa^2 u^{Lc} - s^2 u^{Lc} &= 2^{3/2} (1-\mu)^{-1} \pi^{-1/2} A^L \zeta \\ \partial_3^2 w^{Ls} - (2-2\mu)^{-1} k \partial_3 u^{Lc} - k^2 \kappa^2 w^{Ls} - s^2 k^2 w^{Ls} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В пространстве изображений (3.6) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проводя аналогичные вычисления исходя из известных соотношений теории упругости, получим формулы, связывающие изображения напряжений с изображениями перемещений. Выражения

$$\sigma_{13}^{Lc} = \frac{1}{2} [\partial_3 u^{Lc} + \kappa w^{Ls}], \quad \sigma_{33}^{Ls} = \frac{1}{1-2\mu} [(1-\mu) \partial_3 w^{Ls} - \mu \kappa u^{Lc}] \quad (3.7)$$

дают на основе (2.2) краевые условия системы (3.6). Нетрудно построить решение системы (3.6) в виде суммы частного решения неоднородных уравнений и общего решения однородных уравнений. При этом могут быть использованы готовые формулы общего решения, изложенные (для несколько более общего случая) в работе [21]. Опуская промежуточные выкладки, выпишем формулы для изображений перемещений

$$\begin{aligned} u^{Lc} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A^L}{(1-\mu)^2 \alpha^2 \Phi} [u^\circ + (1-2\mu) \Phi \zeta] \\ w^{Ls} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i \lambda A^L}{(1-\mu)^2 \alpha^2 \beta^2 \Phi} (w^\circ - \Phi) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \lambda^2 - k^2 s^2, \quad \beta^2 = \lambda^2 - s^2, \quad \lambda = i\kappa \\ \gamma^2 &= \lambda^2 - \frac{1}{2} s^2, \quad \vartheta^2 = \frac{1-2\mu}{2} s^2 + \mu \lambda^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\Phi = -\lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\beta} + \gamma^4 \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} u^\circ &= \vartheta^2 \left( -\lambda^2 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha \zeta}{\alpha} + \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta \zeta}{\beta} \right) + \\ &+ \mu \lambda^2 \left( \gamma^2 \cos \beta \frac{\sin \alpha \zeta}{\alpha} - \beta^2 \cos \alpha \frac{\sin \beta \zeta}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} w^\circ &= \vartheta^2 \left( -\beta^2 \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \alpha \zeta + \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta \zeta \right) + \\ &+ \mu \beta^2 (\gamma^2 \cos \beta \cos \alpha \zeta - \lambda^2 \cos \alpha \cos \beta \zeta) \end{aligned}$$

Если рассматривать  $s$  и  $A^L$  как заданные величины, то нетрудно доказать, что функции  $u^{Lc}(\lambda)$ ,  $w^{Ls}(\lambda)$  будут на комплексной плоскости  $\lambda$  однозначными функциями. Точки  $\Phi = 0$  являются их полюсами, а точки  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  не являются полюсами.

4. Дальнейшая задача состоит в вычислении оригиналов по изображениям (3.8). Обратим вначале синус- и косинус-преобразования по координате  $\xi$ , а затем преобразование Лапласа по времени  $\tau$ . Такая очередность обращений была принята в [16, 17, 20], противоположная — в [18, 19]. Она имеет следующие преимущества: а) синус- и косинус-преобразования удастся обратить по теореме о вычетах; б) первое обращение выполнимо без конкретизации функции  $A(\tau)$ .

Заметив, что  $u^{Lc}$  является четной и  $w^{Ls}$  нечетной функцией от  $\lambda$ , перепишем формулы обращения (3.3), (3.4) для перемещений в форме

$$u^L = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} u^{Lc} e^{\lambda\xi} d\lambda, \quad w^L = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} w^{Ls} e^{\lambda\xi} d\lambda \quad (4.1)$$

При вычислении интегралов (4.1) рассмотрим  $s$  и  $A^L$  формально как заданные величины.

Имея в виду изучение выходящих (затухающих при  $\xi \rightarrow \infty$ ) волн, следует учесть полюсы, находящиеся при  $\operatorname{Re} s > 0$  на полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Учитывая свойства  $u^{Lc}$ ,  $w^{Ls}$ , указанные в предыдущем пункте, имеем по теореме о вычетах

$$u^L = A^L \sum_{j=1}^{\infty} u_j^* e^{\lambda_j \xi}, \quad w^L = A^L \sum_{j=1}^{\infty} w_j^* e^{\lambda_j \xi} \quad (4.2)$$

$$u_j^* = \frac{2}{(1-\mu)^2 s^2} \left[ \frac{\lambda \beta^2 u^0}{\Phi_*} \right]_{\lambda=\lambda_j}, \quad w_j^* = \frac{2}{(1-\mu)^2 s^2} \left[ \frac{\lambda^2 w^0}{\Phi_*} \right]_{\lambda=\lambda_j} \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (4.3)$$

где  $\lambda_j$  — корни уравнения Релея-Лэмба [22, 23]

$$\Phi = 0 \quad (4.4)$$

удовлетворяющие при  $\operatorname{Re} s > 0$  условию  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ . Функция  $\Phi_*$  имеет следующий смысл:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{s^2}{\lambda \alpha^2 \beta^2} \Phi_*, \quad \Phi_* = \Phi_0 - \Phi_1 \quad (4.5)$$

где с учетом (4.4) функции  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  могут быть написаны в форме

$$\Phi_0 = \gamma^2 \left( \frac{\lambda^4}{2-2\mu} - \frac{5-4\mu}{4-4\mu} \lambda^2 s^2 + k^2 s^4 \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} \lambda^2 s^2 \alpha^2 \beta^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} + \left( \frac{\lambda^2}{2-2\mu} - \frac{s^2}{4} \right) \lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \cos \beta \quad (4.6)$$

5. На основе (4.2) придадим формуле обращения (3.1) вид

$$F = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_j - i\infty}^{a_j + i\infty} A^L F_j^* e^{\tau \varphi_j} ds, \quad \varphi_j = s + \frac{\xi}{\tau} \lambda_j \quad (5.1)$$

При вычислении  $F = w$  принимается в (5.1)  $F_j^* = w_j^*$ . Аналогично поступают при вычислении других величин. Даем развернутые формулы

для величин, которые представляют особый интерес при анализе точности двумерных теорий и подлежат к численному расчету в следующих пунктах

$$\begin{aligned}
 w_{0j}^* &= \frac{2}{(1-\mu)^2 s^2} \left\{ \frac{\lambda^2}{\Phi_*} \left[ \vartheta^2 \left( -\beta^2 \frac{\sin \beta}{\beta} + \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) + \mu \beta^2 (\gamma^2 \cos \beta - \lambda^2 \cos \alpha) \right] \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
 W_j^* &= \frac{1}{(1-\mu)^2} \left\{ \frac{\lambda^2}{\Phi_*} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left( \vartheta^2 \frac{\sin \beta}{\beta} - \mu \gamma^2 \cos \beta \right) \right\}_{\lambda=\lambda_j} \quad (5.2) \\
 U_j^* &= \frac{3}{(1-\mu)^3} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha^2 \Phi_*} \left[ \vartheta^4 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 2\mu \vartheta^2 \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu^2 \lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \cos \beta \right] \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
 M_j^* &= \frac{s^2}{(1-\mu)^3} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 \Phi_*} \left[ \lambda^2 \vartheta^2 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \mu \gamma^2 (\vartheta^2 + \lambda^2) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mu^2 \lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \cos \beta \right] \right\}_{\lambda=\lambda_j} \\
 Q_j^* &= s^2 \left\{ \frac{W_j^*}{\lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_j}
 \end{aligned}$$

Отметим, что из выражений (5.2) исключены на основе (4.4) члены типа  $\sin \beta \cos \alpha$ . Это заметно укоротило формулы и уменьшило в расчетах опасность погрешности от появления малых разниц больших чисел.

Итак, сформулировано точное формальное решение в виде сумм контурных интегралов. Оно почленно удовлетворяет всем уравнениям и соотношениям трехмерной теории упругости, а также начальным условиям и условиям (2.2). Краевым условиям (2.1) оно удовлетворяет суммарно в форме:

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j^* = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{11j}^* = \frac{\xi}{1-\mu} \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_{0j}^* = \sum_{j=1}^{\infty} W_j^* = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} M_j^* = \frac{2}{3-3\mu} \quad (5.4)$$

Точное обращение полученных контурных интегралов и суммирование их бесконечных рядов невозможно. Поэтому приходится прибегать к применению приближенных методов обращения и ограничиваться учетом конечного числа членов в рядах (5.1). Решение задачи обращения затрудняется еще тем, что в литературе нет готовых данных о поведении корней  $\lambda_j$  на комплексной плоскости  $s$ . Вся имеющаяся информация [24-26] относится к мнимой оси ( $s = i\Omega$ ).

6. Рассмотрим некоторые свойства подынтегральных функций. Не прибегая к изложению численных данных и к описанию срезов плоскости  $s$ , обеспечивающих однозначность корней  $\lambda_j(s)$ , отметим некоторые их свойства.

1) Для каждого  $\lambda_j$  можно определить такое положительное число  $b_j$ , что на мнимой оси  $s = i\Omega$  [24, 25]:

$$\begin{aligned}
 \lambda_j &= im_j \quad \text{при } -\infty < \Omega \leq b_j, & \frac{d\lambda_j}{ds} &= -\frac{1}{\psi_j} \\
 \lambda_j &= -im_j \quad \text{при } +\infty > \Omega \geq b_j, & &
 \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $m_j, \psi_j$  — вещественные положительные функции от  $|\Omega| \geq b_j$ . Для мод  $m_j$  и групповых скоростей  $\psi_j$  имеются диаграммы в [24–26]. Диаграммы  $\psi_j(\Omega)$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) показаны также на фиг. 1, где кривые 1 — трехмерная теория, кривые 2 — теория типа Тимошенко, кривая 3 — теория Кирхгоффа. Примем это свойство за основу нумерации корней, требуя, чтобы числа  $b_j$  составляли возрастающую последовательность.

При  $\mu = 0.3$  имеем [24]:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad b_3 = 4.708 \\ b_4 = \sqrt{3.5}\pi, \quad b_5 = \frac{5}{2}\pi, \dots$$

2) Все корни  $\lambda_j$  имеют чисто мнимые значения только на мнимой оси  $s = i\Omega$ . При этом среди  $\lambda_j$  ( $j \geq 3$ ) существуют корни, приобретающие мнимые значения не только на отрезках (6.1), а также в узких диапазонах более низких частот  $\Omega$  [24–26].

В этих диапазонах можно определить  $\lambda_j$  по формулам типа (6.1), причем  $m_j$  будет отрицательным, а  $\psi_j$  — по-прежнему положительным<sup>1</sup>.

3) При  $s = i\Omega \rightarrow \pm i\infty$  имеем

$$\lambda_1 \rightarrow -\psi_R s, \quad \lambda_j \rightarrow -s, \quad \psi_R = \frac{c_R}{c_2} \quad (j \geq 2) \quad (6.2)$$

где  $c_R$  — скорость распространения поверхностных волн Релея.

4) В окрестности точки  $s = 0$  имеем [24] для корней  $\lambda_1, \lambda_2$  разложение

$$\lambda^4 = -\frac{3-3\mu}{2} s^2 + O(s^3) \quad (6.3)$$

а для  $\lambda_j$  ( $j \geq 3$ ) — разложение

$$\lambda_j = q_j \left[ 1 - \frac{1-\mu}{2q_j^2 \sin^2 q_j} s^2 + O(s^4) \right] \quad (6.4)$$

где  $q_j$  ( $j = 3, 4, \dots$ ) являются известными ненулевыми корнями [27] характеристического уравнения статических краевых эффектов типа Сен-Венана.

Еще некоторые замечания относительно величин типа (5.2). Если  $s \rightarrow 0$ , то при  $j = 1, 2$  имеем

$$w_{0j}^* \sim W_j^* \rightarrow -\frac{1}{2\lambda_j^2}, \quad M_j^* \rightarrow \frac{1}{3-3\mu}, \quad Q_j^* \rightarrow -\frac{s^2}{2\lambda_j^3} \quad (6.5)$$

а при  $j \geq 3$  эти же величины приближаются к нулю. Следовательно, при малых  $s$  в суммах (5.4) доминируют первых два слагаемых. С возрастанием  $s$  быстро увеличивается относительное значение членов  $j \geq 3$ . Для численной иллюстрации в табл. 1, 2 приведены некоторые данные для величин

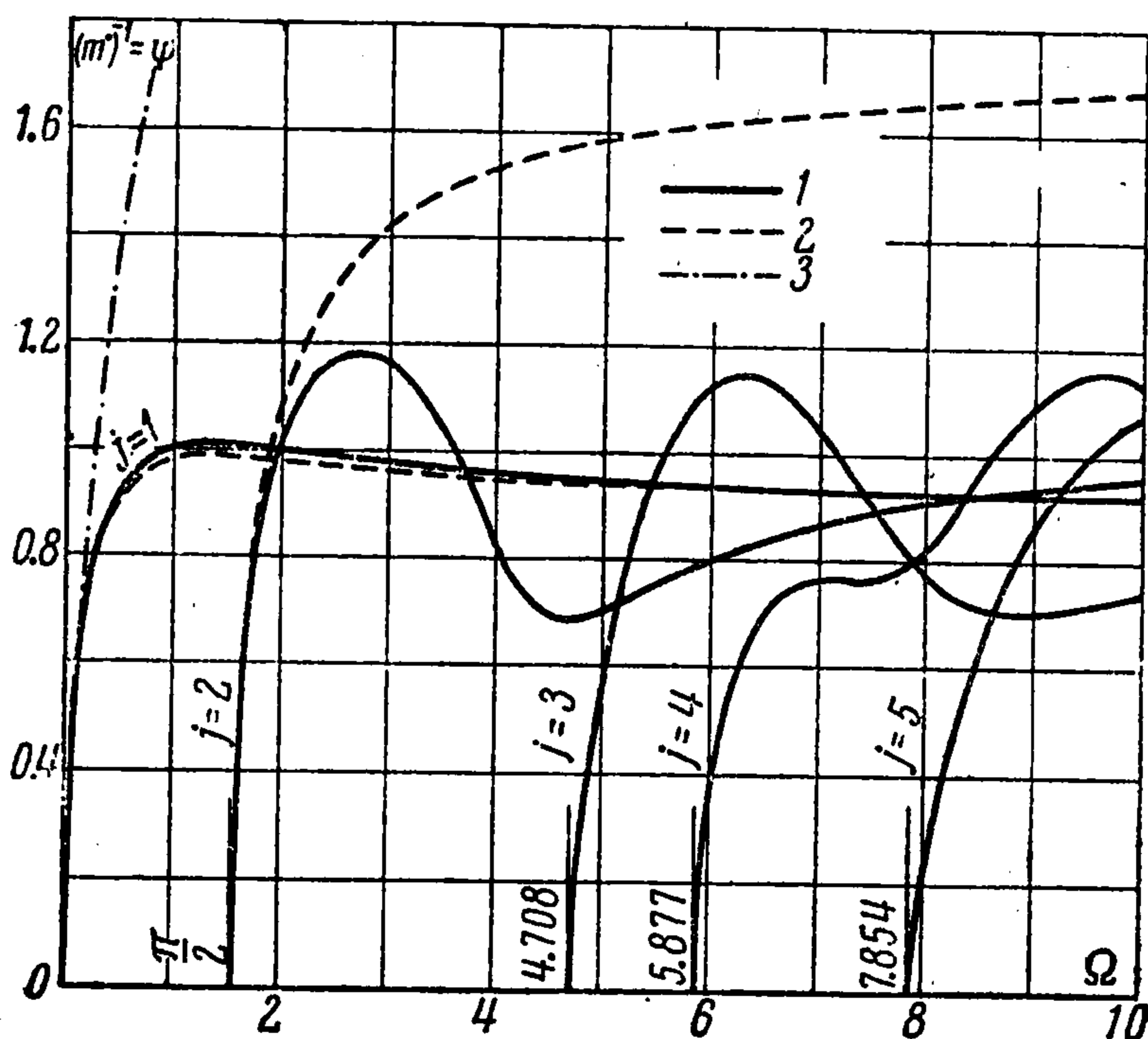
$$B_{j1} = w_{0j}^* (is)^{-1}, \quad B_{j2} = W_j^* (is)^{-1}, \quad B_{j3} = M_j^* (is)^{-1}, \quad B_{j4} = Q_j^* s^{-1} \quad (6.6)$$

7. Рассмотрим случай

$$A(\tau) = A_0 H(\tau), \quad A^L = A_0 s^{-1}, \quad A_0 = \text{const} \quad (7.1)$$

где  $H(\tau)$  — единичная функция Хевисайда.

<sup>1</sup> В литературе [24–26] эти диапазоны частот известны под названием зон «отрицательных групповых скоростей». Фактически отрицательной является фазовая скорость.



Фиг. 1

Примем  $\mu = 0.3$  и определим методом седловых точек асимптотические при  $\tau \rightarrow \infty$  приближения контурных интегралов (5.1) для величин

$$w_0 = F^{\circ}_1, \quad W = F^{\circ}_2, \quad M = F^{\circ}_3, \quad Q = F^{\circ}_4 \quad (7.2)$$

При этом учтем в суммах (5.1) первые шесть слагаемых ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ). Обозначим

$$\frac{\partial \dots}{\partial s} = (\dots)', \quad \frac{\partial \dots}{\partial \Omega} = (\dots)'' \quad (7.3)$$

В седловых точках  $C_{jn}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N_j$ ) подынтегральной функции  $j$  имеем

$$s = s_{cjn}, \quad \varphi'_{cjn} = 1 + \frac{\xi}{\tau} \lambda'_{cjn} = 0, \quad \frac{\xi}{\tau} = \psi_j (m_{cjn})^{-1} \quad (7.4)$$

Будем учитывать вклад седловых точек, находящихся на мнимой оси и определяющих неэкспоненциально затухающие волны. В этих седловых точках, появляющихся по парам  $+C_{jn}, -C_{jn}$ , имеем на основе (6.1)

$$s_{+cjn} = -s_{-cjn} = i\Omega_{cjn}, \quad \lambda_{+cjn} = -\lambda_{-cjn} = -im_{cjn} \quad (7.5)$$

где  $\Omega_{cjn}$  и  $m_{cjn}$  — вещественные положительные величины. Приближенные значения  $\Omega_{cjn}$  могут быть найдены при помощи диаграммы типа фиг. 1, откуда также следует, как число седловых точек  $N_j$  зависит от  $\psi$  и  $j$ . Далее легко найти приближенные значения  $m_{cjn}$  по известным диаграммам мод [24, 25].

$\mu = 0.3, s = i\Omega$

Таблица 1

$\Omega$	Трехмерная теория		Теория типа Тимошенко	Теория Кирхгоффа
	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{12}$	$B_{11}$
0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.5	-1.9288	-1.8840	-1.9145	-1.9516
1.0	-0.4483	-0.4370	-0.4536	-0.4880
1.5	-0.1761	-0.1741	-0.1864	-0.2169
2.0	-0.08400	-0.08540	-0.09557	-0.1220
2.5	-0.04398	-0.04652	-0.05544	-0.07806
3.0	-0.02416	-0.02688	-0.03488	-0.05423
3.5	-0.01355	-0.01602	-0.02328	-0.03982
4.0	-0.007605	-0.009639	-0.01626	-0.03050
5.0	-0.002197	-0.003293	-0.008788	-0.01952
6.0	-0.0004052	-0.0007435	-0.005252	-0.01355

$\mu = 0.3, s = i\Omega$

Таблица 2

$\Omega$	$j$	$1000B_{j1}$	$1000B_{j2}$	$1000B_{j3}$	$1000B_{j4}$
7.0	1	+ 0.1175	+0.2721	+ 0.2232	+ 1.763
	2	-14.82	-3.554	-14.72	-26.91
	3	+15.82	+3.010	-88.75	+37.22
	4	+ 7.395	+0.1707	-28.96	+ 3.851
8.0	1	+ 0.2108	+0.6321	+ 0.4545	+ 4.685
	2	- 9.614	-2.791	- 9.482	-23.52
	3	+12.263	+0.8890	-43.79	+11.23
	4	+ 1.590	+1.196	-64.02	+22.13
9.0	1	+0.1803	+0.7139	+ 0.4372	+ 5.956
	2	-6.595	-2.185	- 6.579	-20.400
	3	+7.671	-0.04569	-14.42	- 0.5743
	4	-2.253	+1.648	-78.67	+29.595

Для сравнения (см. п. 10—14) в табл. 1 указаны данные по двумерным теориям. В теории типа Тимошенко коэффициент сдвига  $k_T = 0.860$ .

8. Обычным способом [28, 29] можно получить для искомых величин (7.2) формулу следующего вида

$$F_i^* \approx \frac{A_0}{\sqrt{\pi\psi\tau}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_j} f_{jni} \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (8.1)$$

Чтобы упростить запись формул для функций  $f_{jni}$ , опустим индексы  $j, n$ .

В случае  $m_c'' \neq 0$  известная расчетная схема [28] дает в первом приближении формулы

$$f_k = D_k T, \quad f_4 = D_4 T^*, \quad D_i = B_{+ci} |m_c''|^{-1/2} \quad (k = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3, 4) \quad (8.2)$$

где

$$T = \pm \cos \tau\chi - \sin \tau\chi, \quad T^* = \cos \tau\chi \pm \sin \tau\chi, \quad \chi = \Omega_c - \psi m_c \quad (8.3)$$

Здесь верхние знаки принимаются при четных  $n$  (в случае  $m_c'' < 0$ ), а нижние — при нечетных  $n$  (в случае  $m_c'' > 0$ ). Функции  $B_{+ci}$  вычисляются по (6.6) в седловых точках "+C" на положительной полуоси  $s = i\Omega$ .

Для краткости не приводим уточненных формул метода седловых точек, которые были получены на основе [28]. С привлечением аппроксимационных формул работы [24] они были применены к анализу точности (8.2) при  $\psi \rightarrow 0$ . Было установлено, что при  $j \geq 2$  формулы (8.2) имеют погрешность порядка  $\tau^{-1}$ . Исходя из (6.3), можно прийти к аналогичному выводу относительно первой моды ( $j = 1$ ). Однако в случае  $j = 1$  стандартные формулы (8.2) имеют существенную погрешность другого вида, связанную с влиянием особой точки  $s=0$ . Этот недостаток метода седловых точек может быть устранен применением способа учета влияния особой точки, описанной в [29]. Соответствующий анализ показал, что при вычислении величин (7.2) следует учесть поправки в части  $w_0, W, M$ . При учете этих поправок вклад всех мод определяется в случае  $\psi \rightarrow 0$  по формулам первого приближения с погрешностью порядка  $\tau^{-1}$ , и, следовательно, они практически применимы при сравнительно небольших  $\tau$ . С возрастанием  $\psi$  погрешность этих формул, вообще говоря, увеличивается. Особенно «опасным» оказывается случай  $|m_c''| \ll 1$ .

При  $m_c'' = 0$  формулы (8.2) становятся принципиально негодными. При  $|m_c''| \ll 1$  они дают приемлемые результаты лишь при очень больших  $\tau$ . Поэтому в данном случае применим известный прием [29] приведения задачи к вычислению функции Эйри. Подробный анализ контуров интегрирования дает следующие расчетные формулы:

$$f_k = K_k (Y \sin \tau\chi \pm X \cos \tau\chi) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8.4)$$

$$f_4 = K_4 (\pm X \sin \tau\chi - Y \cos \tau\chi)$$

$$K_i = (4\tau\psi)^{1/6} |m_c''|^{-1/3} B_{+ci} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (8.5)$$

Аналогично формулам (8.3) следует принимать в (8.4) верхние знаки при четных  $n$  и нижние — при нечетных  $n$ . Для краткости не приводим формул для  $X, Y$ , которые легко получить на основе [29]. Отметим, что при  $m_c'' \neq 0, \tau \rightarrow \infty$  формулы (8.4), (8.5) переходят в (8.2). В частном случае  $m_c'' = 0$  две седловые точки сливаются и имеем так называемую фазу Эйри [14, 20].

9. Расчеты были проведены при помощи электронной машины типа М-3. Сокращенная сводка результатов расчета по формуле (8.2) изложена в табл. 3.

В табл. 3 звездочка указывает, что при таких  $\psi$  и  $j$  существуют еще другие седловые точки, для которых данные не приведены, поскольку волновые группы этих седловых точек по частоте соизмеримы с группами неучитываемых мод  $j \geq 7$ , а их амплитуды — незначительные.

Таблица 3

$\psi$	$j$	$n$	$x$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
0.5	1	1	-0.0674	-25.89	-25.77	-1.827	-0.5071
	2	1	1.512	0.02784	0.04221	-0.1230	0.4597
	3	1	4.021	0.02324	0.00348	-0.04936	0.04567
	4	1	5.682	0.00493	-0.00001	-0.00857	-0.00038
	5	1	7.235	-0.00018	0.00001	0.00012	0.00033
	6	1	9.676	-0.00000	0.00005	-0.00045	0.00157
0.6	1	1	-0.0994	-15.21	-15.09	-1.644	-0.5709
	2	1	1.484	0.03611	0.05590	-0.1681	0.5096
	3	1	3.827	0.02726	0.00439	-0.06442	0.05522
	4	1	5.584	0.00733	-0.00001	-0.01416	-0.00042
	5	1	7.003	0.00028	-0.00002	-0.00024	-0.00045
	6	1	9.247	0.00000	0.00004	-0.00015	0.00116
0.7	1	1	-0.1400	-9.338	-9.234	-1.493	-0.6407
	2	1	1.450	0.04455	0.07106	-0.2263	0.5589
		2	2.244	-0.1400	-0.00166	-0.2658	-0.0105
		3	2.240	-0.1336	-0.01060	-0.1885	-0.0672
	3	1	3.617	0.03127	0.00541	-0.08235	0.06576
	4	1	5.453	0.01156	0.00002	-0.02760	0.00047
	5	1*	6.745	0.00102	-0.00005	-0.00111	-0.00147
	6	1*	8.781	0.00000	-0.00001	0.00003	0.00043
0.8	1	1	-0.1911	-5.813	-5.722	-1.361	-0.7252
	2	1	1.339	0.0526	0.0876	-0.2896	0.6085
		2	1.955	-0.0842	0.0082	-0.2427	0.0516
		3	1.860	-0.0679	-0.0120	-0.0717	-0.0822
	3	1	3.393	0.0354	0.0065	-0.1044	0.0778
		2	3.948	0.0212	0.0018	-0.0806	0.0223
		3	3.696	0.0113	-0.0008	-0.0106	-0.0099
	4	1	5.231	0.0048	0.0021	-0.1193	0.0395
		2	5.969	-0.0086	0.0007	-0.0482	0.0139
		3	5.589	-0.0041	-0.0002	-0.0038	0.0033
	5	1	6.459	0.0021	-0.0001	-0.0030	-0.0028
		2*	8.011	0.0051	0.0004	-0.0353	0.0101
6	1*	8.202	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0006	
0.9	1	1	-0.2576	-3.529	-3.453	-1.243	-0.8521
	2	1	1.359	0.0591	0.1054	-0.3750	0.6609
		2	1.704	-0.0773	0.0158	-0.2963	0.0979
		3	1.163	-0.0499	-0.0138	-0.0492	-0.1130
	3	1	3.153	0.0401	0.0078	-0.1330	0.0923
		2*	3.477	0.0228	0.0029	-0.1076	0.0371
	4	1	4.872	-0.0003	0.0025	-0.1207	0.0445
		2*	5.294	-0.0087	0.0012	-0.0688	0.0222
	5	1	6.144	0.0039	-0.0002	-0.0072	-0.0044
		2*	7.139	0.0056	0.0006	-0.0528	0.0157
	6	1*	7.751	0.0000	-0.0001	-0.0016	-0.0020
	1.0	1	1	-0.3550	-2.007	-1.956	-1.309
		2	-0.3505	-0.6361	-0.6448	-0.6009	-1.069
2		1	1.299	0.0619	0.1248	-0.4925	0.7210
		2	1.478	-0.0744	0.0270	-0.3848	0.1652
3		1	2.896	0.0459	0.0096	-0.1747	0.1121
		2	3.043	0.0278	0.0047	-0.1489	0.0584
4		1	4.473	-0.0026	0.0031	-0.1449	0.0547
		2	4.665	-0.0093	0.0018	-0.0994	0.0338
5		1	5.793	0.0074	-0.0003	-0.0185	-0.0063
		2	6.321	0.0067	0.0009	-0.0782	0.0230
6		1	7.189	0.0001	-0.0001	-0.0056	-0.0036
		2	7.998	-0.0036	0.0005	-0.0646	0.0165
1.1	2	1	1.223	0.0547	0.1479	-0.6885	0.8087
		2	1.278	-0.0712	0.0512	-0.5605	0.3037
	3	1	2.616	0.0581	0.0129	-0.2615	0.1513
		2	2.644	0.0419	0.0086	-0.2388	0.1058
	4	1	4.038	-0.0058	0.0041	-0.1945	0.0730
		2	4.077	-0.0109	0.0031	-0.1633	0.0576

Таблица 3 (продолжение)

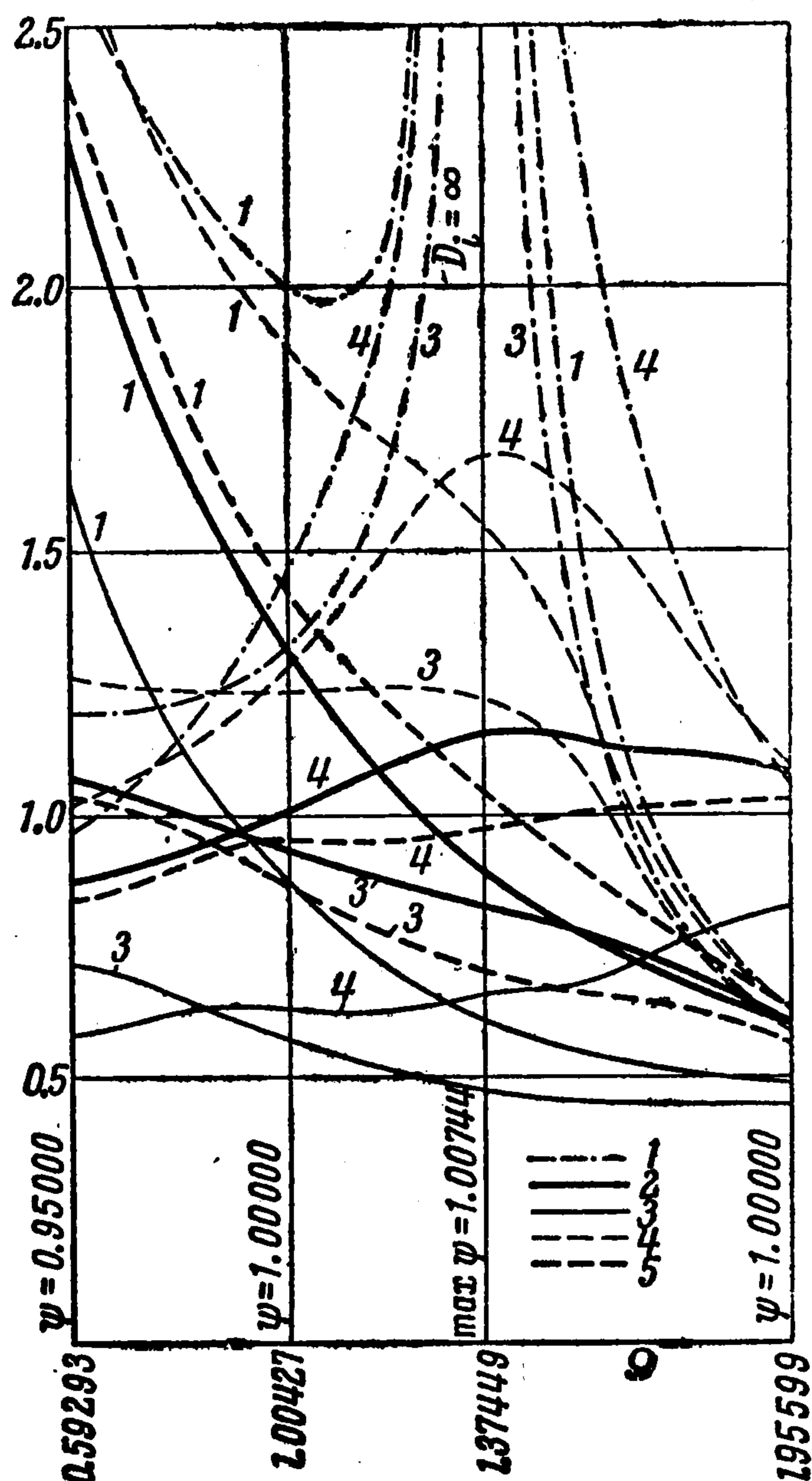
1	2	3	4	5	6	7	8
1.1	5	1	5.388	0.0206	-0.0001	-0.0903	-0.0033
		2	5.549	0.0092	0.0014	-0.1220	0.0232
	6	1	6.593	0.0003	-0.0002	-0.0162	-0.0051
		2	7.043	-0.0037	0.0007	-0.0906	0.0213
1.2	6	1	5.954	0.00053	-0.00016	-0.0457	-0.0047
		2	6.131	-0.00363	0.00082	-0.1260	0.0261

Первая мода имеет фазу Эйри, где  $\Omega = 1.37449$ ,  $\psi = 1.00744$ , вторая — две фазы Эйри, где соответственно  $\Omega = 2.71053$ ,  $\psi = 1.18313$ ;  $\Omega = 4.69706$ ,  $\psi = 0.690622$  и т. д. В близости этих точек (фиг. 1) были применены формулы (8.4). Была исследована проблема перехода от формул (8.2) к (8.4). Было установлено, что при сравнительно малых  $\tau$  эти формулы дают существенно различающиеся результаты в довольно широком диапазоне частот  $\Omega$ , но с увеличением  $\tau$  этот диапазон быстро уменьшается. Для численной иллюстрации этого факта на фиг. 2 сопоставлены амплитуды  $D_i$  в формуле (8.2) и  $XK_i$ ,  $YK_i$  в формулах (8.4) в районе фазы Эйри первой моды;  $i=1$  относится к нормальному перемещению  $w_0$ ,  $i=3$  — к моменту  $M$ ,  $i=4$  — к поперечной силе  $Q$  кривая 1 изображает  $(-D_i)$  кривые 2 и 3 — соответственно  $(-XK_i)$  и  $YK_i$  при  $\tau = 10$ , кривые 4 и 5 — соответственно  $(-XK_i)$  и  $YK_i$  при  $\tau = 100$ . Видно, что при  $\tau = 100$  амплитуды отличаются при  $\Omega < 0.6$  и  $\Omega > 1.9$  уже незначительно.

10. Случай  $\psi < 1/2$ . В части величин  $w_0$ ,  $W$ ,  $M$  доминирует вклад первой моды, в части  $Q$  — вклад первой и второй мод. Вклад других мод быстро уменьшается с увеличением порядкового номера  $j$ . Максимальные амплитуды мод  $j = 2, 3, 4$  по сравнению с амплитудами моды  $j = 1$  указаны в табл. 4, где все величины даны в процентах.

При  $\psi \rightarrow 0$  можно найти вклад первой моды, подставляя в (5.1) разложения (6.3), (6.5). Этот прием дает контурные интегралы теории Кирхгоффа, для которых известны точные оригиналы [1]. При  $\psi < 1/2$  максимальная погрешность такой аппроксимации вклада первой моды составляет при  $w_0$  — 12%, при  $M$  — 11%, при  $Q$  — 0.2%. В части величин  $w_0$ ,  $M$  превалирует вклад первой моды, поэтому эти величины определяются по теории Кирхгоффа с более или менее приемлемой точностью. Это нельзя сказать относительно  $Q$ .

Теория типа Тимошенко [5,9,14] аппроксимирует вклад первой и второй моды для величин  $W$ ,  $M$ ,  $Q$ . В части первой моды погрешность аппроксимации не превышает 0.5%. Вклад второй моды аппроксимируется гораздо хуже, но суммарная погрешность ап-



Фиг. 2

проксимации вклада двух первых мод не превышает 2%. Практически теория типа Тимошенко обеспечивает при  $\psi < 1/2$  примерно такую же точность, как первые две моды трехмерной теории.

Формулы первого приближения метода седловых точек (8.2) позволяют вычислять контурные интегралы с погрешностью порядка  $\tau^{-1}$ , если определить вклад первой моды в части  $w_0$ ,  $W$ ,  $M$  с учетом поправок от особой точки  $s = 0$  (см. п. 8).

11. *Случай*  $1/2 \leq \psi \leq \psi_R = 0.9274$ . Из численных результатов типа табл. 3 и фиг. 2 следует, что в части  $w_0$ ,  $W$  сохраняется доминирующее значение первой моды. В части

$M$  быстро возрастает роль мод  $j \geq 2$ . Например, при  $\psi = 0.9$  амплитуды моды  $j = 2$  составляют примерно 30%, моды  $j = 3, 4$  — до 11% и моды  $j = 5$  — около 4% от амплитуды первой моды. С возрастанием  $\psi$  постепенно увеличивается значение мод  $j \geq 3$  также в части  $Q$ , но гораздо медленнее, чем в части  $M$ . Если учесть четыре моды, то максимальные амплитуды отброшенных мод составляют в части  $M$  около 5% и в части  $Q$  — около 2% от амплитуд первой моды.

Таблица 4

	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$w_0$	0.11	0.09	0.02
$W$	0.16	0.01	$10^{-4}$
$M$	6.7	2.7	0.47
$Q$	91	9.0	0.08

Одно из характерных свойств рассматриваемого диапазона заключается в существовании фаз Эйри мод  $j \geq 2$ . При  $\psi = \psi_{aj}$ , соответствующей фазе Эйри моды  $j$ , колебания этой моды убывают в  $\tau^{1/2}$  раза медленнее, чем при других значениях  $\psi$ . Следовательно, при очень больших значениях  $\tau$  фазы Эйри должны вырисовываться. Однако при оценке относительной роли мод этот факт существенного значения не имеет, так как случай  $\tau > 1000$  вряд ли представляет практический интерес при применении расчетной модели полубесконечной плиты к расчету инженерных конструкций, имеющих конечную длину.

Для оценки точности двумерных теорий служит табл. 5. При ее составлении в теории типа Тимошенко [5,91,4] был принят (по предложению Миндлина [30]) коэффициент сдвига  $k_T = 0.860$ .

Таблица 5

$\psi$	$j$	Теория Кирхгоффа			Теория типа Тимошенко		
		$D_1$	$D_3$	$D_4$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
0.5	1	-30.11	1.978	0.5061	-25.76	-1.830	-0.5088
	2	—	—	—	0.03735	-0.1129	0.4513
0.6	1	-19.08	1.804	0.5544	-15.08	-1.648	-0.5741
	2	—	—	—	0.04921	-0.1528	0.4986
0.7	1	-12.98	1.670	0.5989	-9.216	-1.499	-0.6469
	2	—	—	—	0.06207	-0.1997	0.5439
0.8	1	-9.298	1.562	0.6402	-5.702	-1.372	-0.7381
	2	—	—	—	0.07574	-0.2549	0.5881
0.9	1	-6.926	1.473	0.6791	-3.424	-1.265	-0.8858
	2	—	—	—	0.08991	-0.3204	0.6314

Из сопоставления данных табл. 3, 5 следует, что погрешность теории Кирхгоффа быстро возрастает с увеличением  $\psi$ . При  $\psi = 0.9$  разница в части  $w_0$  является уже примерно двукратной, в части  $M$ ,  $Q$  она также весьма большая. Это, конечно, можно было бы предвидеть на основе табл. 1.

Вследствие доминирующей роли первой моды в части  $W$  эта величина определяется по теории Тимошенко довольно удачно. В части  $M$ ,  $Q$  аппроксимация станет довольно грубой при  $\psi > 0.7$ , хотя вклад седловых точек  $j = 1, n = 1$  и  $j = 2, n = 1$  определяется с небольшой погрешностью.

Это связано (при  $\psi > 0.7$ ) с существенным вкладом (особенно в части  $M$ ) других седловых точек моды  $j = 2$ , а также седловых точек мод  $j = 3, 4$ .

12. *Случай*  $\psi_R < \psi \leq 1,00744$ . Верхний предел этого диапазона определяется фазой Эйри первой моды (максимальным значением  $\psi_1(\Omega)$ ). В связи с фазой Эйри первой моды относительная роль мод здесь существенно зависит от  $\tau$ . Если ограничиваться случаем  $10 < \tau < 1000$ , тогда в части  $w_0, W$  вклад первой моды 5–10 раз превышает вклад второй моды, а в части  $M, Q$  первая и вторая моды имеют примерно одинаковое значение. Существенно возрастает вклад следующих мод. Для надежного определения  $M, Q$  следует учесть 4–5 мод.

Теория Кирхгоффа неприменима. Погрешность теории типа Тимошенко увеличивается не только в связи с ростом вклада мод  $j \geq 3$ , а также за счет существенного роста погрешности аппроксимации вклада мод  $j = 1, 2$ . Действительно, вклады седловых точек  $n = 1, n = 2$  второй моды являются в данном случае примерно одинаковыми, но теория типа Тимошенко аппроксимирует только вклад точек  $n = 1$ ; вклад седловых точек  $n = 2$  первой моды определяется совершенно неправильно при  $\Omega > 4$  (это можно было бы предсказать на основе табл.1), кривая  $\psi_1(\Omega)$  отклоняется от правильной в районе ее максимума (фазы Эйри). В связи с указанным теория типа Тимошенко дает для  $M$  и  $Q$  ненадежные результаты, а для  $W$  — более или менее приемлемые результаты лишь при  $0.95 \leq \psi \leq 0.98$ .

*Примечание.* Миклович обратил внимание на это явление в работе [15]. Он предлагал исключить из рассмотрения (при применении теории типа Тимошенко) узкий диапазон значений  $\psi$  около  $\psi_R$ . Из данной работы следует, что этот прием может иметь некоторое значение только в части  $W$ .

13. *Случай*  $\psi > 1.00744$ . Вклад первой моды отсутствует, если не учесть экспоненциально затухающие волны, связанные с седловыми точками вне мнимой оси. Вклад следующих мод убывает с ростом  $j$  медленнее, чем в ранее рассмотренных диапазонах  $\psi$ . До выключения второй моды ( $\psi \leq 1.18313$ ) можно получить более или менее надежные результаты, учитывая 5–6 мод. При больших значениях  $\psi$  приходилось бы учитывать возрастающее число более высоких мод, что делает принятый математический аппарат практически малоэффективным. Чем больше  $\psi$ , тем больше деформируются поперечные сечения плиты, но величины  $w_0, W$  быстро убывают с ростом  $\psi$ . Двумерные теории Кирхгоффа и типа Тимошенко неприменимы.

14. Изложенные выводы о применимости основывались на результатах, полученных методом седловых точек для случая  $\tau \gg 1$ . Однако, исходя из данных типа табл.1; 2 и учитывая (5.4), нетрудно прийти к выводу, что в начале движения роль мод  $j > 2$  увеличивается и соответственно точность теории типа Тимошенко скорее уменьшается, чем повышается.

С другой стороны, следует отметить, что при изучении волновых процессов в реальных конструкциях теория типа Тимошенко может дать более хорошие результаты, чем в рассмотренном примере. В пользу ее точности действует более плавное изменение нагрузки по времени, а также затухание за счет поглощения энергии, что уменьшает относительную роль волновых групп большой частоты.

Автор приносит благодарность А. Ю. Мяннил, программировавшей и выполнившей численные расчеты.

Поступила 5 VI 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. J o n e s R. P. N. The wave method for solving flexural vibration problems. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, № 1.
3. С о к о л о в Ф. А. Колебания свободной пластинки и пластинки на упругом основании действием динамической нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 6.
4. M e d i s k M. A. On classical plate theory and wave propagation. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, № 1.
5. У ф л я н д Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.

6. D e n g l e r M. A., G o l a n d M. Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects. Proc. of the First National Congress on Appl. Mech., New York, 1952.
7. A n d e r s o n R. A. Wave groups in the flexural motion of beams predicted by the Timoshenko theory. J. Appl. Mech., 1954, Vol. 21, № 4.
8. G o l a n d M., W i c k e r s h a m P. D., D e n g l e r M. A. Propagation of elastic impact in beams in bending. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, № 1.
9. B o l e y B. A., C h a o C. C. Some solutions of the Timoshenko beam equations. J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, № 4.
10. D e n g l e r M. A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. Österr. Ingr.-Arch., 1956, Bb. 10, № 1.
11. B o l e y B. A. On the use of sine transforms in Timoshenko beam impact problems J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 1.
12. B o l e y B. A., C h a o C. C. An approximate analysis of Timoshenko beams under dynamic loads. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, № 1.
13. Д у б и н к и н М. В. О распространении волн в бесконечных плитах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
14. F l ü g g e W., Z a j a c E. E. Bending impact waves in beams. Ing.-Arch., 1959, Bd. 28, S. 59.
15. M i k l o w i t z J. Flexural stress waves in an infinite elastic plate due to a suddenly applied concentrated transverse load. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, № 4.
16. F o l k R., F o x G., S h o o k C. A., C u r t i s C. W. Elastic strain produced by sudden application of pressure to one end of a cylindrical bar. I. Theory. J. Acoust. Soc. Amer., 1958, vol. 30, № 6.
17. D e V a u l t G. P., C u r t i s C. W. Elastic cylinder with free lateral surface and mixed-time-dependent end conditions. J. Acoust. Soc. Amer., 1962, vol. 34, № 4.
18. S k a l a k R. Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 1.
19. M i k l o w i t z J. Transient compressional waves in an elastic plate or elastic layer overlying a rigid halfspace. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, № 1.
20. J o n e s O. E., E l l i s A. T. Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars. Part 1 — theoretical considerations. J. Appl. Mech., 1963, № 1.
21. Н и г у л У. К. О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и тех. наук, 1963, № 2.
22. L o r d R a y l e i g h. On the free vibrations of an infinite plate of homogenous isotropic elastic matter. Proc. of the London Mathem. Soc., 1888—1889, vol. 20, p. 225.
23. L a m b H. On waves in elastic plate. Proc. Roy. Soc., A, 1917, vol. 93, p. 114.
24. Н и г у л У. К. О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и тех. наук, 1963, № 3 (будет опубликована).
25. M i n d l i n R. D. Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. «Structural Mechanics», Perg. Press, 1960, p. 199.
26. T o l s t o y I., U s d i n E. Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion. J. Acoust. Soc. Amer., 1957, vol. 29, № 1.
27. Л у р ь е А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, стр. 152.
28. М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, ИИЛ, М., 1958, стр. 415—418.
29. В а к м а н Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. Изд. «Советское радио», М., 1962.
30. M i n d l i n R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, № 1.