

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

И. Г. Филиппов

(Москва)

Рассматриваются задачи дифракции плоских упругих и электромагнитных волн около контуров или тел произвольной формы. Эти задачи решаются методом, развитым в работе [1].

Такого рода задачи рассматривались, например, в работах С. Л. Соболева [2], А. Ф. Филиппова [3] и И. Н. Корбанского [4] и др.

В работах [2,3] рассматривалась дифракция упругих волн около прямолинейных разрезов или бесконечных острых ребер методом, отличным от излагаемого ниже.

В качестве примеров даются решения задач дифракции около кругового цилиндра и шара.

§ 1. Постановка общей задачи дифракции плоских упругих волн и решение двумерных задач. При решении плоских и пространственных задач дифракции плоских упругих волн будем предполагать, что уравнения движения упругой среды, окружающей тело, вообще говоря, нелинейны. Упругую среду будем считать изотропной. Будем рассматривать нелинейность физического типа, т. е. будем предполагать, что составляющие тензора напряжений упругой среды нелинейно зависят от составляющих тензора деформаций.

Иными словами, принимая гипотезу малости деформаций, будем считать среду не подчиняющейся закону Гука и будем решать задачи с учетом малых нелинейных членов в уравнениях движения упругой среды.

Предположим, например, что зависимость компонентов тензора напряжений от компонентов тензора деформаций имеет вид (закон упругости Мурнагана [5])

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda A_0 + 2\mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{xx} + \beta_2 A_0^2 - \beta_1 A_1 + \beta_3 (\varepsilon_{xx}^2 + 1/4 \varepsilon_{xy}^2 + 1/4 \varepsilon_{xz}^2) \\ \sigma_{yy} &= \lambda A_0 + 2\mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{yy} + \beta_2 A_0^2 - \beta_1 A_1 + \beta_3 (\varepsilon_{yy}^2 + 1/4 \varepsilon_{yz}^2 + 1/4 \varepsilon_{xy}^2) \\ \sigma_{zz} &= \lambda A_0 + 2\mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{zz} + \beta_2 A_0^2 - \beta_1 A_1 + \beta_3 (\varepsilon_{zz}^2 + 1/4 \varepsilon_{xz}^2 + 1/4 \varepsilon_{yz}^2) \\ \sigma_{yx} &= \mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{xy} + \beta_3 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{xy} + 1/2 \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}] \\ \sigma_{yz} &= \mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{yz} + \beta_3 [(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{yz} + 1/2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz}] \\ \sigma_{zx} &= \mu (1 + \beta_1 A_0) \varepsilon_{xz} + \beta_3 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{xz} + 1/2 \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xy}]\end{aligned}\quad (1.1)$$

где A_0, A_1, A_2 — инварианты тензора деформаций; $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — упругие константы. При $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ получаем закон Гука.

В соотношениях (1.1) нелинейные члены будут четными функциями от компонентов тензора деформаций.

В случае нечетной зависимости можно считать, что

$$\sigma_{xx} = \lambda A_0 + 2\mu (1 + \gamma_1 A_0^2 + \gamma_2 A_1) \varepsilon_{xx} + \gamma_3 A_0^3 - (2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) A_0 A_1 + \gamma_4 A_2 + \gamma_1 A_0 [\varepsilon_{xx}^2 + 1/4 \varepsilon_{xy}^2 + 1/4 \varepsilon_{xz}^2] \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xy} = \mu (1 + \gamma_1 A_0^2 + \gamma_2 A_1) \varepsilon_{xy} + \gamma_4 A_0 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{xy} + 1/2 \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}]$$

Выражения для σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz} , σ_{zx} получаются круговой перестановкой.

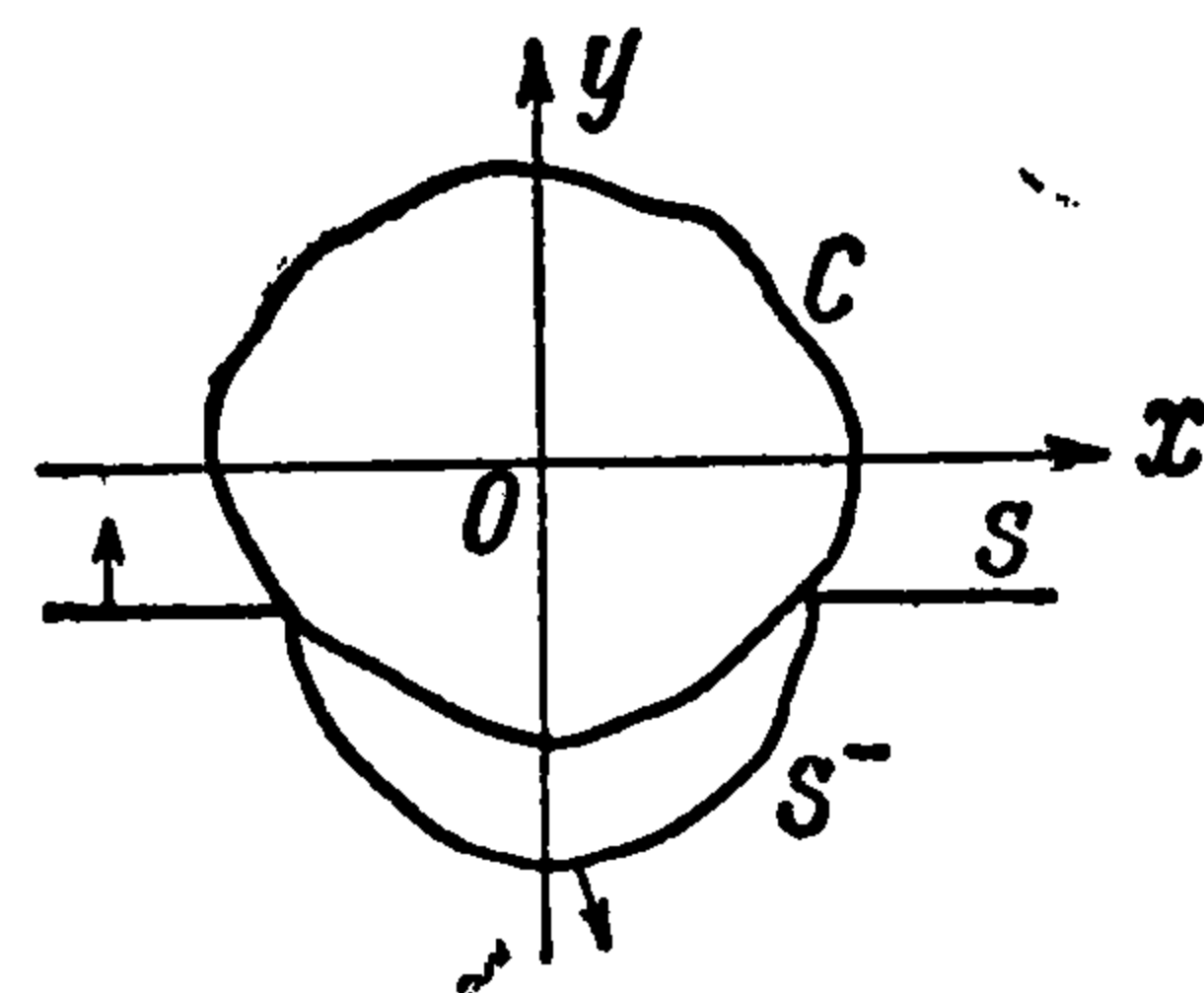
Но и в случае соотношений (1.1) и (1.2) уравнения движения упругой среды очень сложны. Введем одно упрощающее предположение.

Будем рассматривать такие упругие среды, для которых влияние давления на напряжения сдвига σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz} сказывается меньше, чем на напряжения сжатия σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , т. е. будем полагать приближенно $\beta_1 = \beta_3 = 0$ или $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$, считая зависимость напряжений сдвига от компонентов тензора деформаций линейной.

Перейдем к постановке и решению задачи дифракции плоской упругой волны около произвольного контура C (фиг. 1), принимая за начало дифракции момент времени $t = 0$.

Выразим составляющие вектора смещения u и v через потенциалы Φ и Ψ продольной и поперечной волн посредством формул

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Можно показать, что при отсутствии внешних сил потенциалы Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + F(\Delta \Phi) = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$b^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

Здесь ρ — плотность среды, a и b — скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно и

$$F(\Delta \Phi) = (\beta_2 / \rho) (\Delta \Phi)^2 \quad \text{или} \quad F(\Delta \Phi) = (\gamma_3 / \rho) (\Delta \Phi)^3$$

в случае соотношений (1.1) или (1.2) соответственно.

Рассмотрим задачу дифракции упругой или слабой ударной волны на контуре C (фиг. 1), жестко связанным с упругой средой, и в дальнейшем для определенности ограничимся данной задачей.

Для данной задачи граничные условия для Φ и Ψ принимают вид

$$q_1(\xi_2, t) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} = \varepsilon(\xi_2, t)$$

$$q_2(\xi_2, t) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{на } C$$

где ξ_1 , ξ_2 — произвольные ортогональные координаты, связанные с контуром C , причем при $\xi_1 = \xi_{10}$ получаем сам контур; h_1 , h_2 — коэффициенты Ляме; q_1 и q_2 — составляющие вектора смещения среды; $\varepsilon(\xi_2, t)$ — величина деформации контура C при воздействии на него упругой волны.

Вначале будем предполагать, что контур C является абсолютно жестким, т. е. $\varepsilon(\xi_2, t) = 0$.

Кроме того, потенциалы Φ и Ψ должны удовлетворять условиям

$$\Phi = \Phi_0, \quad \Psi = \Psi_0 \text{ при } t \leq 0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad \Psi = \Psi_0 \text{ при } t > 0 \quad (1.5)$$

на фронте отраженной упругой волны, где Φ_0 и Ψ_0 — потенциалы падающей упругой волны. Не ограничивая общности задачи, будем считать падающую волну продольной, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \alpha_0 (y - ta), & \Psi_0 &= 0 \text{ при } (y - ta) \leq 0, & \alpha_0 &= \Delta \sigma l / (\rho a^2) \\ \Phi_0 &= \Psi_0 = 0 & & \text{ при } (y - ta) > 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta \sigma$ — перепад напряжения на фронте падающей волны, $2l$ — максимальный диаметр контура, ρ — плотность среды.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} x_1 &= x / l, & y_1 &= y / l, & \tau &= at / l, & b_1 &= b / a \\ \Phi_1 &= \Phi / l^2, & \Psi_1 &= \Psi / l^2, & \alpha &= \alpha_0 / l \end{aligned}$$

и в дальнейшем для простоты нижние индексы у безразмерных величин опускаем. В уравнениях (1.3) — (1.5) положим

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) + \varphi(x, y, \tau), \quad \Psi(x, y, \tau) = \psi(x, y, \tau) \quad (1.7)$$

Тогда задача дифракции сведется к определению потенциалов φ и ψ , удовлетворяющих уравнениям и условиям

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + F(\Delta \varphi) &= 0, & \Delta \psi - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} &= -\alpha \frac{\partial y}{\partial \xi_1} - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} &= \frac{\alpha h_1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \quad \text{на } C \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\varphi = \psi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, \quad \varphi = \psi = 0 \quad \text{на отраженной волне}$$

Систему (1.8) будем решать, полагая

$$\varphi(x, y, \tau) = \varphi_1(x, y, \tau) + \varphi_2(x, y, \tau) + \dots, \quad \psi(x, y, \tau) = \psi_1(x, y, \tau) \quad (1.9)$$

где φ_i — величины i -го порядка малости.

Подставляя (1.9) в (1.8), получим две системы для определения φ_1 , φ_2 и ψ_1 соответственно

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} &= 0, & \Delta \psi_1 - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} &= -\alpha \frac{\partial y}{\partial \xi_1} - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} &= \frac{\alpha h_1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} \quad \text{на } C \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\varphi_1 = \psi_1 = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, \quad \varphi_1 = \psi_1 = 0 \quad \text{на } S^-$$

$$\Delta \varphi_2 - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} + F(\Delta \varphi_1) = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{на } C, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } \tau > 0 \quad \text{на } S^-$$

Как и в случае задачи дифракции слабой ударной волны [1] на контуре C , имеют место

Теорема 1.1. Задача (1.10) эквивалентна смешанной задаче Коши в пространстве (x, y, τ) или внешней вспомогательной задаче обтекания двумя установившимися сверхзвуковыми $M = \sqrt{2}$, $M = \sqrt{1 + b^{-2}}$ потоками идеального газа полого полубесконечного по оси τ ($\tau \geq 0$) цилиндра (фиг. 2), соответствующего контуру C , под малым углом атаки α .

Теорема 1.2. Задача (1.11) эквивалентна задаче Коши в пространстве (x, y, τ) или задаче дифракции слабой ударной волны около контура C во втором приближении [6].

В силу теоремы 1.1, используя метод работы [1], для значений φ_1 и φ_2 на контуре C получим следующую систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\frac{\varphi_1(x, y, \tau)}{h_1} \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \frac{V}{h_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} \right] d\sigma \right\} \\ \psi_1(x_0, y_0, \tau_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma_1} \left[\frac{\psi_1(x, y, \tau)}{h_1} \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} - \frac{V_1}{h_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} \right] d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где Σ и Σ_1 — части поверхности цилиндра во вспомогательной задаче отсекаемые конусами влияния из точки (x_0, y_0, τ_0) ; функция Вольтерра

$$\begin{aligned} V &= \ln \frac{(\tau_0 - \tau) + \sqrt{(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2}}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} \\ V_1(\tau_0 - \tau, \dots) &= V(b(\tau_0 - \tau), \dots) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Аналогично

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \frac{\varphi_2(x, y, \tau)}{h_1} \frac{\partial V}{\partial \xi_1} d\tau + \iiint_T F(\xi, \eta, \zeta) V d\xi d\eta d\zeta \right\} \quad (1.14)$$

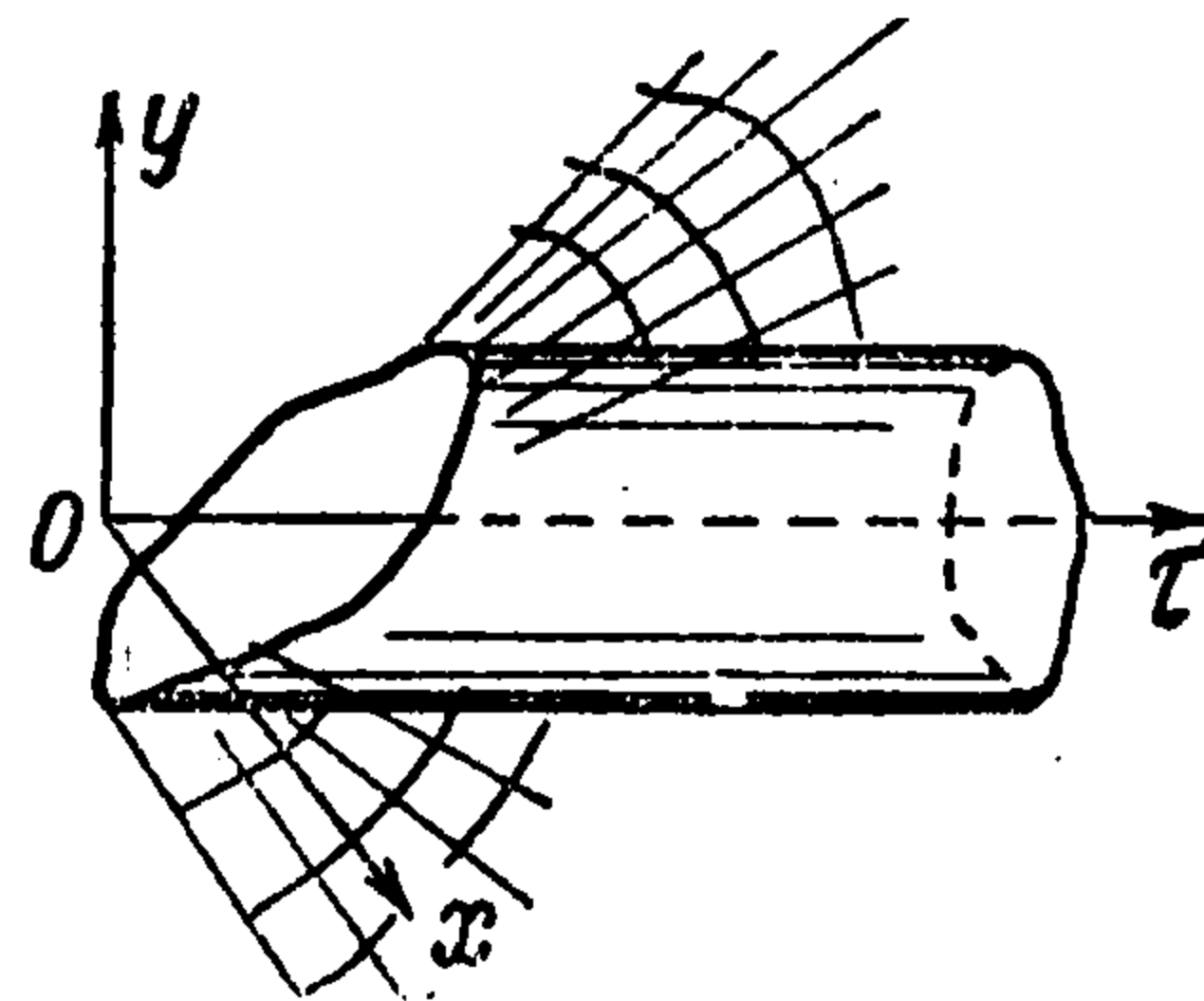
где T — объем, ограниченный поверхностью цилиндра, поверхностью конуса влияния из точки (x_0, y_0, τ_0) и волновой поверхностью вспомогательной задачи.

Задача (1.8) обобщается [1] на случай деформируемого контура и когда

$$\Phi_0(x, y, \tau) = f(y - \tau) \quad (1.15)$$

Аналогично решается задача дифракции поперечной падающей волны, а следовательно, и произвольной упругой волны при

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y, \tau) &= \alpha(y - \tau) \\ \Psi_0(x, y, \tau) &= (\Delta \sigma_1 / \rho a^2)(y - b\tau) \end{aligned} \quad (1.16)$$



Фиг. 2

1°. Рассмотрим частный случай задачи, когда контур C является кругом единичного радиуса.

В данном случае решение задачи дается формулами (1.12), (1.14), где необходимо положить

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \cos \theta \quad \text{при } r = 1$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты.

Можно построить асимптотическое решение задачи (1.10) — (1.11) при больших значениях τ для круга.

На самом деле радиус отраженной волны при больших τ слабо зависит от θ , и можно приближенно считать

$$\varphi_1(x, y, \tau) = -\alpha \sin \theta f_1(r, \tau), \quad \psi_1(x, y, \tau) = \alpha \cos \theta f_2(r, \tau) \quad (1.17)$$

Можно показать, что

$$f_1(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C_1(q) K_1(rq) e^{q\tau} dq, \quad f_2(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C_2(q) K_1(rqb^{-1}) e^{q\tau} dq \quad (1.18)$$

$$C_1(q) = \frac{1}{q} \frac{-K_1(qb^{-1}) + qb^{-1} K_1'(qb^{-1})}{-K_1(q) K_1(qb^{-1}) + q^2 b^{-1} K_1'(q) K_1'(qb^{-1})}$$

$$C_2(q) = \frac{1}{q} \frac{-K_1(q) + q K_1'(q)}{-K_1(q) K_1(qb^{-1}) + q^2 b^{-1} K_1'(q) K_1'(qb^{-1})}$$

где L — контур интегрирования при применении обратного преобразования Лапласа, K_1 — функция Бесселя мнимого аргумента. Аналогично, полагая

$$\varphi_2(x, y, \tau) = \alpha^2 [f_3(r, \tau) + \cos 2\theta f_4(r, \tau)] \quad (1.19)$$

получим

$$f_3(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_0(r, q) K_0(rq) + B_0(r, q) I_0(rq)] e^{q\tau} dq \quad (1.20)$$

$$f_4(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_1(r, q) K_2(rq) + B_1(r, q) I_2(rq)] e^{q\tau} dq$$

где

$$A_i(r, q) = - \left\{ \int_r^\infty (-1)^i F_2(r, q) I_{i+1}(rq) r dr + \frac{I'_{i+1}(q)}{K'_{i+1}(q)} \int_1^\infty (-1)^i F_2(r, q) I_{i+1}(rq) r dr - \int_1^\infty (-1)^{i+1} F_2(r, q) K_{i+1}(rq) r dr \right\}$$

$$B_i(r, q) = - \int_r^\infty (-1)^{i+1} F_2(r, q) K_{i+1}(rq) r dr \quad (i = 0, 1)$$

$$F_2(r, q) = \int_0^\infty F_1(r, \tau) e^{-q\tau} d\tau, \quad F(x, y, \tau) = (1 - \cos 2\theta) F_1(r, \tau)$$

По найденным значениям φ_1 , ψ_1 и φ_2 можно определить остальные параметры задачи; в частности, можно определить величины радиального σ_{rr} , кольцевого напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и напряжения сдвига $\sigma_{\theta r}$ на круге. В случае деформируемого круга также можно [6] построить решение при больших значениях τ .

Если зависимость деформации круга $\varepsilon(\theta, \tau)$ от $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ имеет вид

$$\varepsilon(\theta, \tau) = k_1 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) / 2[(\lambda + \mu) \rho a^2] \quad (1.21)$$

то в формулах (1.18) необходимо положить

$$C_1(q) = \frac{1}{q} \frac{-K_1(qb^{-1}) + qb^{-1} K_1'(qb^{-1})}{-K_1(q) K_1(qb^{-1}) + q^2 b^{-1} K_1'(q) K_1'(qb^{-1}) - k_1 q^3 b^{-1} K_1(q) K_1'(qb^{-1})}$$

$$C_2(q) = \frac{1}{q} \frac{-K_1(q) + q K_1'(q) - k_1 q^3 K_1(q)}{-K_1(q) K_1(qb^{-1}) + q^2 b^{-1} K_1'(q) K_1'(qb^{-1}) - k_1 q^3 b^{-1} K_1(q) K_1'(qb^{-1})}$$

Соответствующим образом изменятся и A_i , B_i ($i = 0; 1$) в формулах (1.20).

2°. Рассмотрим более сложную задачу, когда контур, например, в виде круга единичного радиуса находится в среде, ограниченной одной или двумя параллельными стенками и фронт падающей упругой волны нормален к стенкам (фиг. 3).

Влияние стенок можно учесть, рассматривая вместо одного круга решетку кругов, центры которых расположены на одной прямой на расстоянии $2l_1$ один от другого и фронт упругой волны параллелен прямой центров кругов. Выберем величину l_1 такой, чтобы влияние стенок сказывалось после прохождения круга упругой волной.

Теорема 1.1 имеет силу и в данном случае с той лишь разницей, что вместо одного цилиндра во вспомогательной задаче будем рассматривать бесконечный ряд цилиндров, и вспомогательная задача будет описываться системой (1.8) или (1.10) — (1.11) с краевыми условиями, заданными на всех цилиндрах.

Решения систем (1.10) — (1.11) будут иметь вид:

$$\varphi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma_i} \left[\varphi_1(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} V \right] d\sigma \right\}$$

$$\psi_1(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma_{i1}} \left[\psi_1(x, y, \tau) \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} V_1 \right] d\sigma \right\}$$

и, аналогично,

$$\varphi_2(x_0, y_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma_i} \varphi_2(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial r} d\sigma + \right. \\ \left. + \iiint_{T_1} F(x, y, \tau) V dx dy d\tau \right\} \quad (i = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

Здесь Σ_i и Σ_{i1} — части поверхностей цилиндров, отсекаемые конусами влияния из точки (x_0, y_0, τ_0) , а T_1 — соответствующий объем, ограниченный поверхностью конуса влияния, поверхностями цилиндров Σ_i и общей волновой поверхностью.

Нетрудно видеть, что в (1.22) и (1.23) под интегралом φ_1 , ψ_1 и φ_2 не известны лишь на поверхностях Σ_0 и Σ_{01} , так как значения функций φ_1 , ψ_1 , φ_2 на остальных поверхностях совпадают со значениями этих функций на поверхностях Σ_0 и Σ_{01} , найденными для более ранних значений безразмерного времени τ .

Решения (1.22) и (1.23) можно также обобщить на случай деформируемого контура.

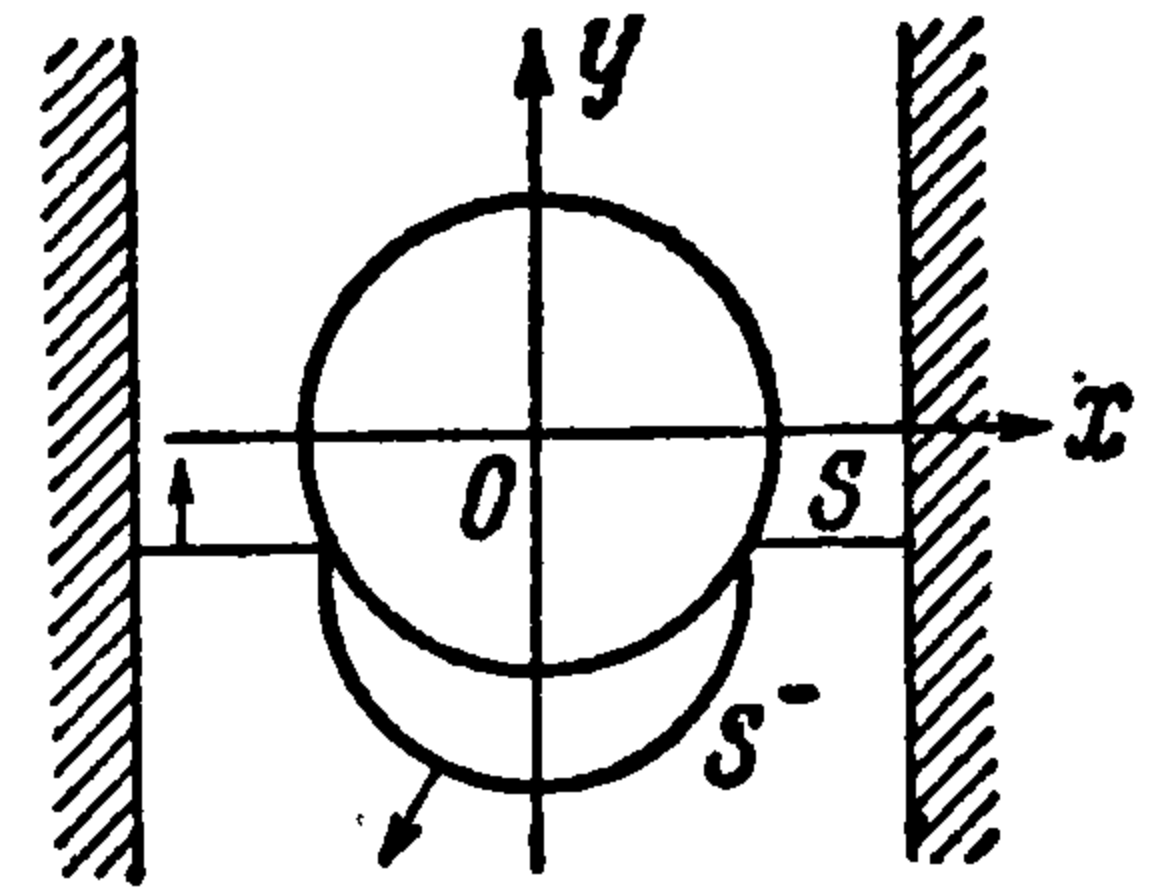
§ 2. Постановка и решение пространственной задачи дифракции плоской упругой волны. Эту задачу можно решить при довольно широких предположениях. Для простоты изложения рассмотрим задачу дифракции упругой волны на сфере единичного радиуса (фиг. 4) при ограничениях, изложенных в начале § 1.

Задачу будем формулировать в сферических координатах (r, θ, ϑ) . Очевидно, что в силу симметрии задачи неизвестные функции от угла ϑ не зависят. Вектор смещения имеет лишь две составляющие

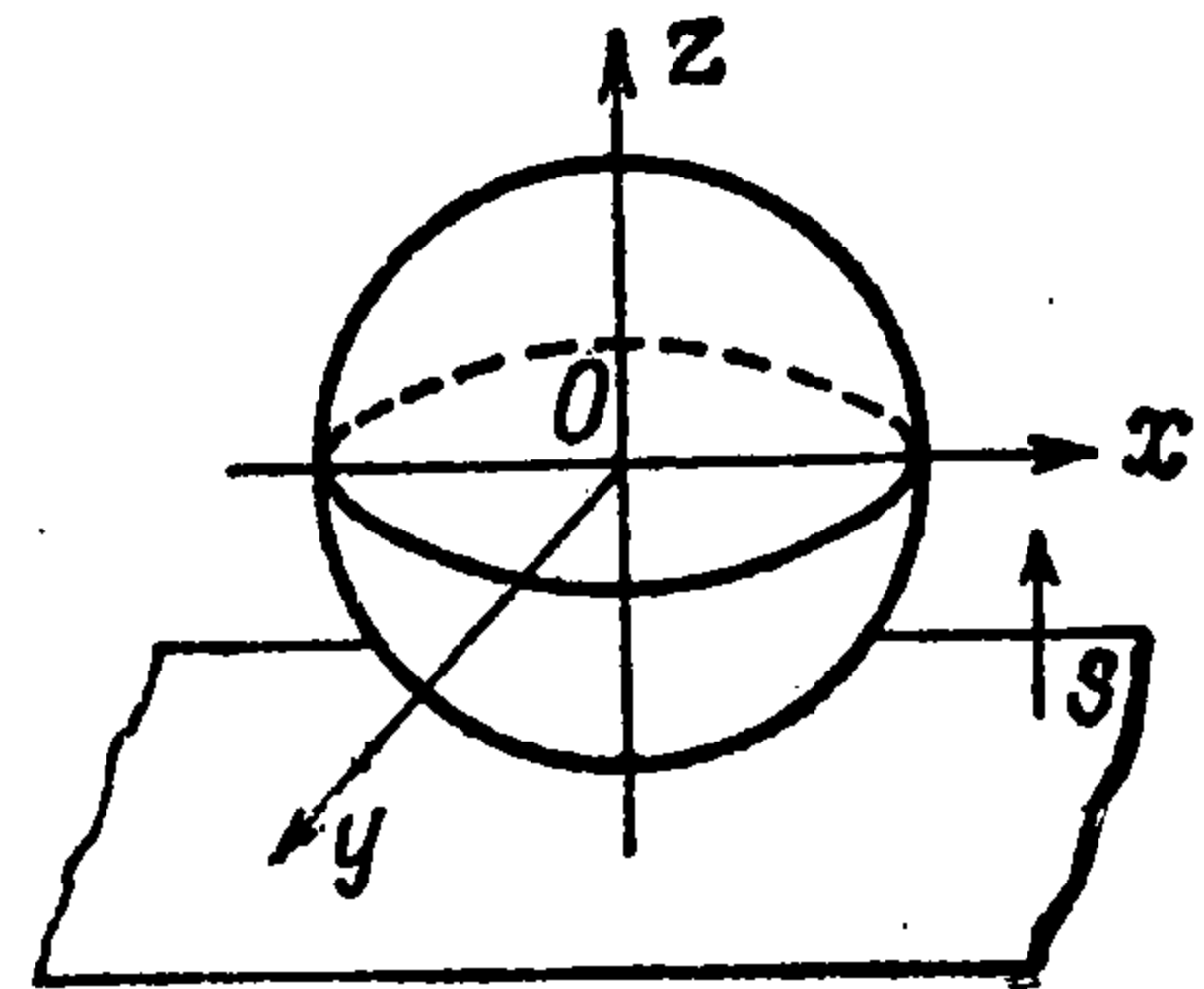
$$q_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi), \quad q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) \quad (2.1)$$

Потенциалы Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - F(\Delta \Phi) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{b^2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Предполагая, что дифракция упругой волны на сфере начинается при $\tau = 0$ и полагая

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad \Psi = \psi_1, \quad \Phi_0 = \alpha (z - \tau) \quad (2.3)$$

задачу сведем к решению волновых уравнений для Φ_1, Φ_2, ψ_1 с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} &= \Delta \Phi_1, & \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} &= \Delta \Phi_2 + F(\Delta \Phi_1), & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} &= \Delta \psi_1 b^2 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= -\alpha \cos \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi_1), & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= -\alpha \sin \theta + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - \psi_1 \quad \text{при } r = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \psi_1 = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \psi_1 = 0 \quad \text{при } \tau > 0 \quad \text{на } S^-$$

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 2.1. Задача дифракции упругой волны на сфере, описываемая системой (2.4), эквивалентна [6] смешанной задаче Коши или вспомогательной задаче обтекания четырехмерного соответствующего полого полубесконечного по оси τ цилиндра сверхзвуковыми $M = \sqrt{2}$ и $M = \sqrt{1 + b^{-2}}$ установившимися потоками идеального газа под малым углом атаки α .

Решая вспомогательную задачу методом, аналогичным методу Вольтерра для трехмерных задач, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(1, \theta_0, \tau_0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{T_0} \left[\Phi_1(1, \theta, \tau) \frac{\partial V^1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} V^1 \right] d\theta d\tau d\vartheta \right\} \\ \Phi_2(1, \theta_0, \tau_0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{T_0} \Phi_2(1, \theta, \tau) \frac{\partial V^1}{\partial r} d\theta d\tau d\vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \iiint_Q F(r, \theta, \tau) V^1 dr d\theta d\tau d\vartheta \right\} \\ \psi_1(1, \theta_0, \tau_0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{T_1} \left[\psi_1(1, \theta, \tau) \frac{\partial V_1^1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} V_1^1 \right] d\theta d\tau d\vartheta \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь T_0 и T_1 — части поверхности четырехмерного цилиндра, отсекаемые конусами влияния [4] из точки $(1, \theta_0; \tau_0, \vartheta_0)$ [6]; Q — четырехмерный объем, ограниченный поверхностью конуса влияния, поверхностью T_0 и волновой поверхностью; функция

$$\begin{aligned} V^1 &= 1 - (\tau_0 - \tau) / \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} \\ V_1^1(\tau_0 - \tau, \dots) &= V^1(b(\tau_0 - \tau), \dots) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как и в случае плоских задач, можно найти асимптотическое решение задачи (2.4) при больших τ .

Можно показать, что при больших значениях τ

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau, \theta, \tau) &= -\frac{\alpha \cos \theta}{2\pi i \sqrt{r}} \int_z C_3(q) K_{3/2}(rq) e^{q\tau} dq \\ \psi_1(r, \theta, \tau) &= -\frac{\alpha \sin \theta}{2\pi i \sqrt{r}} \int_L C_4(q) K_{3/2}(rqb^{-1}) e^{q\tau} dq \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$C_3(q) = \frac{1}{q} \frac{qb^{-1}K_{3/2}'(q) - K_{3/2}(qb^{-1})}{q^2b^{-1}K_{3/2}'(q)K_{3/2}'(qb^{-1}) + qK_{3/2}''(q)K_{3/2}(qb^{-1}) - 2K_{3/2}(q)K_{3/2}(qb^{-1})}$$

$$C_4(q) = \frac{1}{q} \frac{qK_{3/2}'(q) - K_{3/2}(q)}{q^2b^{-1}K_{3/2}'(q)K_{3/2}'(qb^{-1}) + qK_{3/2}''(q)K_{3/2}(qb^{-1}) - 2K_{3/2}(q)K_{3/2}(qb^{-1})}$$

Аналогично можно записать решение для функции $\varphi_2(r, \theta, \tau)$.

Задачу (2.4) можно обобщить [1] на случай деформируемой сферы и при

$$\Phi_0(x, y, z, \tau) = f(z - \tau) \quad (2.8)$$

§ 3. К теории дифракции плоских электромагнитных волн. Рассматриваются нестационарные задачи дифракции плоских электромагнитных волн около выпуклых идеально проводящих тел вращения, когда волна распространяется вдоль оси вращения.

Предположим, что на идеально проводящее тело вращения, окруженное однородным диэлектриком с параметрами ϵ^0 и μ^0 , падает плоская электромагнитная волна, которая на поверхности тела возбуждает поверхностные токи, которые, в свою очередь, становятся источником дифрагированного или рассеянного поля.

Векторы напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\epsilon^0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu^0}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

и граничному условию

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2] = 0 \quad (3.2)$$

на поверхности идеально проводящего тела, где \mathbf{n} — нормаль к телу; \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — напряженности электрического поля падающей и рассеянной волн на поверхности тела соответственно; c — скорость света.

Ввиду симметрии задачи относительно координаты вращения положим

$$E_{\xi_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_2 \Pi) \right], \quad E_{\xi_2} = -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_2 \Pi) \right]$$

$$E_{\xi_3} = H_{\xi_1} = H_{\xi_2} = 0, \quad H_{\xi_3} = \frac{\epsilon^0}{c} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 (h_2 \Pi)}{\partial \xi_2 \partial t}$$
(3.3)

где функция Π называется потенциалом поля, или потенциалом Герца.

При выводе соотношений (3.3) вектор Герца \mathbf{G} принимается

$$\mathbf{G} = \{0, e_2 \Pi, 0\} \quad (3.4)$$

Если

$$\mathbf{G} = \{e_1 \Pi, 0, 0\} \quad (3.5)$$

то в (3.3) в круглых скобках вместо $h_2 \Pi$ необходимо положить $h_1 \Pi$.

Подставляя (3.3) в (3.1), для потенциала Π получим волновое уравнение в общих криволинейных ортогональных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} \right) \right] = \frac{\epsilon^0 \mu^0}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Здесь h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ляме.

В силу того что для тела вращения

$$h_1 = h_1(\xi_1, \xi_2), \quad h_2(\xi_1, \xi_2) = h_2, \quad h_3 = h_3^1(\xi_1, \xi_2) / \sqrt{1 - \xi_3^2}$$

коэффициенты уравнения (3.4) от ξ_3 не зависят, и, следовательно, функция $\Pi = \Pi(\xi_1, \xi_2)$. Условие (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_2 \Pi) \right] = 0 \quad \text{при } \xi_1 = \xi_{10} \quad (3.7)$$

где $\xi_1 = \xi_{10}$ — уравнение поверхности тела.

Потенциал Π удовлетворяет также условиям

$$\Pi = \Pi_0(x, y, z, t) \quad \text{при } t \leq 0, \quad \Pi = \Pi_0(x, y, z, t) \quad \text{при } t > 0 \quad (3.8)$$

на границе рассеянного или дифрагированного поля. Положим

$$\Pi(x, y, z, t) = \Pi_0(x, y, z, t) + \varphi(x, y, z, t) \quad (3.9)$$

где Π_0 — потенциал падающего поля, и подставим (3.9) в уравнение (3.6) и в условия (3.7) и (3.8). Тогда для определения возмущенного потенциала $\varphi(x, y, z, t)$ получим систему

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3 h_1}{h_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) \right] = \frac{\varepsilon^0 \mu^0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_2} \int \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\ln \frac{h_3}{h_1} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_3}{h_1} \ln h_2 \right) \Pi \right\} d\xi_2$$

при $\xi_1 = \xi_{10}$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t \leq 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } S^-$$

Рассмотрим частные задачи.

1. Дифракция плоской электромагнитной волны около кругового бесконечного цилиндра. Будем предполагать, что фронт падающей электромагнитной волны параллелен оси z . Полагая для простоты

$$\Pi_0 = \alpha \left(y - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^0 \mu^0}} t \right) \quad (3.11)$$

систему (3.10) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\varepsilon^0 \mu^0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \frac{\alpha}{r_0} \sin \theta \quad \text{при } r = r_0 \quad (3.12)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t \leq 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{при } t > 0 \quad \text{на } S^-$$

Здесь α — некоторая малая величина, вводимая для удобства решения задачи, и ее, в конечном итоге можно исключить; r, θ — полярные координаты.

Легко видеть, что система (3.12) описывает также задачу дифракции слабой ударной волны около круга [1].

Следовательно, [1] $\varphi(r, \theta, t)$ на поверхности круга удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\varphi(1, \theta_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\varphi(1, \theta, \tau) \frac{\partial V}{\partial r_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} V \right] d\sigma \right\} \quad (3.13)$$

$$r_1 = r / r_0, \quad \tau = at / r_0, \quad a = c / \sqrt{\mu^0 \varepsilon^0}$$

где Σ — поверхность цилиндра во вспомогательной задаче, отсекаемая конусом влияния из точки $(r / r_0 = 1, \theta_0, \tau_0)$.

При больших значениях τ (или t)

$$\varphi(r_1, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{K_1(r_1 q)}{K_1'(q)} e^{q\tau} \frac{dq}{q^2} \quad (3.14)$$

Если

$$\Pi_0(x, y, z, t) = f(y/r_0 - \tau) \quad (3.15)$$

то, используя интеграл Дюгамеля, получим

$$\varphi_1(r_1, \theta, \tau) = f(0) \varphi(r_1, \theta, \tau) + \int_0^\tau f'(\xi) \varphi(r_1, \theta, \tau - \xi) d\xi \quad (3.16)$$

где φ_1 — потенциал Герца на случай (3.15). При больших значениях τ

$$\varphi_1(r_1, \theta, \tau) = \frac{\sin \theta}{2\pi i} \int_L \left[f(0) + \int_0^\tau f'(\xi) e^{q\xi} d\xi \right] \frac{K_1(r_1 q)}{K_1(q)} e^{q\tau} \frac{dq}{q^2} \quad (3.17)$$

В случае, когда фронт падающей волны составляет угол γ с осью z , задача сводится к решенной выше [6], где величину τ необходимо заменить величиной

$$\eta = \operatorname{tg}^{-1} \gamma (\tau \sin^{-1} \gamma - z)$$

2. Дифракция плоской электромагнитной волны около шара. Будем считать, что падающая электромагнитная волна распространяется вдоль оси z в сторону ее положительных значений (фиг. 4).

В безразмерных сферических координатах (r, θ, ϑ) возмущенный потенциал Герца φ удовлетворяет системе

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\alpha \cos \theta - (\Pi_0 + \varphi) \quad \text{при } r = 1$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad \text{на } S^-$$

Здесь также положено, что

$$\Pi_0(x, y, z, \tau) = \alpha (z - \tau)$$

Нетрудно видеть, что задача (3.18) эквивалентна задаче дифракции плоской слабой ударной волны на сфере [6] и, следовательно,

$$\varphi(1, \theta_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_T \left[\varphi(1, \theta, \tau) \frac{\partial V^1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} V^1 \right] d\theta d\tau d\vartheta \right\} \quad (3.19)$$

где V^1 имеет вид (2.6); T — гиперповерхность соответствующего четырехмерного цилиндра $r=1$, отсекаемая конусом влияния из точки $(r=1, \theta_0, \vartheta_0, \tau_0)$.

Если рассмотреть случай (3.5), то в системе (3.16) второе условие примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\alpha \cos \theta \quad \text{при } r = 1$$

и задача (3.18) тождественна задаче дифракции плоской слабой ударной волны на сфере. При больших значениях величины τ можно положить

$$\varphi - \alpha \tau = -2\alpha \cos \theta f_1^\circ(r, \tau) \quad (3.20)$$

Можно показать, что

$$f_1^\circ(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{r}} \int_L \frac{K_{3/2}(rq) e^{q\tau}}{q K_{3/2}'(q) + (q^{-1} - 1/2) K_{3/2}(q)} \frac{dq}{q} \quad (3.21)$$

В случае (3.5), полагаем

$$\varphi(r, \theta, \tau) = -\alpha \cos \theta f_2^\circ(r, \tau)$$

$$f_2^\circ(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_{3/2}(rq) e^{q\tau}}{qK_{3/2}'(q) - 1/2 K_{3/2}(q)} \frac{dq}{q} \quad (3.22)$$

Задача (3.18) обобщается на случай

$$\Pi_0(x, y, z, \tau) = f(z - \tau)$$

3. *Решение системы (3.10). Теорема 3.1.* Общая задача дифракции плоской электромагнитной волны около произвольного выпуклого тела вращения эквивалентна задаче обтекания соответствующего полого полубесконечного четырехмерного цилиндра $\xi_1 = \xi_{10}$ сверхзвуковым $M = \sqrt{2}$ потоком идеального газа под малым углом атаки.

Для потенциала $\varphi(x, y, z, \tau)$ на поверхности произвольного тела вращения получим интегральное уравнение вида

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{\Sigma} \left[\frac{\varphi(x, y, z, \tau) \frac{\partial V^1}{\partial \xi_1}}{h_1} - \frac{V^1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right] d\xi_2 d\xi_3 d\tau \right\} \quad (3.23)$$

Явное асимптотическое решение для φ при больших τ можно получить лишь для кругового цилиндра и сферы.

Аналогично задачи дифракции плоских электромагнитных волн около тел произвольной формы (или около группы тел) могут быть решены сведением их к соответствующим смешанным задачам Коши в пространстве (x, y, z, τ) .

Примечание. Задачи дифракции упругих и электромагнитных волн сводятся к решению соответствующих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, для численного решения которых удобнее, например, в уравнениях (1.12), (1.14), (1.22) и т. д. ввести функции

$$K_0(\tau_0 - \tau, x_0 - x, y_0 - y) = \int \frac{dV}{\partial \xi_1} d\tau, \quad K_1(\tau_0 - \tau, x_0 - x, y_0 - y) = \int K d\tau$$

Функция K непрерывна на Σ и обращается в нуль вдоль всей характеристической части границы области Σ , функция K_1 непрерывна на Σ и обращается в нуль в точке (x_0, y_0, τ_0) . Следовательно, покрывая область Σ достаточно мелкой сеткой, окрестность точки (x_0, y_0, τ_0) при решении интегральных уравнений можно исключить или интегральные выражения в окрестности (x_0, y_0, τ_0) аппроксимировать каким-либо способом и свести численное решение интегро-дифференциальных уравнений к простым квадратурам по оставшейся части Σ .

Единственность решения данных интегро-дифференциальных уравнений вытекает из самого их построения или ее можно строго доказать обычными методами. Существование решения доказывается методом Адамара.

Поступила 12 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф и л и п п о в И. Г. К теории дифракции плоских слабых ударных волн около контуров произвольной формы. ПММ, 1963, т. 27, № 4.
2. С о б о л е в С. Л. Общая задача дифракции волн на римановых поверхностях. Тр. МИАН, 1935, т. 9, 39—105.
3. Ф и л и п п о в А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, № 6.
4. К о р б а н с к и й И. Н. К вопросу о дифракции электромагнитных волн вблизи выпуклых тел вращения. Тр. ВВИА им. Жуковского, 1957, вып. 630.
5. М о у н г а н Ф. Finite deformation of an elastic solid. Amer. J. Math., 1937, v. 59, 235—260.
6. Ф и л и п п о в И. Г. К теории линейных пространственных нестационарных задач дифракции и некоторые нелинейные задачи. ПММ, 1963, № 27, № 4.