Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ, СОЗДАВАЕМЫЕ ИСТОЧНИКОМ, НАХОДЯЩИМСЯ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

Л. Н. Сретенский

(Москва)

В последние годы опубликовано большое число исследований, посвященных рассмотрению волновых движений жидкости в бассейнах, имеющих плоское, наклоненное к горизонту дно. Эти исследования описаны с достаточными подробностями в книге Стокера [1] и в большой обзорной статье Вейгаузена [2].

Ниже рассматривается задача о волнах, возбуждаемых на поверхности жидкости периодически действующим источником, находящимся на данной глубине над равномерно наклонным дном. Исследование ведется для плоскопараллельных потенциальных движений с использованием методов, изложенных в книгах [1,2].

§ 1. Будем предполагать, что угол α наклона дна к горизонту есть целая доля 90°, т. е. $\alpha = \pi / 2n$.

Назовем через $w(z, t)$ характеристическую функцию течения

$$w(z, t) = \varphi(x, y; t) + i\psi(x, y; t)$$

Если ось Ox проведена вдоль среднего уровня жидкости, а ось Oy направлена вертикально вверх и точка O взята в месте встречи свободного уровня жидкости с дном бассейна, то будет соблюдаться при всех положительных значениях x следующее граничное условие

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

Будем рассматривать периодические движения с частотой σ; положим

$$w(z, t) = f(z)\cos\sigma t, \qquad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

$$\varphi(x, y; t) = \varphi(x, y)\cos\sigma t, \qquad \psi(x, y; t) = \psi(x, y)\cos\sigma t$$

Новая функция $\varphi(x, y)$ будет удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \nu\varphi\right)_{y=0} = 0 \qquad \left(\nu = \frac{\sigma^2}{g}\right)$$

Перепишем это условие в следующем виде

$$\operatorname{Im}(df/dz + i\nu f) = 0 \quad \text{для } z = x \tag{1.1}$$

Функция $\varphi(x, y)$ должна удовлетворять, кроме того, и следующему граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\alpha = 0 \quad \text{для } y = -x\operatorname{tg}\alpha$$

Это последнее условие можно переписать так

$$\operatorname{Im}(e^{i\alpha}\,df/dz) = 0 \quad \text{для } \arg z = -\alpha \tag{1.2}$$

Помимо этих условий, подчиним функцию $f(z)$ требованию голоморфности около точки $z = 0$.

Будем предполагать, что волны на поверхности жидкости возникают от источника $z = \rho e^{-\mu i} = c_0$, имеющего периодический дебит $Q = q \cos \sigma t$. В силу этого предположения функция $f(z)$ в окрестностях точки c_0 будет иметь следующий вид

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln (z - c_0) + \ldots \tag{1.3}$$

Таким образом, аналитическая функция $f(z)$ должна удовлетворять условиям (1.1) и (1.2), быть голоморфной у точки $z = 0$ и иметь логарифмическую особенность в точке c_0. Для определения функции $f(z)$ по этим условиям рассмотрим следующую функцию комплексного переменного

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[f^{(k+1)}(z) + i\nu f^{(k)}(z)\right]$$

Здесь коэффициенты a_k имеют следующие значения:

$$a_0 = 1, \qquad a_k = \frac{1}{\nu^k} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \ldots \operatorname{ctg} k\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

При таких коэффициентах функция $G(z)$ при $z = x$ и $z = re^{-2\alpha i}$ будет иметь действительные значения (r — произвольное действительное число, большее нуля [2]).

Если бы внутри и на границе бассейна не было особых точек у функции $f(z)$, то функция $G(z)$ была бы равна нулю на всей плоскости комплексного переменного z. Но в рассматриваемом случае функция $f(z)$ имеет особенность в точке $z = c_0$. Найдем и в этом случае функцию $G(z)$.

Около точки $z = c_0$ функция $f(z)$ имеет вид (1.3); отсюда вытекает, что около той же точки функция $G(z)$ будет иметь такой вид

$$G(z) = \frac{i\nu q}{2\pi} \ln (z - c_0) + \frac{q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(z - c_0)^{k+1}} - \frac{i\nu q}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{(z - c_0)^k} + \ldots \tag{1.4}$$

где

$$b_k = (-)^k k!\, a_k$$

Построим теперь такую функцию $g(z)$, которая внутри сектора $-2\alpha \leqslant \arg z \leqslant 0$ была бы всюду голоморфной за исключением точек $z = c_0 = \rho e^{-\mu i}$ и $z = c'_{2n-1} = \rho e^{\mu i + 2\alpha i(2n-1)}$ и принимала бы действительные значения для $\arg z = 0$ и $\arg z = -2\alpha$; кроме того, около точки $z = c_0$ искомая функция должна иметь вид (1.3), а около точки c'_{2n-1} аналогичный вид

$$g(z) = \frac{i\nu q}{2\pi} \ln (z - c'_{2n-1}) + \frac{q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(z - c'_{2n-1})^{k+1}} - \frac{i\nu q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k(z - c'_{2n-1})^k} + \ldots$$

Можно показать, что такая функция будет определяться следующей формулой

$$\begin{aligned} g(z) = {} & \frac{i\nu q}{2\pi} \ln \frac{(z - \rho e^{-\mu i})(ze^{-2\alpha i} - \rho e^{\mu i})(ze^{-4\alpha i} - \rho e^{-\mu i}) \ldots (ze^{-2\alpha i(2n-1)} - \rho e^{\mu i})}{(z - \rho e^{\mu i})(ze^{-2\alpha i} - \rho e^{-\mu i})(ze^{-4\alpha i} - \rho e^{\mu i}) \ldots (ze^{-2\alpha i(2n-1)} - \rho e^{-\mu i})} + \\ & + \frac{q}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} b_k \sum_{j=0}^{2n-1} (-)^j \left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha i j} - \rho e^{-\mu i})^{k+1}} + \frac{1}{(ze^{-2\alpha i j} - \rho e^{\mu i})^{k+1}}\right] - \\ & - \frac{i\nu q}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k} \sum_{j=0}^{2n-1} (-)^j \left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha i j} - \rho e^{-\mu i})^k} - \frac{1}{(ze^{-2\alpha i j} - \rho e^{\mu i})^k}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Действительно, рассмотрим логарифмический член этой формулы. Если z имеет действительное значение, то дроби

$$\frac{z-\rho e^{-\mu i}}{z-\rho e^{\mu i}},\quad \frac{ze^{-2\alpha i}-\rho e^{\mu i}}{ze^{-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{-\mu i}},\quad \frac{ze^{-4\alpha i}-\rho e^{-\mu i}}{ze^{-2\alpha i(2n-2)}-\rho e^{\mu i}},\ \ldots\ \frac{ze^{-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{\mu i}}{ze^{-2\alpha i}-\rho e^{-\mu i}}$$

в силу того что α есть целая доля 90°, будут комплексными числами с модулем, равным единице. Отсюда вытекает, что первый член правой части формулы (1.5) при z действительном имеет действительные значения.

Возьмем теперь следующие два члена из первой суммы формулы (1.5):

$$\frac{(-)^j}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{-\mu i})^{k+1}},\qquad \frac{(-)^{j'}}{(ze^{-2\alpha ij'}-\rho e^{\mu i})^{k+1}}\qquad \begin{pmatrix} j'=2n-j & \text{при } j>0 \\ j'=0 & \text{при } j=0 \end{pmatrix}$$

Сумма этих двух слагаемых есть число действительное; следовательно, первая сумма формулы (1.5) имеет действительные значения при $z=x$. Совершенно также можно установить, что действительным числом будет при $z=x$ и вторая сумма той же формулы. Итак, при $z=x$ функция $g(z)$ имеет действительные значения.

Положим теперь в формуле (1.5) $z=re^{-2\alpha i}$ и рассмотрим сначала логарифмическое слагаемое этой формулы. Дроби

$$\frac{re^{-2\alpha i}-\rho e^{-\mu i}}{re^{-2\alpha i-2\alpha i(2n-2)}-\rho e^{\mu i}},\quad \frac{re^{-2\alpha i}e^{-2\alpha i}-\rho e^{\mu i}}{re^{-2\alpha i-2\alpha i(2n-3)}-\rho e^{-\mu i}},\ \ldots$$

$$\frac{re^{-2\alpha i}e^{-2\alpha i(2n-2)}-\rho e^{-\mu i}}{re^{-2\alpha i}-\rho e^{\mu i}},\quad \frac{re^{-2\alpha i}e^{-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{\mu i}}{re^{-2\alpha i}e^{-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{-\mu i}}$$

представляют собой комплексные числа с модулем, равным единице.

Отсюда вытекает, что первый член правой части формулы (1.5) будет иметь реальные значения при $z=re^{-2\alpha i}$.

Рассмотрим затем обе суммы формулы (1.5). Из предыдущего рассмотрения логарифмического слагаемого вытекает вместе с тем, т. е. такими же сравнениями отдельных слагаемых, что каждая из сумм формулы (1.5) имеет действительные значения при $z=re^{-2\alpha i}$.

Функция $g(z)$, определяемая формулой (1.5), удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{Im} g(z)=0\quad \text{для } z=x,\ z=re^{-2\alpha i} \tag{1.6}$$

Отметим также, что функция $g(z)$ принимает чисто мнимые значения для $z=re^{-\alpha i}$.

Действительно, первый член формулы (1.5) есть число чисто мнимое, так как каждое из произведений

$$(re^{-\alpha i}-\rho e^{-\mu i})\,(re^{-\alpha i-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{\mu i})$$
$$(re^{-\alpha i}e^{-2\alpha i}-\rho e^{\mu i})\,(re^{-\alpha i-2\alpha i(2n-2)}-\rho e^{-\mu i})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(re^{-\alpha i}-\rho e^{\mu i})\,(re^{-\alpha i-2\alpha i(2n-1)}-\rho e^{-\mu i})$$
$$(re^{-\alpha i}e^{-2\alpha i}-\rho e^{-\mu i})\,(re^{-\alpha i-2\alpha i(2n-2)}-\rho e^{\mu i})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

есть число действительное. Слагаемые из первых сумм

$$(-)^j\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{-\mu i})^{k+1}}+\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{\mu i})^{k+1}}\right]$$

$$(-)^{2n-1-j}\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha i(2n-1-j)}-\rho e^{-\mu i})^{k+1}}+\frac{1}{(ze^{-2\alpha i(2n-1-j)}-\rho e^{\mu i})^{k+1}}\right]$$

дают при сложении чисто мнимые числа, если $z=re^{-\alpha i}$.

Слагаемые из вторых сумм

$$(-)^j\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{-\mu i})^k}-\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{\mu i})^k}\right]$$

$$(-)^{2n-1-j}\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha i\,(2n-1-j)}-\rho e^{-\mu i})^k}-\frac{1}{(ze^{-2\alpha i\,(2n-1-j)}-\rho e^{\mu i})^k}\right]$$

дают действительные числа при своем сложении.

Отсюда вытекает, что при $z = re^{-\alpha i}$ функция $g(z)$ имеет чисто мнимые значения.

Примем обозначения

$$\begin{aligned} c_0 &= \rho e^{-\mu i}, \quad c_1 = \rho e^{-\mu i+2\alpha i}, \ldots, c_{2n-1} = \rho e^{-\mu i+2\alpha i\,(2n-1)} \\ c_0' &= \rho e^{\mu i}, \quad c_1' = \rho e^{\mu i+2\alpha i}, \ldots, c'_{2n-1} = \rho e^{\mu i+2\alpha i\,(2n-1)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

и рассмотрим функцию

$$\chi(z) = \frac{i\nu q}{2\pi}\ln\frac{(z-c_0)(z-c_1')(z-c_2)(z-c_3')\ldots(z-c'_{2n-1})}{(z-c_0')(z-c_1)(z-c_2')(z-c_3)\ldots(z-c_{2n-1})} \tag{1.8}$$

входящую в формулу (1.5).

Функция $\chi(z)$, а равно и функция $G(z)$ имеют действительные значения при $z = x$ и $z = re^{-2\alpha i}$.

Таким образом, однозначная функция

$$G(z) - \chi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,[f^{(k+1)}(z) + i\nu f^{(k)}(z)] - \chi(z) \tag{1.9}$$

принимает при $z = x$ и $z = re^{-2\alpha i}$ действительные значения.

Действительные значения на сторонах угла $z = 0$, $z = re^{-2\alpha i}$ принимает и функция, равная сумме двух последних слагаемых формулы (1.5)

$$\begin{aligned} h(z) = {} & \frac{q}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} b_k \sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{-\mu i})^{k+1}}+\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{\mu i})^{k+1}}\right]- \\ & -\frac{i\nu q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{k}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left[\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{-\mu i})^k}-\frac{1}{(ze^{-2\alpha ij}-\rho e^{\mu i})^k}\right] \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что функция (1.9) может быть продолжена на всю плоскость комплексного переменного и ее значения совпадают[1] со значениями функции $h(z)$; таким образом, для определения неизвестной функции $f(z)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\,[f^{(k+1)}(z) + i\nu f^{(k)}(z)] = \chi(z) + h(z) \tag{1.11}$$

§ 2. Обратимся к интегрированию уравнения (1.11). Соответствующее однородное уравнение имеет в качестве своего характеристического уравнения следующее уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(\lambda^{k+1} + i\nu\lambda^k) = 0 \tag{2.1}$$

Корнями этого уравнения будут

$$\lambda_0 = -i\nu,\ \lambda_1 = -i\nu\varkappa,\ \lambda_2 = -i\nu\varkappa^2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1} = -i\nu\varkappa^{n-1}$$
$$(\varkappa = e^{-2\alpha i} = e^{-\pi i/n})$$

[1] В действительности эти функции могут отличаться одна от другой на чисто мнимое постоянное число, которое, однако, можно принять равным нулю.

Общий интеграл однородного уравнения запишется так

$$f(z) = C_0 e^{\lambda_0 z} + C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} + \ldots + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} z} \tag{2.2}$$

Частное решение неоднородного уравнения (1.11) найдется методом вариации произвольных постоянных.

Полагая $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ в (2.2) неизвестными функциями переменного z, получим

$$\frac{dC_0}{dz} e^{\lambda_0 z} \lambda_0{}^k + \frac{dC_1}{dz} e^{\lambda_1 z} \lambda_1{}^k + \frac{dC_2}{dz} e^{\lambda_2 z} \lambda_2{}^k + \ldots + \frac{dC_{n-1}}{dz} e^{\lambda_{n-1} z} \lambda_{n-1}^k = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$$

$$\frac{dC_0}{dz} e^{\lambda_0 z} \lambda_0^{n-1} + \frac{dC_1}{dz} e^{\lambda_1 z} \lambda_1^{n-1} + \frac{dC_2}{dz} e^{\lambda_2 z} \lambda_2^{n-1} + \ldots + \frac{dC_{n-1}}{dz} e^{\lambda_{n-1} z} \lambda_{n-1}^{n-1} = \nu^{n-1} g(z)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\frac{dC_0}{dz} = \nu^{n-1} g(z) \frac{\Delta_0}{\Delta} e^{-\lambda_0 z}, \qquad \frac{dC_1}{dz} = \nu^{n-1} g(z) \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{-\lambda_1 z}, \qquad \ldots \qquad \frac{dC_{n-1}}{dz} = \nu^{n-1} g(z) \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta} e^{-\lambda_{n-1} z}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_0{}^2 & \lambda_1{}^2 & \ldots & \lambda_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Здесь $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ — миноры детерминанта Δ, отвечающие элементам последней строки и взятые с соответствующими знаками.

Имеем

$$\Delta = \Delta_0 (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2) \ldots (\lambda_0 - \lambda_{n-1})$$
$$\Delta = \Delta_1 (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_2) \ldots (\lambda_1 - \lambda_{n-1})$$
$$\Delta = \Delta_2 (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \ldots (\lambda_2 - \lambda_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta = \Delta_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_0)(\lambda_{n-1} - \lambda_1) \ldots (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})$$

Примем обозначение

$$\Lambda(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{n-1})$$

При этом обозначении имеем

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \Lambda'(\lambda_0), \qquad \frac{\Delta}{\Delta_1} = \Lambda'(\lambda_1), \ldots, \quad \frac{\Delta}{\Delta_{n-1}} = \Lambda'(\lambda_{n-1})$$

Следовательно,

$$\frac{dC_0}{dz} = \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)} g(z) e^{-\lambda_0 z}, \qquad \frac{dC_1}{dz} = \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_1)} g(z) e^{-\lambda_1 z}, \ldots,$$

$$\frac{dC_{n-1}}{dz} = \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} g(z) e^{-\lambda_{n-1} z}$$

Отсюда, обозначая через $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ произвольные постоянные, имеем

$$C_0(z) = K_0 + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)} \int_0^z g(\zeta) e^{-\lambda_0 \zeta} d\zeta, \qquad C_1(z) = K_1 + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_1)} \int_0^z g(\zeta) e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta \tag{2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{n-1}(z) = K_{n-1} + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} \int_0^z g(\zeta) e^{-\lambda_{n-1} \zeta} d\zeta$$

Окончательное выражение функции $f(z)$ будет иметь следующий вид

$$f(z) = K_0 e^{\lambda_0 z} + K_1 e^{\lambda_1 z} + \ldots + K_{n-1} e^{\lambda_{n-1} z} + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)} e^{\lambda_0 z} \int_0^z g(\zeta)\, e^{-\lambda_0 \zeta}\, d\zeta +$$

$$+ \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_1)} e^{\lambda_1 z} \int_0^z g(\zeta)\, e^{-\lambda_1 \zeta}\, d\zeta + \ldots + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} e^{\lambda_{n-1} z} \int_0^z g(\zeta)\, e^{-\lambda_{n-1} \zeta}\, d\zeta \tag{2.4}$$

Отметим формулы для производных $\Lambda'(\lambda_0), \Lambda'(\lambda_1), \ldots, \Lambda'(\lambda_{n-1})$

$$\Lambda'(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)\ldots(\lambda_0 - \lambda_{n-1}) =$$

$$= (-i\nu)^{n-1}(1-\varkappa)(1-\varkappa^2)\ldots(1-\varkappa^{n-1}) =$$

$$= (2\nu)^{n-1} e^{-\frac{1}{4}\pi i (n-1)} \sin\alpha \sin 2\alpha \ldots \sin(n-1)\alpha \tag{2.5}$$

$$\Lambda'(\lambda_s) = \left(\frac{i}{\varkappa}\right)^s \Lambda'(\lambda_0)\, \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}\, 2\alpha \ldots \mathrm{tg}\, s\alpha \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Отметим также формулы для сопряженных величин

$$\overline{\Lambda'(\lambda_0)} = e^{\frac{1}{2}\pi i (n-1)} \Lambda'(\lambda_0), \qquad \overline{\Lambda'(\lambda_s)} = -\frac{1}{\varkappa} \Lambda'(\lambda_{n-s-1}) \tag{2.6}$$

§ 3. Определим постоянные $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$, входящие в (2.4), так, чтобы удовлетворились условие (1.1) и условие, эквивалентное (1.2),

$$\mathrm{Im}\, f(z) = 0 \quad \text{для } z = re^{-\alpha i} = z' \tag{3.1}$$

Условие (3.1) можно переписать так

$$f(z') - \overline{f(z')} = 0$$

Из формулы (2.4) имеем

$$\overline{f(z')} = \overline{K}_0 \overline{e^{\lambda_0 z'}} + \overline{K}_1 \overline{e^{\lambda_1 z'}} + \ldots + \overline{K}_{n-1} \overline{e^{\lambda_{n-1} z'}} +$$

$$+ \nu^{n-1} \left(\frac{e^{\lambda_0 z'}}{\Lambda'(\lambda_0)} \int_0^{z'} g(\zeta) e^{-\lambda_0 \zeta} d\zeta + \frac{e^{\lambda_1 z'}}{\Lambda'(\lambda_1)} \int_0^{z'} g(\zeta)\, e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta + \ldots + \frac{e^{\lambda_{n-1} z'}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} \int_0^{z'} g(\zeta) e^{-\lambda_{n-1} \zeta} d\zeta \right)^*$$

Звездочка указывает, что выражение, находящееся в фигурных скобках, следует заменить ему сопряженным; преобразуем это выражение, пользуясь формулами (2.5), 2.6) и следующими

$$\overline{\lambda_0 z'} = \lambda_{n-1} z', \ \overline{\lambda_1 z'} = \lambda_{n-2} z', \ldots, \overline{\lambda_{n-1} z'} = \lambda_0 z'$$

получим

$$\overline{f(z')} = \overline{K}_{n-1} e^{\lambda_0 z'} + \overline{K}_{n-2} e^{\lambda_1 z'} + \ldots + \overline{K}_0 e^{\lambda_{n-1} z'} -$$

$$- \nu^{n-1} \left(\frac{e^{\lambda_0 z'}}{\Lambda'(\lambda_0)} \int_0^{z'} \overline{g(\zeta)}\, e^{-\lambda_0 \zeta} d\zeta + \frac{e^{\lambda_1 z'}}{\Lambda'(\lambda_1)} \int_0^{z'} \overline{g(\zeta)}\, e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta + \ldots + \frac{e^{\lambda_{n-1} z'}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} \int_0^{z'} \overline{g(\zeta)} e^{-\lambda_{n-1} \zeta} d\zeta \right)$$

Таким образом получаем

$$f(z') - \overline{f(z')} = (K_0 - \overline{K}_{n-1})\, e^{\lambda_0 z'} + (K_1 - \overline{K}_{n-2})\, e^{\lambda_1 z'} + \ldots + (K_{n-1} - \overline{K}_0)\, e^{\lambda_{n-1} z'} +$$

$$+ \nu^{n-1} \left(\frac{e^{\lambda_0 z'}}{\Lambda'(\lambda_0)} \int_0^{z'} \left[g(\zeta) + \overline{g(\zeta)} \right] e^{-\lambda_0 \zeta} d\zeta + \frac{e^{\lambda_1 z'}}{\Lambda'(\lambda_1)} \int_0^{z'} \left[g(\zeta) + \overline{g(\zeta)} \right] e^{-\lambda_1 \zeta} d\zeta + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{e^{\lambda_{n-1} z'}}{\Lambda'(\lambda_{n-1})} \int_0^{z'} \left[g(\zeta) + \overline{g(\zeta)} \right] e^{-\lambda_{n-1} \zeta} d\zeta \right)$$

Но, так как функция $g(\zeta)$ имеет при $\zeta = re^{-\alpha i}$ чисто мнимые значения, то

$$f(z') - \overline{f(z')} = (K_0 - \overline{K}_{n-1})\, e^{\lambda_0 z'} + (K_1 - \overline{K}_{n-2})\, e^{\lambda_1 z'} + \ldots + (K_{n-1} - \overline{K_0})\, e^{\lambda_{n-1} z'}$$

Отсюда вытекает, что для удовлетворения условию (3.1) надо все скобки приравнять к нулю

$$K_0 - \overline{K}_{n-1} = 0, \quad K_1 - \overline{K}_{n-2} = 0, \ldots, \quad K_{n-1} - \overline{K}_0 = 0 \tag{3.2}$$

Обратимся теперь к условию (1.1). Пользуясь формулой (2.4), находим

$$\frac{df}{dz} + i\nu f = K_0(\lambda_0 + i\nu)\, e^{\lambda_0 z} + K_1(\lambda_1 + i\nu)\, e^{\lambda_1 z} + \ldots + K_{n-1}(\lambda_{n-1} + i\nu)\, e^{\lambda_{n-1} z} +$$

$$+ \nu^{n-1} g(z) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\Lambda'(\lambda_p)} + \nu^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\lambda_p + i\nu}{\Lambda'(\lambda_p)}\, e^{\lambda_p z} \int_0^z g(\zeta)\, e^{-\lambda_p \zeta}\, d\zeta$$

Предпоследняя сумма равна нулю; кроме того, $\lambda_0 + i\nu = 0$; следовательно,

$$\frac{df}{dz} + i\nu f = K_1(\lambda_1 + i\nu)\, e^{\lambda_1 z} + K_2(\lambda_2 + i\nu)\, e^{\lambda_2 z} + \ldots +$$

$$+ K_{n-1}\,(\lambda_{n-1} + i\nu)\, e^{\lambda_{n-1} z} + \nu^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\lambda_p + i\nu}{\Lambda'(\lambda_p)}\, e^{\lambda_p z} \int_0^z g(\zeta)\, e^{-\lambda_p \zeta}\, d\zeta$$

Составим, пользуясь этой формулой, условие (1.1); принимая во внимание, что функция $g(\zeta)$ имеет при $z = x$ действительные значения, получаем

$$\sum_{p=1}^{n-1} \left[K_p + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_p)} \int_0^x g(\zeta)\, e^{-\lambda_p \zeta}\, d\zeta\right] (\lambda_p + i\nu)\, e^{\lambda_p x} -$$

$$- \sum_{p=1}^{n-1} \left[\overline{K}_p + \frac{\nu^{n-1}}{\overline{\Lambda'(\lambda_p)}} \int_0^x g(\zeta)\, e^{-\overline{\lambda}_p \lambda}\, d\zeta\right] (\overline{\lambda}_p - i\nu)\, e^{\overline{\lambda}_p x} = 0$$

Преобразуем левую сторону этого уравнения, пользуясь свойствами чисел λ_p и $\overline{\Lambda'(\lambda_p)}$, а также и формулами (3.2). Получим

$$\sum_{p=1}^{n-1} [K_p(\lambda_p + i\nu) - K_{p-1}(\lambda_p - i\nu)]\, e^{\lambda_p x} +$$

$$+ \nu^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left[\frac{\lambda_p + i\nu}{\Lambda'(\lambda_p)} + \varkappa \frac{\lambda_p - i\nu}{\Lambda'(\lambda_{p-1})}\right] e^{\lambda_p x} \int_0^x g(\zeta)\, e^{-\lambda_p \zeta}\, d\zeta = 0 \tag{3.3}$$

Покажем, что числа

$$A_p = \frac{\lambda_p + i\nu}{\Lambda'(\lambda_p)} + \varkappa \frac{\lambda_p - i\nu}{\Lambda'(\lambda_{p-1})}$$

равны нулю. Подставляя сюда выражения λ_p, получаем новое изображение чисел A_p

$$A_p = i\nu \left[\frac{1 - \varkappa^p}{\Lambda'(\lambda_p)} - \frac{\varkappa(1 + \varkappa^p)}{\Lambda'(\lambda_{p-1})}\right]$$

Подставим сюда вместо $\Lambda'(\lambda_p)$ и $\Lambda'(\lambda_{p-1})$ их выражения (2.5), найдем

$$A_p = \frac{\nu \varkappa^p}{i^{p-1} \Lambda'(\lambda_0)} [\operatorname{ctg}\alpha\,(1 - \varkappa^p) - i\,(1 + \varkappa^p)] \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \ldots \operatorname{ctg}(p-1)\,\alpha$$

но квадратная скобка равна нулю, следовательно, $A_p = 0$.

Теперь формула (3.3) может быть записана так

$$\sum_{p=1}^{n-1} [K_p(\lambda_p + i\nu) - K_{p-1}(\lambda_p - i\nu)]\, e^{\lambda_p x} = 0$$

Отсюда следует, что

$$K_p(\lambda_p + i\nu) - K_{p-1}(\lambda_p - i\nu) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Подставляя сюда выражение для λ_p, находим

$$K_p = iK_{p-1}\,\mathrm{ctg}\, p\alpha$$

Следовательно,

$$K_1 = iK_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \quad K_2 = i^2 K_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha, \ldots$$

$$K_p = i^p K_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha, \ldots$$

$$K_{n-1} = i^{n-1}K_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,(n-1)\,\alpha$$

Подставляя эти выражения K в условия (3.2), приходим к одному единственному следствию

$$K_0 = ae^{-{}^1/_4\pi i(n-1)}$$

причем a есть произвольное действительное число.

Определив постоянные $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$, получаем окончательное выражение функции (3.4)

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} i^p\left(ae^{-{}^1/_4\pi i(n-1)} + \frac{(-)^p\varkappa^p\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)}\int_0^z g(\zeta)\,e^{-\lambda_p\zeta}\,d\zeta\right)e^{\lambda_p z}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha$$

Здесь $\Lambda'(\lambda_0)$ дается формулой

$$\Lambda'(\lambda_0) = (2\nu)^{n-1}e^{-{}^1/_4\pi i(n-1)}\sin\alpha\,\sin 2\alpha \ldots \sin(n-1)\,\alpha$$

для $n = 1$ надо принять $\Lambda'(\lambda_0) = 1$.

§ 4. Преобразуем формулу (3.4) к другому виду. Функция $g(\zeta)$ представляет собой сумму двух слагаемых $\chi(z)$ и $h(z)$, определяемых формулами (1.8) и (1.10). Возьмем интеграл, входящий в формулу (3.4), и преобразуем ту его часть, которая отвечает функции $\chi(z)$, т. е. возьмем интеграл

$$J = \int_0^z \chi(\zeta)\,e^{-\lambda_p\zeta}\,d\zeta$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$J = -\frac{\chi(z)}{\lambda_p}e^{-\lambda_p z} + \frac{i\nu q}{2\pi\lambda_p}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\int_0^z\left(\frac{1}{\zeta - c_j} - \frac{1}{\zeta - c_j'}\right)e^{-\lambda_p\zeta}\,d\zeta$$

Теперь формулу (3.4) можно представить в следующем виде

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} i^p\left(ae^{-{}^1/_4\pi i(n-1)} + \frac{(-)^p\varkappa^p\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)}\int_0^z h(\zeta)\,e^{-\lambda_p\zeta}\,d\zeta\right)e^{\lambda_p z}\,\mathrm{ctg}\,\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha +$$

$$+ \frac{i\nu q\nu^{n-2}}{2\pi\Lambda'(\lambda_0)}\sum_{p=0}^{n-1}(-i)^{p-1}e^{\lambda_p z}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha\int_0^z e^{-\lambda_p\zeta}d\zeta\,\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta - c_j} - \frac{1}{\zeta - c_j'}\right) - \chi(z)\frac{\nu^{n-2}}{\Lambda'(\lambda_0)}\sum_{p=0}^{n-1}(-i)^{p-1}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha \tag{4.1}$$

Надо отметить, что при $p = 0$ произведение $\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha \ldots \mathrm{ctg}\,p\alpha$ должно заменяться единицей.

Найдем при помощи формулы (4.1) уравнение поверхности волны

$$\eta = -\frac{\sigma}{g}\sin\sigma t\,\mathrm{Re}\,f(z), \qquad z = x \tag{4.2}$$

Основной интерес представляет вид поверхности в местах, далеко отстоящих от начала координат, т. е. от точки пересечения среднего уровня жидкости с дном бассейна. Поэтому дадим в формуле (4.1) переменному $z = x$ бесконечно большое положительное значение: для $x = \infty$ имеем

$$\lim_{x=\infty} e^{\lambda_p x}\int_0^x h(\zeta)\,e^{-\lambda_p\zeta}d\zeta = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\lim_{x=\infty} e^{\lambda_p x}\int_0^x e^{-\lambda_p\zeta}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)d\zeta = 0$$

$$\lim_{x=\infty}\chi(x) = 0$$

Следовательно, для больших $z = x$ будем иметь

$$f(x) = \left(ae^{-{}^1/_4\pi i(n-1)} + \frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)}\int_0^\infty h(\zeta)\,e^{-\lambda_0\zeta}d\zeta\right)e^{\lambda_0 x} -$$

$$-\frac{q\nu^{n-1}}{2\pi\Lambda'(\lambda_0)}e^{\lambda_0 x}\int_0^\infty e^{-\lambda_0\zeta}d\zeta\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)$$

Введем такое обозначение

$$A + Bi = \frac{\nu^{n-2}}{\Lambda'(\lambda_0)}\int_0^\infty\left[\nu h(\zeta) - \frac{q\nu}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)\right]e^{-\lambda_0\zeta}d\zeta \tag{4.3}$$

Тогда получим

$$f(x) = \{[A + a\cos{}^1/_4\pi(n-1)] + i\,[B - a\sin{}^1/_4\pi(n-1)]\}\times$$

$$\times(\cos\nu\varkappa - i\sin\nu x)$$

Отсюда по формуле (4.2) находим

$$\eta = -(\sigma/2g)\,[A + a\cos{}^1/_4\pi(n-1)]\,[\sin(\nu x+\sigma t) - \sin(\nu x-\sigma t)] +$$

$$+(\sigma/2g)\,[B - a\sin{}^1/_4\pi(n-1)]\,[\cos(\nu x+\sigma t) - \cos(\nu x-\sigma t)] \tag{4.4}$$

§ 5. Формулу (4.3) интегрированием по частям можно привести к виду

$$A + Bi = \frac{q}{2\pi}\frac{\nu^{n-1}}{\Lambda'(\lambda_0)}\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\frac{-1}{\varkappa}\right)^j F_j\,[(1-\varkappa^j)\,S(c_j) + (1+\varkappa^j)\,S(c_j')] \tag{5.1}$$

приняв такие обозначения

$$F_j = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-i\nu}{\varkappa^j}\right)^k a_k, \qquad S_n(c) = \int_0^\infty\frac{e^{i\nu\zeta}d\zeta}{(\zeta-c)^n}, \qquad S(c) = \int_0^\infty\frac{e^{i\nu\zeta}d\zeta}{\zeta-c}$$

Применяя повторно интегрирование по частям, находим такую формулу

$$S_n(c) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{(-)^{n-1}(n-2)!\,\frac{1}{c^{n-1}} + (-)^{n-2}(n-3)!\,\frac{i\nu}{c^{n-2}} +\right.$$

$$\left. + (-)^{n-3}(n-4)!\,\frac{(i\nu)^2}{c^{n-3}} + \ldots + (-)^1\frac{(i\nu)^{n-2}}{c} + (i\nu)^{n-1}S(c)\right\} \tag{5.2}$$

Подинтегральную функцию формулы (4.3) можно представить так

$$h(\zeta)-\frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)= \tag{5.3}$$

$$=\frac{q}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}b_k\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left[\frac{1}{(\zeta-c_j)^{k+1}}+\frac{1}{(\zeta-c_j')^{k+1}}\right]-$$

$$-\frac{i\nu q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{k}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-jk}\left[\frac{1}{(\zeta-c_j)^k}-\frac{1}{(\zeta-c_j')^k}\right]-\frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left[\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right]$$

Отметив этот результат, получаем, применяя общую формулу (5.2)

$$\int_0^\infty\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left[\frac{1}{(\zeta-c_j)^{k+1}}+\frac{1}{(\zeta-c_j')^{k+1}}\right]e^{i\nu\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{(-)^k(k-1)!}{k!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left(\frac{1}{c_j^k}+\frac{1}{c_j'^k}\right)+\frac{(-)^{k-1}(k-2)!}{k!}(i\nu)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left(\frac{1}{c_j^{k-1}}+\frac{1}{c_j'^{k-1}}\right)+\frac{(-)^{k-2}(k-3)!}{k!}(i\nu)^2\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left(\frac{1}{c_j^{k-2}}+\frac{1}{c_j'^{k-2}}\right)+\ldots+\frac{(-)^1}{k!}(i\nu)^{k-1}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k-1)}\left(\frac{1}{c_j}+\frac{1}{c_j'}\right)+$$

$$+\frac{(i\nu)^k}{k!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}[S(c_j)+S(c_j')]$$

В силу значения $\varkappa$ все суммы, кроме последней, входящие в правую часть этой формулы, обращаются в нуль, и таким образом

$$\int_0^\infty\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}\left[\frac{1}{(\zeta-c_j)^{k+1}}+\frac{1}{(\zeta-c_j')^{k+1}}\right]e^{i\nu\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{(i\nu)^k}{k!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}[S(c_j)+S(c_j')] \tag{5.4}$$

Совершенно также можно установить формулу

$$\int_0^\infty\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-jk}\left[\frac{1}{(\zeta-c_j)^k}-\frac{1}{(\zeta-c_j')^k}\right]e^{i\nu\zeta}d\zeta=\frac{(i\nu)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-jk}[S(c_j)-S(c_j')] \tag{5.5}$$

Вместе с тем имеем

$$\int_0^\infty\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)e^{i\nu\zeta}d\zeta=\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j[S(c_j)-S(c_j')] \tag{5.6}$$

Пользуясь формулами (5.3), (5.4), (5.5) и (5.6), можно написать равенство

$$\int_0^\infty\left[h(\zeta)-\frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta-c_j}-\frac{1}{\zeta-c_j'}\right)\right]e^{i\nu\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{q}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(i\nu)^k}{k!}b_k\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-j(k+1)}[S(c_j)+S(c_j')]-$$

$$-\frac{i\nu q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(i\nu)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b_k}{k}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\varkappa^{-jk}[S(c_j)-S(c_j')]-\frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j[S(c_j)-S(c_j')]$$

Переставим в правой части порядок суммирования; получим

$$\int_0^\infty \left[h(\zeta) - \frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}(-)^j\left(\frac{1}{\zeta - c_j} - \frac{1}{\zeta - c_j'}\right)\right] e^{i\nu\zeta}\, d\zeta =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\frac{-1}{\varkappa}\right)^j (1 - \varkappa^j) S(c_j) \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-i\nu}{\varkappa^j}\right)^k a_k +$$

$$+ \frac{q}{2\pi}\sum_{j=0}^{2n-1}\left(\frac{-1}{\varkappa}\right)^j (1 + \varkappa^j) S(c_j') \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-i\nu}{\varkappa^j}\right)^k a_k$$

Но внутренние суммы равны F_j; отсюда получаем формулу (5.1).

§ 6. Вернемся к результатам § 3. Присоединим к функции $f(z)$ функцию, определяющую стоячие волны, зависящие от $\sin \sigma t$. Для этих волн имеем

$$w_1(z, t) = f_1(z) \sin \sigma t$$

причем

$$f_1(z) = be^{-1/4\pi i(n-1)}\, [e^{\lambda_0 z} + i \operatorname{ctg}\alpha\, e^{\lambda_1 z} + i^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}2\alpha\, e^{\lambda_2 z} +$$

$$+ \ldots + i^{n-1} \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}2\alpha \ldots \operatorname{ctg}(n-1)\alpha\, e^{\lambda_{n-1} z}]$$

действительное число b имеет произвольное значение. По этой функции возвышение жидкости при больших x определяется формулой

$$\eta_1 = (b\sigma / 2g)\,[\cos {}^1/_4\pi(n-1)\cos(\nu x + \sigma t) - \sin {}^1/_4\pi\,(n-1)\sin(\nu x + \sigma t)] +$$
$$+ (b\sigma / 2g)\,[\cos {}^1/_4\pi\,(n-1)\cos(\nu x - \sigma t) - \sin {}^1/_4\pi\,(n-1)\sin(\nu x - \sigma t)]$$

Сложим ординаты η_1 с ординатами волновой поверхности, представляемыми формулой (4.4); получим

$$H = \left[\frac{b\sigma}{2g}\cos\frac{1}{4}\pi(n-1) + \frac{a\sigma}{2g}\sin\frac{1}{4}\pi(n-1) - \frac{\sigma B}{2g}\right]\cos(\nu x - \sigma t) +$$
$$+ \left[\frac{a\sigma}{2g}\cos\frac{1}{4}\pi(n-1) - \frac{b\sigma}{2g}\sin\frac{1}{4}\pi(n-1) + \frac{\sigma A}{2g}\right]\sin(\nu x - \sigma t) +$$
$$+ \left[\frac{b\sigma}{2g}\cos\frac{1}{4}\pi(n-1) - \frac{a\sigma}{2g}\sin\frac{1}{4}\pi(n-1) + \frac{\sigma B}{2g}\right]\cos(\nu x + \sigma t) -$$
$$- \left[\frac{a\sigma}{2g}\cos\frac{1}{4}\pi(n-1) + \frac{b\sigma}{2g}\sin\frac{1}{4}\pi(n-1) + \frac{\sigma A}{2g}\right]\sin(\nu x + \sigma t)$$

Поставим условие: волны должны уходить в бесконечность. В силу этого условия коэффициенты при двух последних тригонометрических функциях должны обращаться в нуль. Отсюда получаем значения произвольных коэффициентов a и b

$$a = -A\cos\frac{\pi(n-1)}{4} + B\sin\frac{\pi(n-1)}{4}, \quad b = -A\sin\frac{\pi(n-1)}{4} - B\cos\frac{\pi(n-1)}{4}$$

При этих значениях a и b уравнение волны запишется так

$$H = -(\sigma B / g)\cos(\nu x - \sigma t) \quad \text{для } n \equiv 1 \pmod 4 \qquad (6.1)$$

$$H = -(\sigma / g\sqrt{2})\,(A + B)\cos(\nu x - \sigma t + {}^1/_4\pi) \quad \text{для } n \equiv 2 \pmod 4 \qquad (6.2)$$

$$H = (\sigma A / g)\sin(\nu x - \sigma t) \quad \text{для } n \equiv 3 \pmod 4 \qquad (6.3)$$

$$H = (\sigma / g\sqrt{2})\,(A - B)\sin(\nu x - \sigma t + {}^1/_4\pi) \quad \text{для } n \equiv 0 \pmod 4 \qquad (6.4)$$

Величины A и B даются формулой (5.1).

§ 7. Применим полученные формулы к рассмотрению ряда частных случаев. Рассмотрим сначала волны, идущие от источника, расположенного внутри прямого угла. В этом случае $n = 1$, следовательно, нужно составить уравнение (6.1), что приводит к известному результату

$$\eta = -\frac{2\sigma q}{g} e^{-\nu y_0} \cos \nu x_0 \cos(\nu x - \sigma t) \tag{7.1}$$

Действительно в рассматриваемом случае имеем

$$\varkappa = -1, \quad \alpha = {}^1/_2\,\pi, \quad \Lambda'(\lambda_0) = 1, \quad c_0' = \rho e^{\mu i}, \quad c_1 = -\rho e^{-\mu i}$$

Подсчеты показывают, что

$$F_j = 1, \qquad A + Bi = \frac{q}{\pi}\{S(c_0') + S(c_1)\}$$

Имеем

$$A + Bi = \frac{q}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\zeta - \rho e^{\mu i}} + \frac{1}{\zeta + \rho e^{-\mu i}}\right) e^{i\nu\zeta}\, d\zeta$$

$$A - Bi = \frac{q}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\zeta - \rho e^{-\mu i}} + \frac{1}{\zeta + \rho e^{\mu i}}\right) e^{-i\nu\zeta}\, d\zeta$$

Отсюда

$$2Bi = \frac{q}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\zeta - \rho e^{\mu i}} + \frac{1}{\zeta + \rho e^{-\mu i}}\right) e^{i\nu\zeta}\, d\zeta$$

Вычисляя этот интеграл при помощи вычетов, получаем

$$B = 2qe^{-\nu y_0} \cos \nu x_0 \qquad (\rho e^{\mu i} = x_0 + iy_0) \tag{7.2}$$

Обращаясь теперь к формуле (6.1), получим (7.1).

Возьмем теперь $n = 2$. В этом случае будем иметь $\alpha = 45°$.

Проводя вычисления, найдем для амплитуды волны (6.2) следующее выражение

$$-\frac{\sigma}{g\sqrt{2}}(A + B) = -\frac{2\sigma q}{g}\Big[e^{-\nu\rho \sin\mu} \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \nu\rho\cos\mu\right) + \tag{7.3}$$
$$+ e^{-\nu\rho\cos\mu} \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \nu\rho\sin\mu\right)\Big]$$

Укажем значения различных величин, необходимых для составления формулы (5.1) в рассматриваемом случае

$$\varkappa = -i, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{\nu}, \quad \Lambda'(\lambda_0) = \nu\sqrt{2}e^{-{}^1/_4\pi i}$$
$$F_0 = 1 - i, \quad F_1 = 2, \quad F_2 = 1 + i, \quad F_3 = 0$$

Составляя формулу (5.1), получаем

$$(A + Bi)\, e^{-{}^1/_4\pi i}\pi\sqrt{2}\,/\,q = [(1 - i)\,S(c_0') - (1 + i)\,S(c_2)] -$$
$$- i\,[(1 + i)\,S(c_1) + (1 - i)\,S(c_1')]$$

Наряду с этой формулой можно написать и такую формулу, беря сопряженные числа

$$(A - Bi)\, e^{{}^1/_4\pi i}\pi\sqrt{2}\,/\,q = [(1 + i)\,\overline{S}(c_0') - (1 - i)\,\overline{S}(c_2)] +$$
$$+ i\,[(1 - i)\,\overline{S}(c_1) + (1 + i)\,\overline{S}(c_1')]$$

Сложим почленно эти две формулы и, применяя интегральные вычеты, определим входящие в правую часть такие разности интегралов, как $\bar{S}\,(c_0') - S\,(c_2)$; после этого получим равенство (7.3).

Предположим теперь, что $n = 3$; угол α будет равен 30°.

Проводя вычисления, находим следующее выражение для амплитуды волны (6.3)

$$\sigma A / g = -(2\sigma q / g)\ \{e^{-\nu\rho \sin (^1/_3\pi - \mu)} \sin [\nu\rho \cos (^1/_3\pi - \mu)] -$$

$$- \sqrt{3}\, e^{-\nu\rho \sin (^1/_3\pi + \mu)} \cos [\nu\rho \cos (^1/_3\pi + \mu)] + e^{-\nu\rho \sin \mu} \sin (\nu\rho \cos \mu)\} \tag{7.4}$$

Приведем значения величин, необходимых для составления формулы (5.1)

$$\varkappa = {}^1/_2\,(1 - i\sqrt{3}), \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \nu^{-1}\sqrt{3}, \quad a_2 = \nu^{-2}, \quad \Lambda'(\lambda_0) = -i\nu^2\sqrt{3}$$

$$F_0 = -i\sqrt{3}, \quad F_1 = 3 - i\sqrt{3}, \quad F_2 = 3 + i\sqrt{3}, \quad F_3 = i\sqrt{3}, \quad F_4 = 0, \quad F_5 = 0$$

Составим формулу (5.1)

$$(A + Bi)\,\pi / q = i\sqrt{3}\,[S\,(c_1') + S\,(c_2)] - [S\,(c_2') + S\,(c_3) - S\,(c_0') - S\,(c_1)]$$

Одновременно с этой формулой можно написать сопряженную формулу

$$(A - Bi)\,\pi / q = -i\sqrt{3}\,[\bar{S}\,(c_1') + \bar{S}\,(c_2)] - [\bar{S}\,(c_2') + \bar{S}\,(c_3) - \bar{S}\,(c_0') - \bar{S}\,(c_1)]$$

Складывая эти формулы и вычисляя интегралы, получим формулу (7.4).

Возьмем, наконец, $n = 4$. В этом случае угол α будет равен 22°30′. Вычисления приводят к следующему выражению амплитуды волны (6.4)

$$\sigma\,(A - B) / g\sqrt{2} = (8\sigma q / g)\{(\sqrt{2} + 1)\, e^{-\nu\rho\cos\mu} \sin (^1/_4\pi - \nu\rho \cos \mu) +$$

$$+ (\sqrt{2} + 1)\, e^{-\nu\rho \sin (^1/_4\pi + \mu)} \sin [^1/_4\pi - \nu\rho \cos (^1/_4\pi + \mu)] -$$

$$- e^{-\nu\rho \sin \mu} \sin (^1/_4\pi + \nu\rho \cos \mu) -$$

$$- e^{-\nu\rho \sin (^1/_4\pi - \mu)} \sin [^1/_4\pi + \nu\rho \cos (^1/_4\pi - \mu)]\} \tag{7.5}$$

Приведем значения величин, необходимых для составления формулы (5.1); имеем

$$\varkappa = {}^1/_2\sqrt{2}\,(1 - i), \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \nu^{-1}(\sqrt{2} + 1), \quad a_2 = \nu^{-2}(\sqrt{2} + 1), \quad a_3 = \nu^{-3}$$

$$\Lambda'(\lambda_0) = -{}^1/_2\nu^3 e^{^1/_4\pi i}, \quad F_0 = -\sqrt{2}\,(1 + i), \quad F_1 = 2 - 2i\,(\sqrt{2} + 1), \quad F_2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$F_3 = 2 + 2i\,(\sqrt{2} + 1), \quad F_4 = -\sqrt{2}\,(1 - i), \quad F_5 = 0, \quad F_6 = 0, \quad F_7 = 0$$

Образуем по этим величинам формулу (5.1) и ей сопряженную; складывая эти формулы почленно, получим

$$-\pi / 2q\,(A - B) = (1 + i)\,[\bar{S}\,(c_4) - S\,(c_0')] + (1 - i)\,[S\,(c_4) - \bar{S}\,(c_0')] +$$

$$+ (1 + i)\,[\bar{S}\,(c_3') - S\,(c_1)] + (1 - i)\,[S\,(c_3') - \bar{S}\,(c_1)] +$$

$$+ (1 + \sqrt{2})\,(1 - i)\,[\bar{S}\,(c_3) - \bar{S}\,(c_1')] + (1 + \sqrt{2})\,(1 + i)\,[S\,(c_3) - \bar{S}\,(c_1')] +$$

$$+ (1 + \sqrt{2})\,(1 - i)\,[\bar{S}\,(c_2') - S\,(c_2)] + (1 + \sqrt{2})\,(1 + i)\,[S\,(c_2') - \bar{S}\,(c_2)]$$

Вычисляя квадратные скобки при помощи вычетов и проводя необходимые преобразования, получим формулу (7.5).

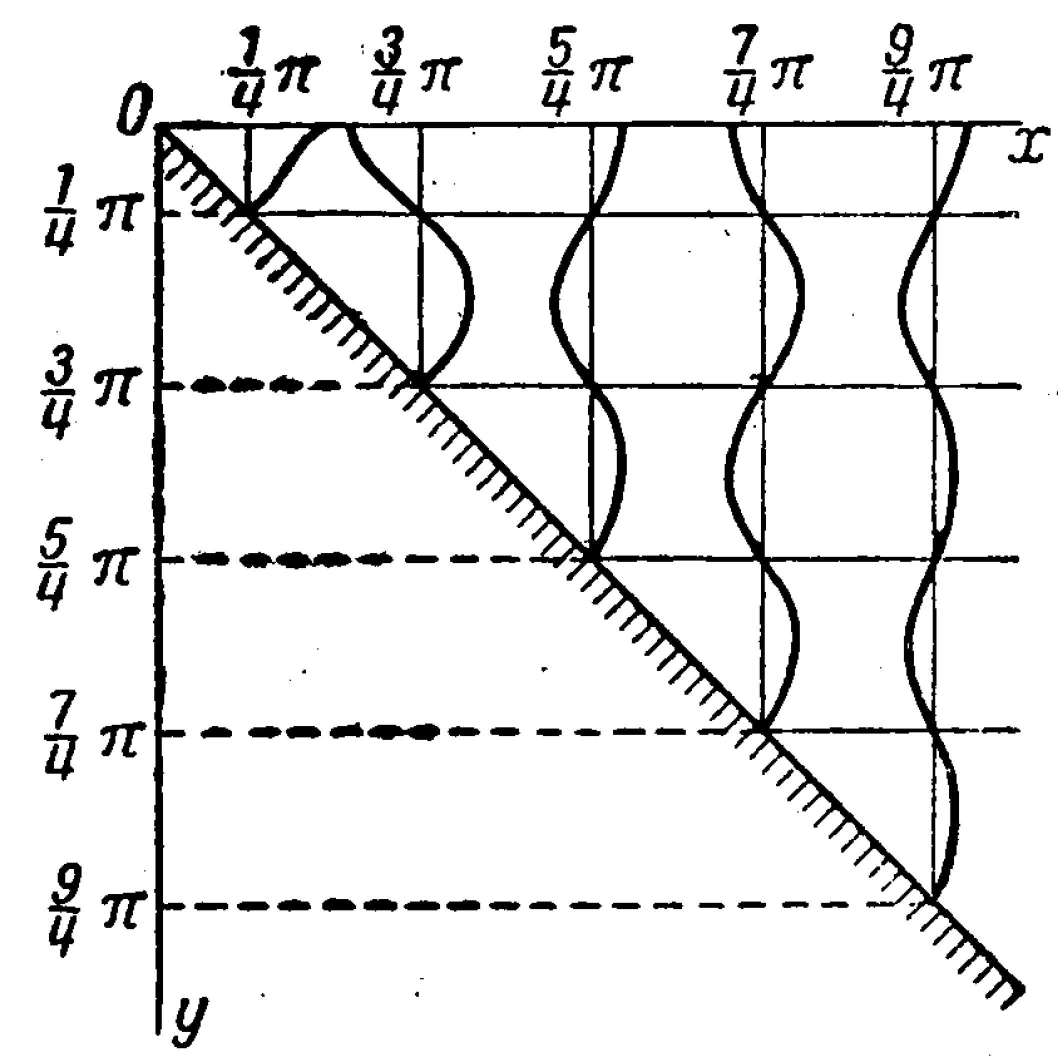
§ 8. Формулы (7.3), (7.4), (7.5) позволяют найти такое расположение источника колебаний, что в бесконечность не будут уходить прогрессивные периодические волны. Для определения таких положений источника необходимо решить уравнение, получаемое приравниванием к нулю выражений (7.3), (7.4), (7.5).

Рассмотрим самый простой случай, $\alpha = 45°$; для решения задачи нужно рассмотреть уравнение

$$e^{-\nu\rho\sin\mu}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + \nu\rho\cos\mu\right) + e^{-\nu\rho\cos\mu}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + \nu\rho\sin\mu\right) = 0$$

Положим $x = \nu\mu\cos\mu$, $y = \nu\rho\sin\mu$, тогда это уравнение приведем к виду

$$e^{x}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + x\right) = -e^{-y}\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi + y\right)$$



Из геометрического построения левой части этого уравнения и правой его части можно начертить кривую зависимости x от y. Эта кривая состоит из бесконечного числа отдельных ветвей, расположенных между осью x и биссектрисой координатного угла, ибо $x > y$ (фиг. 1).

Предположим, что угол μ дан; тогда будет известно отношение x к y, равное $\operatorname{ctg}\mu > 1$. Пересечем построенные кривые $x = x(y)$ прямой линией $x = y \operatorname{ctg}\mu$; тогда получим бесконечное число точек пересечения. Радиус-вектор, соединяющий начало координат с какой-нибудь точкой пересечения, будет иметь длину, равную $\nu\rho$. Таких величин $\nu\rho$ найдется бесконечное множество, имеющее предельным значением ∞. Следовательно, если наряду с углом μ, задать и расстояние ρ источника от начала координат, то найдется бесконечное число различных частот колебаний, стремящихся к бесконечности, для которых не будет образовываться уходящих в бесконечность периодических прогрессивных волн. Если же задать μ и ν, то найдется бесконечное число различных ρ, определяющих вместе с μ бесконечное число положений источника с нулевой амплитудой уходящих волн.

На кривые зависимости ρ от μ, построенные на плоскости внутри угла $-\alpha < -\mu < 0$, можно смотреть так же, как и на геометрические места расположений источников, не посылающих в бесконечность прогрессивных волн.

Поступила 4 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. ИЛ, 1959.
2. Wehausen J. V. und Laitone E. V. Surface Waves. Handbuch der Physik, 1960, Bd. IX.