Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ОДНА ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШАРОВОГО ГИРОСКОПА

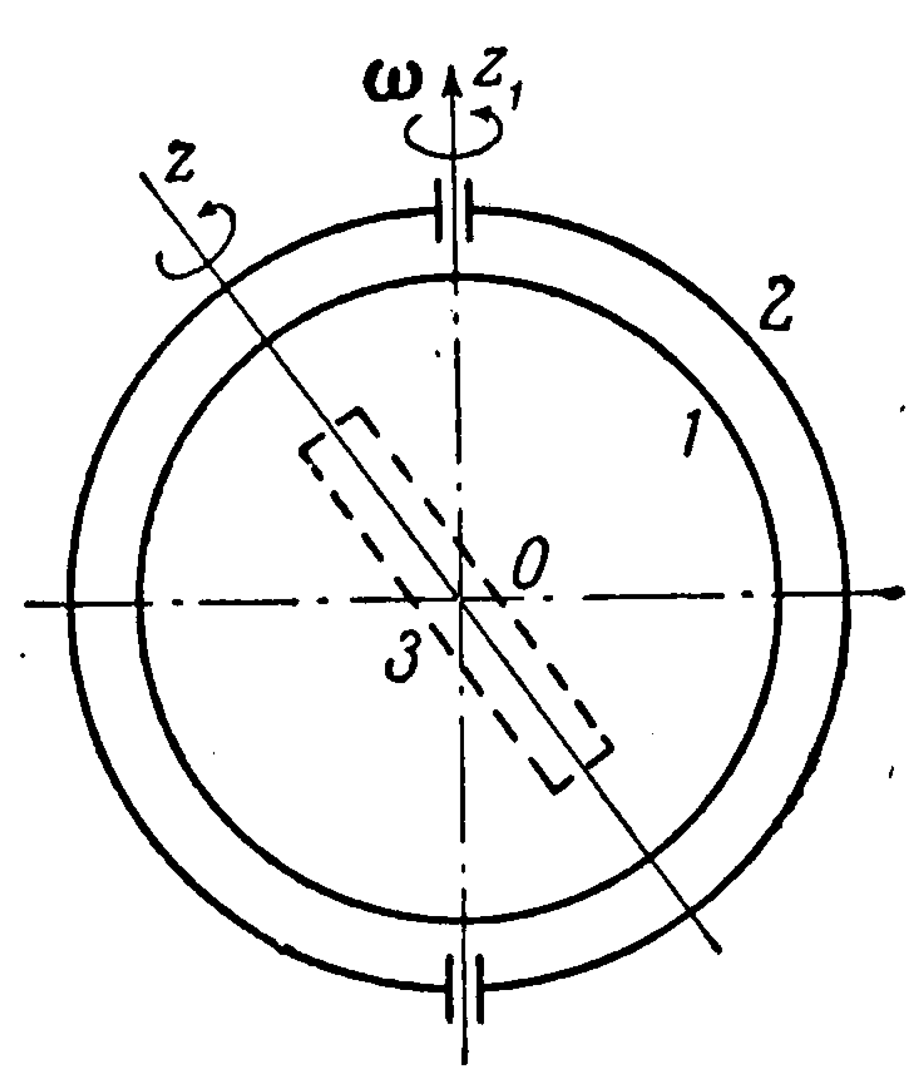
В. В. Крементуло

(Москва)

При некоторых предположениях о характере вязкого газового слоя рассматривается устойчивость вертикального вращения шарового гироскопа. Методом Ляпунова—Четаева получены достаточные условия асимптотической устойчивости. Выделены случаи астатического и тяжелого гироскопов, а также случай вращения с переменной угловой скоростью.

Принципиальная схема движения шарового гироскопа дана в работе [1]. Стальной шар *1* (фигура) помещен внутрь замкнутой сферической чаши *2*, вращающейся с постоянной скоростью вокруг неподвижной вертикальной оси Oz_1. Подаваемый через специальные отверстия в стенках чаши газ образует слой, целиком охватывающий шар и отделяющий его от стенок чаши. Предполагается, что в некоторый момент времени газовый слой становится однородным слоем постоянной ширины (равной разности радиусов чаши и шара) и остается таким во все последующее время движения. Таким образом, геометрический центр шара совпадает, по предположению, с центром чаши и является, следовательно, неподвижной точкой. Так как газ обладает определенной вязкостью, то чаша, вращаясь, увлекает за собой газовый слой, который, в свою очередь, вовлекает во вращение шар. Шар имеет внутри себя цилиндрическую выточку *3* для создания определенной динамической оси симметрии Oz, совпадающей в начальный момент с вертикалью Oz_1. Эллипсоид инерции шара относительно точки O будет эллипсоидом вращения.

1°. Уравновешенный гироскоп. Задача состоит в изучении устойчивости стационарного движения шара как твердого тела, у которого центр тяжести совпадает с точкой подвеса O и на которое действует вращающий момент M, создаваемый вязким газовым слоем и пропорциональный разности угловых скоростей шара и чаши. Момент M возьмем в виде



$$\mathbf{M} = -K(\Omega - \omega), \qquad K = \frac{8\pi R^4 \nu}{3d} \qquad (1.1)$$

где Ω — мгновенная угловая скорость шара, ω — постоянная угловая скорость чаши, R — радиус шара, d — ширина газового слоя, ν — коэффициент вязкости газа.

В пользу выбора такого численного значения коэффициента K говорят результаты решений некоторых аналогичных задач гидроаэромеханики [2].

Заметим, что движение газа здесь не рассматривается и газовый слой упоминается лишь в связи с созданием относительно точки O вращающего момента M. Действие момента M аналогично действию асинхронного мотора, поддерживающего постоянную угловую скорость в установившемся движении. Запишем уравнения движения шара в форме динамических уравнений Эйлера и кинематических уравнений Пуассона

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)\,qr=K\,(\omega\gamma-p),\qquad \frac{d\gamma}{dt}+q\gamma''-r\gamma'=0$$
$$A\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr=K\,(\omega\gamma'-q),\qquad \frac{d\gamma'}{dt}+r\gamma-p\gamma''=0 \tag{1.2}$$
$$C\frac{dr}{dt}=K\,(\omega\gamma''-r),\qquad \frac{d\gamma''}{dt}+p\gamma'-q\gamma=0$$

Здесь A — экваториальный момент инерции шара, C — осевой момент инерции шара, p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости шара Ω на главные оси инерции $Oxyz$, γ, γ', γ'' — направляющие косинусы вертикали Oz_1 с осями Ox, Oy, Oz соответственно. Изучаемый стационарный режим будет частным решением системы (1.2)

$$p=q=0,\qquad r=\omega=\mathrm{const},\qquad \gamma=\gamma'=0,\qquad \gamma''=1 \tag{1.3}$$

и соответствует вращению шара и чаши как единого целого вокруг вертикальной оси Oz_1. Правые части уравнений (1.2), зависящие от p, q, r, γ, γ', γ'', показывают, что механическая система, движение которой ими описывается, является существенно неконсервативной. Система уравнений (1.2) допускает только один известный интеграл

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=\mathrm{const} \tag{1.4}$$

Выясним устойчивость движения (1.3) в смысле Ляпунова по отношению к переменным p, q, r, γ, γ', γ''.

Задача об устойчивости вертикального вращения (1.3) по отношению к p, q, r, γ, γ', γ'' для тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в случае Лагранжа решена, как известно, Н. Г. Четаевым [3] методом построения функции Ляпунова в виде линейной связки интегралов уравнений возмущенного движения. В данном случае нет достаточного числа интегралов для построения линейной связки, однако можно попытаться построить знакоопределенную связку из специально подбираемых функций такую, чтобы выполнялись условия теоремы Ляпунова об устойчивости.

Введем в рассмотрение кинетическую энергию шара, проекцию момента количества движения шара G на ось Oz_1 и функцию Φ

$$T=\tfrac{1}{2}(Ap^2+Aq^2+Cr^2),\qquad G_{z_1}=Ap\gamma+Aq\gamma'+Cr\gamma''$$
$$\Phi=\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2 \tag{1.5}$$

Обозначив возмущенное движение, соответствующее (1.3), через

$$p=\xi,\qquad q=\eta,\qquad r=\omega+\zeta,\qquad \gamma=\alpha,\qquad \gamma'=\beta,\qquad \gamma''=1+\delta \tag{1.6}$$

можно записать

$$\begin{aligned}F_1&=A\,(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2+2C\omega\zeta\\ F_2&=A\,(\xi\alpha+\eta\beta)+C\zeta\delta+C\,(\omega\delta+\zeta)\\ F_3&=\alpha^2+\beta^2+\delta^2+2\delta\end{aligned} \tag{1.7}$$

Составим линейную связку функций (1.7) в виде

$$2V=F_1-2\omega F_2+C\omega^2F_3$$

Нетрудно видеть, что $2V$ будет квадратичной формой

$$2V=A\,(\xi^2+\eta^2)-2\omega A\,(\xi\alpha+\eta\beta)+C\omega^2(\alpha^2+\beta^2)+C\,(\zeta-\omega\delta)^2 \tag{1.8}$$

Производная от функции V, взятая в силу уравнений возмущенного движения, соответствующих движению (1.3)

$$V^{\cdot} = -K[(\xi-\omega\alpha)^2 + (\eta-\omega\beta)^2 + (\zeta-\omega\delta)^2] \tag{1.9}$$

будет знакопостоянной противоположного знака с V. Функция V, не будучи знакоопределенной по всем переменным ξ, η, ζ, α, β, δ, будет знакоопределенной по переменным ξ, η, α, β, $\zeta-\omega\delta$ при выполнении условия $C > A$, которое указывает на то, что ось Oz в этом случае будет малой осью эллипсоида инерции шара относительно точки O. Таким образом, на основании теоремы об устойчивости по части переменных [4] движение (1.3) устойчиво по отношению к p, q, γ, γ' $r-\omega\gamma''$. Переменные γ, γ', γ'' связаны во все время движения соотношением (1.4), поэтому из устойчивости решения (1.3) по отношению к γ, γ', следует устойчивость и по γ'', а из устойчивости по γ'' и $r-\omega\gamma''$ вытекает устойчивость по r. Следовательно, движение (1.3) при условии $C > A$ будет устойчивым по отношению ко всем переменным p, q, r, γ, γ', γ''.

Производная $V^{\cdot}$ не представляет собой знакоопределенную функцию, поэтому вывод об асимптотической устойчивости режима (1.3) сделать, вообще говоря, нельзя. Однако в некоторых случаях знакопостоянства производной достаточно для того, чтобы исследуемое невозмущенное движение оказалось устойчивым асимптотически. Такой достаточный критерий асимптотической устойчивости дает теорема, сформулированная в работе [5]. На основании этой теоремы асимптотическая устойчивость движения (1.3) будет доказана, если можно установить, что область $V^{\cdot}=0$ не содержит целиком решений уравнений возмущенного движения, соответствующих (1.3), кроме самого невозмущенного движения (1.3). Выясним детальнее характер области $V^{\cdot}=0$. Переходя в равенстве (1.9) от возмущений к значениям исходных переменных в возмущенном движении согласно (1.6), получим

$$V^{\cdot} = -K[(p-\omega\gamma)^2 + (q-\omega\gamma')^2 + (r-\omega\gamma'')^2] = -K|\Omega-\boldsymbol{\omega}|^2 \tag{1.10}$$

Отсюда видно, что производная $V^{\cdot}$ пропорциональна квадрату модуля векторной разности угловых скоростей шара в возмущенном и невозмущенном движениях, и, следовательно, равна нулю при $\Omega=\boldsymbol{\omega}$.

Система (1.2) показывает, что шар не может совершать стационарных движений, представляющих собой вращение вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, кроме движения (1.3). Значит, вопрос о том, содержит или не содержит область $V^{\cdot}=0$ целые интегральные кривые уравнений возмущенного движения, соответствующих (1.3), сводится к вопросу о том, может или не может шар при определенных начальных возмущениях совершать непрерывную последовательность мгновенных вращений с одной и той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Иным словами, может или не может твердое тело двигаться таким образом, что неподвижный аксоид вырождается в некоторую неподвижную прямую, в то время как подвижный аксоид остается невырожденным конусом. Кинематика твердого тела отвечает на этот вопрос отрицательно [6], что и позволяет сделать вывод о том, что движение (1.3) при условии $C > A$ будет асимптотически устойчивым независимо от величины K. Следовательно, для достижения асимптотической устойчивости вертикального вращения шара (1.3) достаточно, чтобы ось вращения была малой осью эллипсоида инерции шара относительно точки подвеса O. Аналогичный результат получен при изучении линейной задачи в работе [7].

Примечание. Результат, полученный в п. 1°, можно расширить, отказавшись от требования осесимметричности твердого тела. Пусть A, B, C — моменты инерции твердого тела относительно его главных осей $Oxyz$. Остальные предположения п. 1° остаются в силе. Нетрудно показать, что функция V

$$2V = A\xi^2 + B\eta^2 - 2\omega\ (A\xi\alpha + B\eta\beta) + C\omega^2(\alpha^2 + \beta^2) + C(\zeta - \omega\delta)^2 \tag{1.11}$$

определенно положительная по переменным ξ, η, α, β, $\zeta - \omega\delta$ при выполнении неравенств

$$C > A, \quad C > B \tag{1.12}$$

имеет в силу уравнений возмущенного движения, соответствующих режиму (1.3), производную (1.9). Значит, невозмущенное движение (1.3) будет асимптотически устойчивым при условии (1.12).

2°. Тяжелый гироскоп. Перейдем к задаче об устойчивости шара, находящегося под действием момента (1.1), у которого центр тяжести не совпадает с точкой подвеса O. Предположим, что центр тяжести шара лежит на его динамической оси симметрии Oz на расстоянии z_0 от точки O

Уравнения движения шара

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = mgz_0\gamma' + K\,(\omega\gamma - p), \qquad C\frac{dr}{dt} = K\,(\omega\gamma'' - r) \tag{2.1}$$

$$A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr = -\,mgz_0\gamma + K\,(\omega\gamma' - q),$$

при $\omega = \text{const}$ допускают стационарное решение (1.3). Придерживаясь прежних обозначений, изучим устойчивость режима (1.3) по отношению к p, q, r, γ, γ', γ''. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_1 = A\,(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 + 2C\omega\zeta + 2mgz_0\delta, \tag{2.2}$$

$$\Phi_2 = A\,(\xi\alpha + \eta\beta) + C\zeta\delta + C\,(\omega\delta + \zeta), \quad \Phi_3 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta$$

Функции Φ_2, Φ_3 совпадают с соответствующими функциями F_2, F_3 в п. 1°. Легко видеть, что производная от функции V_1

$$2V_1 = \Phi_1 - 2\omega\Phi_2 + (C\omega^2 - mgz_0)\,\Phi_3$$

взятая в силу уравнений возмущенного движения для (1.3), имеет вид (1.9). Функция $2V_1$ будет квадратичной формой

$$\begin{aligned} 2V_1 = A\,(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 - 2\omega\,(A\xi\alpha + A\eta\beta + C\zeta\delta) + \\ +(C\omega^2 - mgz_0)\ (\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

получающейся из формы более общего вида, построенной Четаевым [3], при $\lambda = -\,\omega$, $\mu = 0$ (в обозначениях [3]).

Условия знакоопределенности функции (2.3)

$$(A - C)\,\omega^2 + mgz_0 < 0, \qquad z_0 < 0 \tag{2.4}$$

в силу вышеизложенного будут условиями асимптотической устойчивости движения (1.3). Как и ранее, коэффициент K в условия асимптотической устойчивости непосредственно не входит, определяя быстроту затухания возмущенных движений оси гироскопа. Неравенства (2.4) могут иметь место при любых соотношениях между A и C. В случае $C > A$ неравенства (2.4) эквивалентны

$$z_0 < 0 \tag{2.5}$$

а в случае $C < A$ сводятся к условию

$$(A - C)\,\omega^2 + mgz_0 < 0 \tag{2.6}$$

3°. Случай $\omega = \omega(t)$. Выше была изучена устойчивость стационарного движения шара, представляющего вращение вокруг вертикали со скоростью, равной постоянной скорости чаши ω. Как показывает система (1.2), в случае $\omega = \omega(t)$ нестационарное движение шара

$$p = q = 0, \qquad r = \omega(t), \qquad \gamma = \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = 1 \tag{3.1}$$

не имеет места. Движение (3.1), тем не менее, возможно при наличии специальных корректирующих устройств, создающих дополнительный момент $M_z^k(t)$ вокруг оси Oz. Во всякой реальной гироскопической системе вводятся обычно корректирующие устройства, обеспечивающие осуществление некоторого расчетного движения, что оправдывает в известной степени предлагаемую постановку задачи.

Если $M_z^k(t)$ удовлетворяют условию

$$M_z^k(t) = C\omega^{\cdot}(t) \tag{3.2}$$

то система уравнений

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = K(\omega\gamma - p), \qquad C\frac{dr}{dt} = K(\omega\gamma'' - r) + M_z^k(t)$$
$$A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr = K(\omega\gamma' - q), \tag{3.3}$$

допускает частное решение (3.1). Придерживаясь принятых обозначений, запишем уравнения возмущенного движения, соответствующие (3.1)

$$A\frac{d\xi}{dt} + (C - A)\,\eta(\omega + \zeta) = K(\omega\alpha - \xi), \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \beta(\omega + \zeta) - \eta(1 + \delta)$$
$$A\frac{d\eta}{dt} + (A - C)\,\xi(\omega + \zeta) = K(\omega\beta - \eta), \qquad \frac{d\beta}{dt} = \xi(1 + \delta) - \alpha(\omega + \zeta)$$
$$C\frac{d\zeta}{dt} = K(\omega\delta - \zeta), \qquad \frac{d\delta}{dt} = \eta\alpha - \zeta\beta \tag{3.4}$$

В качестве функции Ляпунова V рассмотрим связку функций

$$2V = F_1 - 2\omega(t)\,F_2 + C\omega^2(t)\,F_3 + \mu(t)\,F_4^2$$

где F_1, F_2, F_3 определяются согласно (1.7), а $F_4 = \zeta$. Функции $\omega(t)$, $\mu(t)$ предполагаются ограниченными, непрерывными, дважды дифференцируемыми на бесконечном интервале времени $t \geqslant t_0$; кроме того,

$$\omega(t) > \omega^* > 0, \qquad \dot\omega(t) \neq 0 \quad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{3.5}$$

Рассматриваемая функция V будет квадратичной формой с переменными коэффициентами

$$2V(t, \xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \delta) = A(\xi^2 + \eta^2) + (C + \mu)\,\zeta^2 -$$
$$- 2\omega(A\xi\alpha + A\eta\beta + C\zeta\delta) + C\omega^2(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) \tag{3.6}$$

Производная от (3.6), взятая в силу уравнений (3.4), будет также квадратичной формой

$$V^{\cdot} = -K\,[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\omega\,(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\delta) + \omega^2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2)] -$$
$$-\,\omega^{\cdot}\,(A\xi\alpha + A\eta\beta + C\zeta\delta) + C\omega\omega^{\cdot}\,(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) + \mu\frac{K}{C}\zeta\,(\omega\delta - \zeta) +$$
$$+\frac{1}{2}\mu^{\cdot}\zeta^2 = -K\Psi\,(t, \xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \delta) \qquad (3.7)$$

На основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости невозмущенное движение (3.1) окажется асимптотически устойчивым, если функция (3.6) будет определенно-положительной, а функция (3.7) определенно-отрицательной в смысле Ляпунова (требование о наличии бесконечно малого высшего предела у формы V выполнено при сделанных предположениях о характере функций $\omega\,(t)$ и $\mu\,(t)$). Таким образом, движение (3.1) асимптотически устойчиво, если для квадратичных форм

$$2V - \lambda_1\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \lambda_2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2)$$
$$\Psi - \lambda_3\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \lambda_4\,(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) \qquad (3.8)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — сколь угодно малые строго положительные числа) выполнены условия Сильвестра. Каждую из этих форм можно представить в виде суммы трех форм от переменных (ξ, α), (η, β) и (ζ, δ). Условия Сильвестра запишем для этих форм от двух переменных

$$A > \lambda_1, \quad \begin{vmatrix} A-\lambda_1 & -\omega A \\ -\omega A & C\omega^2-\lambda_2 \end{vmatrix} > 0, \quad C+\mu > \lambda_1, \quad \begin{vmatrix} C+\mu-\lambda_1 & -\omega C \\ -\omega C & C\omega^2-\lambda_2 \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.9)$$

$$1 > \lambda_3, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda_3 & -\omega + \dfrac{A}{2K}\omega^{\cdot} \\ -\omega + \dfrac{A}{2K}\omega^{\cdot} & \omega^2 - \omega\omega^{\cdot}\dfrac{C}{K} - \lambda_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \omega^2 - \omega\omega^{\cdot}\frac{C}{K} > \lambda_3$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega\omega^{\cdot}\dfrac{C}{K} - \lambda_3 & -\omega\left(1 + \dfrac{\mu}{2C}\right) + \dfrac{C}{2K}\omega^{\cdot} \\ -\omega\left(1 + \dfrac{\mu}{2C}\right) + \dfrac{C}{2K}\omega^{\cdot} & 1 + \dfrac{\mu}{C} - \dfrac{\mu^{\cdot}}{2K} - \lambda_4 \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.10)$$

Чтобы оценить основной результат, проанализируем эти неравенства при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. В этом случае неравенства (3.9) дают

$$C > A, \qquad \mu > 0 \qquad (3.11)$$

Неравенства (3.10) сводятся к (3.12)

$$4K\,(A - C)\,\omega\omega^{\cdot} - A^2\omega^{\cdot 2} > 0, \qquad \mu^{\cdot}\left(\omega^2 - \omega\omega^{\cdot}\frac{C}{K}\right) + \frac{1}{2}K\left(\frac{\mu}{C}\omega + \frac{C}{K}\omega^{\cdot}\right)^2 < 0$$

Первое соотношение (3.12) дает

$$\frac{\omega^{\cdot}}{\omega} > \frac{4K\,(A-C)}{A^2} \qquad (3.13)$$

Перейдем теперь к выбору функции $\mu\,(t)$, стесненной неравенствами (3.11) и (3.12). При

$$\mu = -\frac{C^2}{K}\frac{\omega^{\cdot}}{\omega}, \qquad \mu^{\cdot} < 0 \qquad (3.14)$$

удовлетоpяется второе соотношение (3.12).

Учитывая (3.11), получим следующие ограничения на ω

$$\frac{\omega^{\cdot}}{\omega} < 0, \qquad \left(\frac{\omega^{\cdot}}{\omega}\right)^{\cdot} > 0 \tag{3.15}$$

Объединяя (3.13) и (3.15), получаем неравенства, к которым приводятся условия (3.9), (3.10) при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0$

$$C > A,\ 0 > \frac{\omega^{\cdot}}{\omega} > -4K\frac{C-A}{A^2}, \qquad \left(\frac{\omega^{\cdot}}{\omega}\right)^{\cdot} > 0 \tag{3.16}$$

Если отказаться от допущения $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0$, то как нетрудно проверить, неравенства (3.9), (3.10) дают следующие достаточные условия асимптотической устойчивости режима (3.1)

$$C > A + \varepsilon_1,\ -\varepsilon_3 > \frac{\omega^{\cdot}}{\omega} > -4K\frac{C-A}{A^2} + \varepsilon_2 < 0, \qquad \left(\frac{\omega^{\cdot}}{\omega}\right)^{\cdot} > 0 \tag{3.17}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — сколь угодно малые строго положительные числа. Неравенства (3.17) определяют некоторый класс асимптотически устойчивых движений (3.1). Условия (3.17) были получены из рассмотрения частного вида функции (3.6) при коэффициенте $\mu(t)$, определяемом согласно (3.14). Однако можно найти, вообще говоря, другие функции μ, удовлетворяющие дифференциальному неравенству (3.12), что может расширить класс асимптотически устойчивых движений (3.1). Этой же цели может служить рассмотрение вместо (3.6) функции Ляпунова более общего вида

$$2V^* = F_1 + 2\lambda F_2 - C\omega\lambda F_3 + \mu F_4^2 - 2C(\omega + \lambda) F_4$$

где $\lambda = \lambda(t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям, аналогичным соответствующим условиям для $\mu(t)$.

Рассмотрим, при каких условиях имеет место асимптотическая устойчивость движения (3.1) в случае тяжелого гироскопа. Эта задача решается при помощи квадратичной формы

$$2V_1 = \Phi_1 - 2\omega\Phi_2 + (C\omega^2 - mgz_0)\Phi_3 + \mu\Phi_4^2 \tag{3.18}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 определяются согласно (2.2), а Φ_4 совпадает с F_4. Как нетрудно видеть, производная от (3.18) в силу уравнений возмущенного движения совпадает с (3.7). Вместо (3.16) в данном случае получим

$$(C-A)\omega^2 > mgz_0, \qquad -\frac{K}{C}\frac{mgz_0}{C\omega^2 - mgz_0}\omega > \omega^{\cdot} > -4K\frac{C-A}{A^2}\omega, \qquad \left(\frac{\omega^{\cdot}}{\omega}\right)^{\cdot} > 0$$

Автор приносит благодарность В. В. Румянцеву и С. А. Харламову за интерес к работе и полезные замечания в ходе ее выполнения.

Поступила 20 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. William C. Pittman. Dynamics of Air-Supported Spherical Gyroscope. ARS Journal, 1962, vol. 32, N 7.
2. Лойцянский Л. Г. Гидродинамическая теория сферического подшипника. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 5.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд. АН СССР, 1962, стр. 21.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
5. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, вып. 3.
6. Аппель П. Теоретическая механика, т. I. Физматгиз, 1960, стр. 84.
7. Бойчук О. Ф. Устойчивость движения осесимметричного твердого тела (гироскопа) на сферической опоре. Докл. АН УССР, 1963, № 1.