К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. М. Александров (Ростов-на-Дону)

Рассматриваются следующие контактные задачи теории упругости: 1) задача о действии штампа на упругую полосу толщины h, лежащую без трения на жестком основании; 2) задача о действии штампа на упругую полосу толщины h, жестко приделанную к жесткому основанию; 3) осесимметричная задача о взаимодействии бандажа с упругим цилиндром радиуса R.

Методами операционного исчисления эти задачи могут быть приведены к решению следующего интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} q(\xi) K\left(\frac{x-\xi}{l}\right) d\xi = \pi\Delta\delta(x), \qquad |x| \leqslant a, \qquad \Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)} \tag{1}$$

Здесь a — полудлина линии контакта, $q(\xi)$ — контактное давление, $\delta(x)$ — осадка поверхности полосы или цилиндра в области контакта, $l = h$ или $l = R$. Ядро $K(k)$ уравнения (1) имеет вид

$$K(k) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ku du, \qquad \text{причем } L(u) \to 1 \quad \text{при} \quad u \to \infty \tag{2}$$

При значениях параметра $\lambda = l / a > 1$ имеется ряд способов, при помощи которых приближенные решения уравнения (1) для задач 1) — 3) могут быть получены достаточно просто. Однако при $\lambda < 1$ одни из этих способов становятся вовсе неприменимыми, другие при уменьшении λ требуют все более громоздких преобразований и вычислений для получения решений необходимой точности. Выручает здесь только то, что при очень малых значениях λ для всех указанных выше задач может быть найдено очень простое вырожденное решение, которое имеет вид

$$q(x) = \frac{\Delta\delta(x)}{Al}, \qquad A = \lim_{u\to 0} \frac{L(u)}{u} \tag{3}$$

Это решение, как будет установлено ниже, дает практически точные результаты при $\lambda \leqslant {}^1/_5$. Следует только отметить, что вырожденное решение (3) обладает одним существенным недостатком. Если $\delta'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то при любом значении $\lambda \in (0, \infty)$ решение уравнения (1) для задач 1) — 3), как можно показать, должно иметь особенность вида $(a^2 - x^2)^{-1/2}$. Из этого следует, что решение (3) при значениях x, очень близких $k \pm a$, будет давать неверные результаты.

Исходя из всего вышесказанного, зададимся целью получить практически удобное приближенное решение уравнения (1), пригодное при значениях $0 < \lambda \leqslant 1$ и имеющее особенность вида $(a^2 - x^2)^{-1/2}$.

Имея в виду результаты работы М. Г. Крейна [1], будем стремиться получить указанное решение уравнения (1) для случая $\delta(x) = \delta = \text{const}$. Это решение, очевидно, должно иметь вид

$$q(x) = \frac{\Delta\delta}{Al} [1 + f_+(x) + f_-(x)] \tag{4}$$

где функции f_+ и f_- обладают следующими свойствами:

функция $f_+(x)$ имеет особенность вида $(a-x)^{-1/2}$ и быстро стремится к нулю при значениях $x < a$;

функция $f_-(x)$ имеет особенность вида $(a+x)^{-1/2}$ и быстро стремится к нулю при значениях $x > -a$.

Итак задача сводится к нахождению функций f_+ и f_- с указанными свойствами. Уравнение (1) представим в других переменных:

$$\int_0^{2/\lambda} q(l\tau - a) K(t-\tau) d\tau = \frac{\pi\Delta\delta}{l} \qquad \left(t = \frac{a+x}{l}, \ \tau = \frac{a+\xi}{l}\right) \tag{5}$$

Перепишем (5) в виде

$$\int_0^\infty q(l\tau - a)\, K(t-\tau)\, d\tau = \frac{\pi\Delta\delta}{l} + \int_{2/\lambda}^\infty q(l\tau - a)\, K(t-\tau)\, d\tau \tag{6}$$

Решая при малых значениях λ интегральное уравнение (6) методом последовательных приближений, можно с достаточной для дальнейшего точностью ограничиться нулевым приближением, которое определяется из уравнения

$$\int_0^\infty q(l\tau - a)\, K(t-\tau)\, d\tau = \frac{\pi\Delta\delta}{l} \tag{7}$$

Интегральное уравнение (7) есть уравнение задачи о действии полубесконечного штампа ($-a \leqslant x < \infty$) на упругую полосу или задачи о взаимодействии полубесконечного бандажа($-a \leqslant x < \infty$) с упругим цилиндром. Это говорит о том, что при малых λ влиянием правого конца штампа или бандажа на напряженное состояние под левым (и наоборот) можно пренебречь.

Таким образом, распределение контактного давления $q(x)$ под левым концом достаточно хорошо описывается решением уравнения (7), которое, очевидно, имеет вид

$$q(x) = \frac{\Delta\delta}{Al}\,[1 + f_-(x)] \tag{8}$$

Решение уравнения (7) может быть получено в замкнутом виде методом Винера—Хопфа, и, следовательно, функция $f_-(x)$ всегда может быть определена. Аналогичным образом может быть найдена и функция $f_+(x)$. Таким образом, решение вида (4) уравнения (1), справедливое при малых значениях λ, всегда может быть построено.

Чтобы получить решение, пригодное для практических вычислений, поступим следующим образом. Введем в рассмотрение функцию [2]

$$\Lambda(u) = u^{-1} L(u) \sqrt{u^2 + A^{-2}} \tag{9}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$\Lambda(u) \to 1 \quad \text{при } u \to \infty \text{ и } u \to 0$$

Кроме того, непосредственными вычислениями легко показать, что для перечисленных выше задач 1), 2), 3) функция $\Lambda(u)$ отклоняется от 1 при всех значениях $u \in (0, \infty)$ не более чем на 20%, так что с достаточной для дальнейшего степенью точности можно принять $\Lambda(u) \equiv 1$ (ошибка окончательных результатов в самых неблагоприятных случаях не превышает 6%). Тогда ядро уравнения (7) будет иметь вид

$$K(k) = \int_0^\infty \frac{\cos ku\, du}{\sqrt{u^2 + A^{-2}}} \tag{10}$$

а его решение дается формулой ($\Phi(x)$ — интеграл вероятности)

$$q(x) = \frac{\Delta\delta}{Al}\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{2(a+x)}{Al}}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a+x}{Al}\right)^{-1/2} \exp\frac{-(a+x)}{Al}\right] \tag{11}$$

Теперь без труда можно получить решение уравнения (1) типа (4), которое представим в виде, удобном для вычислений

$$q(x) = \frac{\Delta\delta}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\omega\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\omega\left(\frac{x}{a}\right) = [\Phi(\alpha\sqrt{2}) + \Phi(\beta\sqrt{2}) - 1]\,\alpha\beta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(\beta e^{-\alpha^2} + \alpha e^{-\beta^2})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a+x}{Al}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{a-x}{Al}} \tag{12}$$

Получим еще величину

$$P = \int_{-a}^{a} q(x)\,dx = \pi\Delta\delta\varkappa$$

$$\varkappa = \frac{D^2}{\pi}\left[(2 + D^{-2})\,\Phi(D) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}D^{-1}e^{-D^2} - 1\right], \qquad D = \sqrt{\frac{2}{A\lambda}} \qquad (13)$$

Проведенные вычисления убедительно показали, что полученное решение (12) (13) дает практически верные результаты при $\lambda \leqslant 1$, причем точность повышается с уменьшением λ. Результаты некоторых вычислений представлены в таблице 1. Для сравнения в таблице даны значения величины $\varkappa°$, вычисленные способами работ [3, 5] (для задач 2) и 3) вычисления проведены при $\sigma = 0.3$).

Таблица 1

Задачи:	1)			2)	3)
λ	1	0.5	0.25	1	1
$\varkappa°$	1.50	2.85	5.41	1.76	1.86
$\varkappa$	1.47	2.84	5.41	1.79	1.89

Определим теперь на основании формулы (13) границы применимости вырожденного решения (3), которые в работах [3, 4] указаны с некоторым запасом. Исходя из соотношения

$$\frac{P - P^*}{P^*}100\% \leqslant 5\% \qquad (P^* = D^2\Delta\delta)$$

или

$$(2 + D^{-2})\,\Phi(D) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}D^{-1}e^{-D^2} \leqslant 2.05$$

Таблица 2

Задачи:	1)	2)	3)
$\lambda_0°$	$^1/_5$	$^1/_7$	$^1/_4$
λ_0	$^1/_5$	$^1/_4$	$^1/_4$

найдем, что вырожденное решение будет давать практически верные результаты при $\lambda \leqslant \lambda_0 = 0.1\,A^{-1}$. Результаты вычисления величины λ_0 для задачи 1), 2), 3) даны в табл. 2 (для задачи 2) и 3) принято $\sigma = 0.3$); в табл. приведены также значения $\lambda_0°$, указанные в работах [3, 4].

Автор искренне благодарен И. И. Воровичу и Ю. И. Черскому за замечания, сделанные ими при обсуждении работы.

Поступила 3 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, 100, № 3.
2. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener—Hopf tupe integral equations with applications. Koninkl Ned. Akad. Wetenschap. Proc., 1954, B. 57, 558—579.
3. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
4. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.