

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ

В. А. Пальмов (Ленинград)

Известно, что поверхность деталей машин является шероховатой. Шероховатость изменяет напряженное состояние вблизи поверхности в сравнении со случаем идеальной нешероховатой поверхности.

Выяснению вопроса о величине этих изменений посвящена данная работа. Шероховатая поверхность рассматривается как реализация однородного статистически анизотропного случайного поля с нормальным законом распределения.

Предполагается, что материал упругого тела является изотопным.

1. Рассматриваем упругое полупространство  $[z \geq H(x, y)]$ , подвергающееся на бесконечности  $z \rightarrow \infty$  действию нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (фиг. 1).

Предполагаем, что граница полупространства  $z = H(x, y)$  мало отличается от плоскости  $z = 0$ . Кроме того, границу считаем свободной от напряжений

$$\begin{aligned} \gamma_1 \sigma_x + \gamma_2 \tau_{xy} + \gamma_3 \tau_{xz} &= 0, & \gamma_1 \tau_{xy} + \gamma_2 \sigma_y + \gamma_3 \tau_{yz} &= 0 \\ \gamma_1 \tau_{xz} + \gamma_2 \tau_{yz} + \gamma_3 \sigma_z &= 0 & \text{при } z = H(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и т. д. — составляющие тензора напряжений, а  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $z = H(x, y)$ . Последние с точностью до величин первого порядка относительно производных  $H$  равны

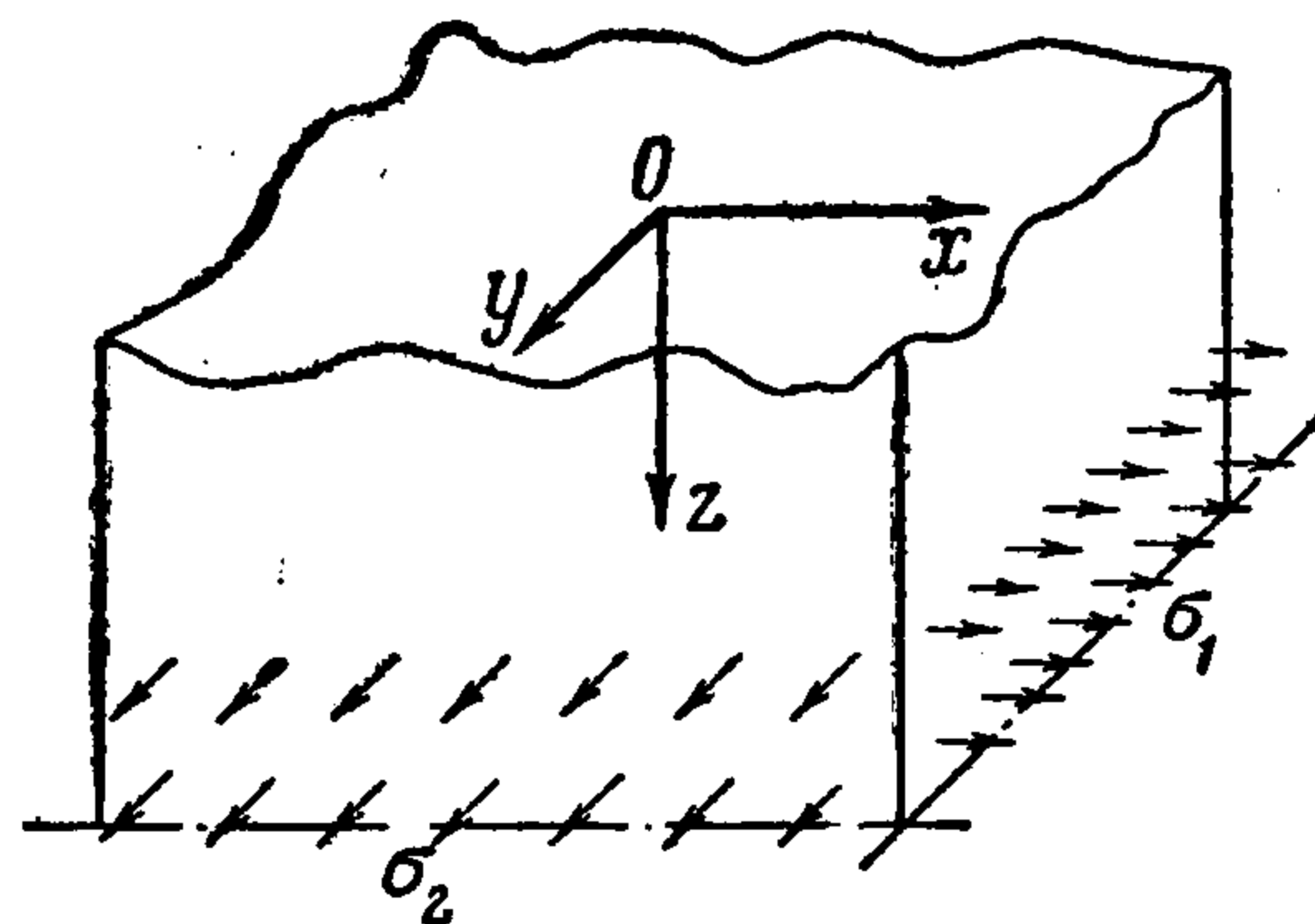
$$\gamma_1 = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \gamma_3 = -1 \quad (1.2)$$

Значения напряжений при  $z = H(x, y)$  запишем с помощью разложений

$$\sigma_x|_{z=H} = \sigma_x|_{z=0} + H \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \Big|_{z=0} + \dots \quad \text{и т. д.} \quad (1.3)$$

Внесем выражения (1.3) и (1.2) в (1.1) и запишем граничные условия на свободной поверхности с точностью до величин первого порядка относительно  $H$  и его производных

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \sigma_x \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \tau_{zy} &= \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \text{при } z = 0 \\ \sigma_z &= \tau_{zx} \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial H}{\partial y} - H \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Искомые напряжения должны удовлетворять граничным условиям (1.4), условиям нагружения на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) и полной системе уравнений теории упругости в напряжениях. Решение задач найдем методом последовательных приближений, принимая в качестве первого решение задачи при  $H = 0$ . В этом случае, очевидно, имеем во всей области, занятой телом

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (1.5)$$

Второе приближение возьмем в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 + \sigma_x^{(1)}, & \sigma_y &= \sigma_2 + \sigma_y^{(1)}, & \sigma_z &= \sigma_z^{(1)} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)}, & \tau_{xz} &= \tau_{xz}^{(1)}, & \tau_{yz} &= \tau_{yz}^{(1)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для определения напряжений  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}$  и т. д. имеем граничные условия

$$\tau_{xz}^{(1)} = \sigma_1 \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \sigma_z^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.7)$$

которые получены подстановкой в правые части (1.4) напряжений первого приближения; имеем также условие обращения в нуль величин  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$  и т. д. при  $z \rightarrow \infty$ . Эти условия соответствуют задаче о действии касательных напряжений на полупространство. В книге А. И. Лурье [1] решение ее представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} &= 2 \left[ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial x} - \frac{z}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{m} \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz \right] \\ \sigma_y^{(1)} &= 2 \left[ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} - \frac{z}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{m} \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz \right] \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{2}{m} \int_z^\infty \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) dz \\ \tau_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \\ \sigma_z^{(1)} &= -z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.8)$$

Здесь  $m$  — число Пуассона, а  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — гармонические в полупространстве  $z > 0$  функции, стремящиеся к нулю при  $z \rightarrow \infty$  и удовлетворяющие следующим граничным условиям при  $z = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \tau_{zx}^{(1)} = \sigma_1 \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = \tau_{zy}^{(1)} = \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial y}\quad (1.9)$$

Допустим, что напряжения во втором приближении найдены. Однако ни одно из них в отдельности не характеризует полностью напряженного состояния. При вычислениях же коэффициента концентрации напряжений желательно введение какой-либо одной инвариантной характеристики напряженного состояния. Такой характеристикой, по крайней мере для пластических материалов, является интенсивность касательных напряжений  $T$ , определяемая следующей формулой (см., например, [2])

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y + \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]^{1/2}\quad (1.10)$$

Подставим в (1.10) выражения напряжений по (1.6) и, полагая возмущения  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$  и т. д. малыми величинами, линеаризуем результат. В полученной формуле

$$T = T_0 + \frac{1}{6T_0} [(2\sigma_1 - \sigma_2) \sigma_x^{(1)} + (2\sigma_2 - \sigma_1) \sigma_y^{(1)}]\quad (1.11)$$

величина  $T_0$  представляет значение интенсивности касательных напряжений при отсутствии возмущений

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2}\quad (1.12)$$

2. Положим, что поверхность  $z = H(x, y)$  представляет однородное анизотропное случайное поле (см. [3]) с нулевым значением математического ожидания. Корреляционная функция такого поля

$$K(x - x_1, y - y_1) = M [H^*(x, y) H(x_1, y_1)]\quad (2.1)$$

зависит только от разностей  $x - x_1$  и  $y - y_1$ , а само поле допускает спектральное разложение

$$H(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu x + \nu y)} V(\mu, \nu) d\mu d\nu\quad (2.2)$$

Здесь  $V(\mu, \nu)$  — случайная функция аргументов  $\mu$  и  $\nu$  с нулевым значением математического ожидания и корреляционной функцией

$$M [V^*(\mu, \nu) V(\mu_1, \nu_1)] = S(\mu, \nu) \delta(\mu - \mu_1) \delta(\nu - \nu_1)\quad (2.3)$$

причем  $M$  [...] обозначает операцию математического ожидания,  $\delta$  — дельта-функция, а звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина. Неслучайная функция  $S(\mu, \nu)$  называется спектральной плотностью однородного случайного поля  $H(x, y)$ .

Подставив  $H$  по формуле (2.2) в (1.9), получим граничные условия

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \sigma_1 \iint_{-\infty}^{\infty} i\mu e^{i(\mu x + \nu y)} V d\mu d\nu, \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = \sigma_2 \iint_{-\infty}^{\infty} i\nu e^{i(\mu x + \nu y)} V d\mu d\nu \quad \text{при } z = 0 \quad (2.4)$$

С их помощью легко находятся гармонические в полупространстве  $z > 0$  функции

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{i\mu\sigma_1 V}{\mu^2 + \nu^2} \exp[-z\sqrt{\mu^2 + \nu^2} + i(\mu x + \nu y)] d\mu d\nu \\ \psi_2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{i\nu\sigma_2 V}{\mu^2 + \nu^2} \exp[-z\sqrt{\mu^2 + \nu^2} + i(\mu x + \nu y)] d\mu d\nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

При исследовании концентрации напряжений наибольший интерес представляет знание напряжений на границе полупространства. Последние с точностью до величин первого порядка совпадают со значениями тех же напряжений при  $z = 0$ . Поэтому приводим выражения  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$  при  $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ \mu^2 \sigma_1 + \frac{\nu^2}{m} \frac{\mu^2 \sigma_1 + \nu^2 \sigma_2}{\mu + \nu^2} \right] \frac{e^{i(\mu x + \nu y)}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} V d\mu d\nu \\ \sigma_y^{(1)} &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ \nu^2 \sigma_2 + \frac{\mu^2}{m} \frac{\mu^2 \sigma_1 + \nu^2 \sigma_2}{\mu^2 + \nu^2} \right] \frac{e^{i(\mu x + \nu y)}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} V d\mu d\nu \end{aligned} \quad (2.6)$$

и т. д.

Внося найденные выражения возмущений в формулу (1.11), получим значение интенсивности касательных напряжений на поверхности упругого тела

$$T = T_0 + \frac{1}{3T_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu, \nu) e^{i(\mu x + \nu y)} V d\mu d\nu \quad (2.7)$$

Функция  $\Phi$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \nu) &= \frac{2\mu^2 \sigma_1^2 + 2\nu^2 \sigma_2^2 - (\mu^2 + \nu^2) \sigma_1 \sigma_2}{(\mu^2 + \nu^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{1}{m} \frac{(\mu^2 \sigma_1 + \nu^2 \sigma_2) [(2\sigma_1 - \sigma_2) \nu^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1) \mu^2]}{(\mu^2 + \nu^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Математическое ожидание и дисперсию  $T$  запишем с помощью формул (2.7), (2.3)

$$M[T] = T_0, \quad D = \frac{1}{9T_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\mu, \nu) S(\mu, \nu) d\mu d\nu \quad (2.9)$$

В качестве коэффициента концентрации напряжений примем величину

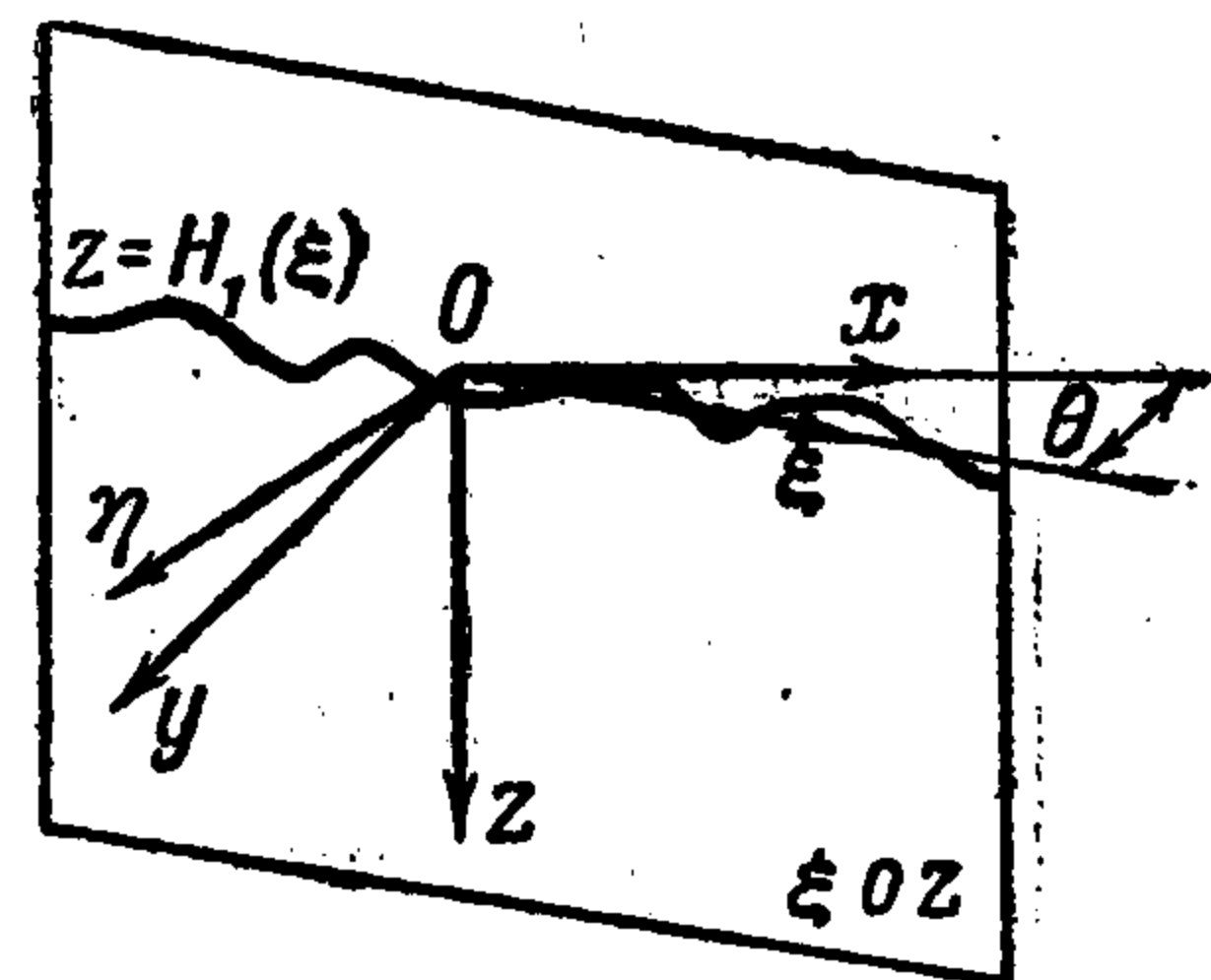
$$\alpha = 1 + 2 \frac{D^{1/2}}{T_0} \quad (2.10)$$

3. Пусть поверхность  $z = H(x, y)$  образуется поступательным движением кривой

$$z = H_1(\xi) \quad (3.1)$$

вдоль оси  $\eta$ . Расположение осей  $\xi$  и  $\eta$  показано на фиг. 2.

Полученная цилиндрическая поверхность — достаточно хорошая идеализация реальной поверхности деталей машин после механической обработки (строгание, фрезерование, шлифование).



Фиг. 2

Положим, что функция  $H_1(\xi)$  — так называемая стационарная случайная функция аргумента  $\xi$ . Ее корреляционную функцию обозначим  $K_1(\xi - \xi_1)$ , а спектральную плотность —  $S_1(\omega)$ . Между ними существует известная зависимость (см. [3])

$$S_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad K_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega \quad (3.2)$$

Поверхность  $z = H(x, y)$  — цилиндрическая, поэтому корреляционная функция случайного поля  $H(x, y)$  имеет вид

$$K(x - x_1, y - y_1) = K_1(\xi - \xi_1) \quad (3.3)$$

причем  $\xi, \eta$  и  $x, y$  связаны соотношениями

$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \eta = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (3.4)$$

$$x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \quad y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta \quad (3.5)$$

Найдем спектральную плотность случайного поля  $H(x, y)$ . По определению [3]

$$S(\mu, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} K(x, y) e^{-i(\mu x + \nu y)} dx dy \quad (3.6)$$

Подставим сюда выражение корреляционной функции по формуле (3.3) и перейдем к интегрированию по переменным  $\xi$  и  $\eta$

$$S(\mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi) e^{-i\xi(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta)} d\xi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta(\nu \cos \theta - \mu \sin \theta)} d\eta \quad (3.7)$$

Первый интеграл, в силу первой формулы (3.2), равен

$$S_1(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta)$$

второй — дельта-функции

$$\delta(\nu \cos \theta - \mu \sin \theta)$$

Таким образом, получаем

$$S(\mu, \nu) = S_1(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta) \delta(\nu \cos \theta - \mu \sin \theta) \quad (3.8)$$

С помощью представления (3.8) вычислим согласно (2.9) дисперсию  $T$ ; имеем

$$D = \frac{1}{9T_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\mu, \nu) S_1(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta) \delta(\nu \cos \theta - \mu \sin \theta) d\mu d\nu \quad (3.9)$$

Производя интегрирование по  $\nu$ , получим

$$D = \frac{1}{9T_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\mu, \mu \operatorname{tg} \theta) S_1\left(\frac{\mu}{\cos \theta}\right) \frac{d\mu}{\cos \theta} \quad (3.10)$$

Вводя новую переменную  $\omega$  соотношением  $\mu = \omega \cos \theta$ , находим

$$D = \frac{1}{9T_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) S_1(\omega) d\omega \quad (3.11)$$

Так как  $\Phi(\mu, \nu)$  — однородная функция первой степени относительно своих аргументов и в то же время четная функция, справедливо соотношение

$$\Phi(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = |\omega| \Phi(\cos \theta, \sin \theta) \quad (3.12)$$

которое позволяет записать  $D$  в следующем виде

$$D = \frac{\Phi^2(\cos \theta, \sin \theta)}{9T_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega) d\omega \quad (3.13)$$

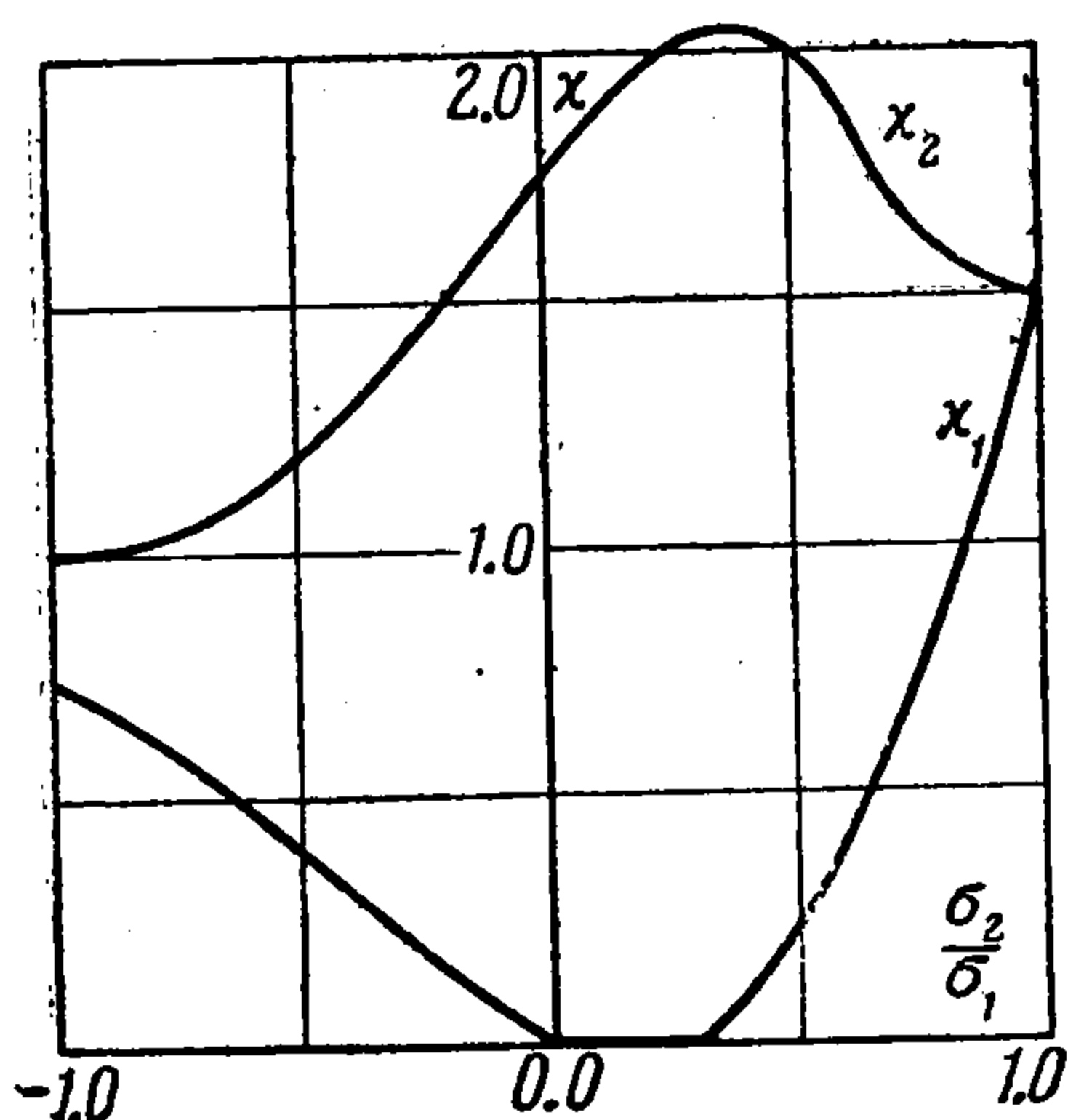
Входящий сюда интеграл, в силу второй формулы (3.2), выражается через производную корреляционной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega) d\omega = - \left. \frac{d^2 K_1(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} \quad (3.14)$$

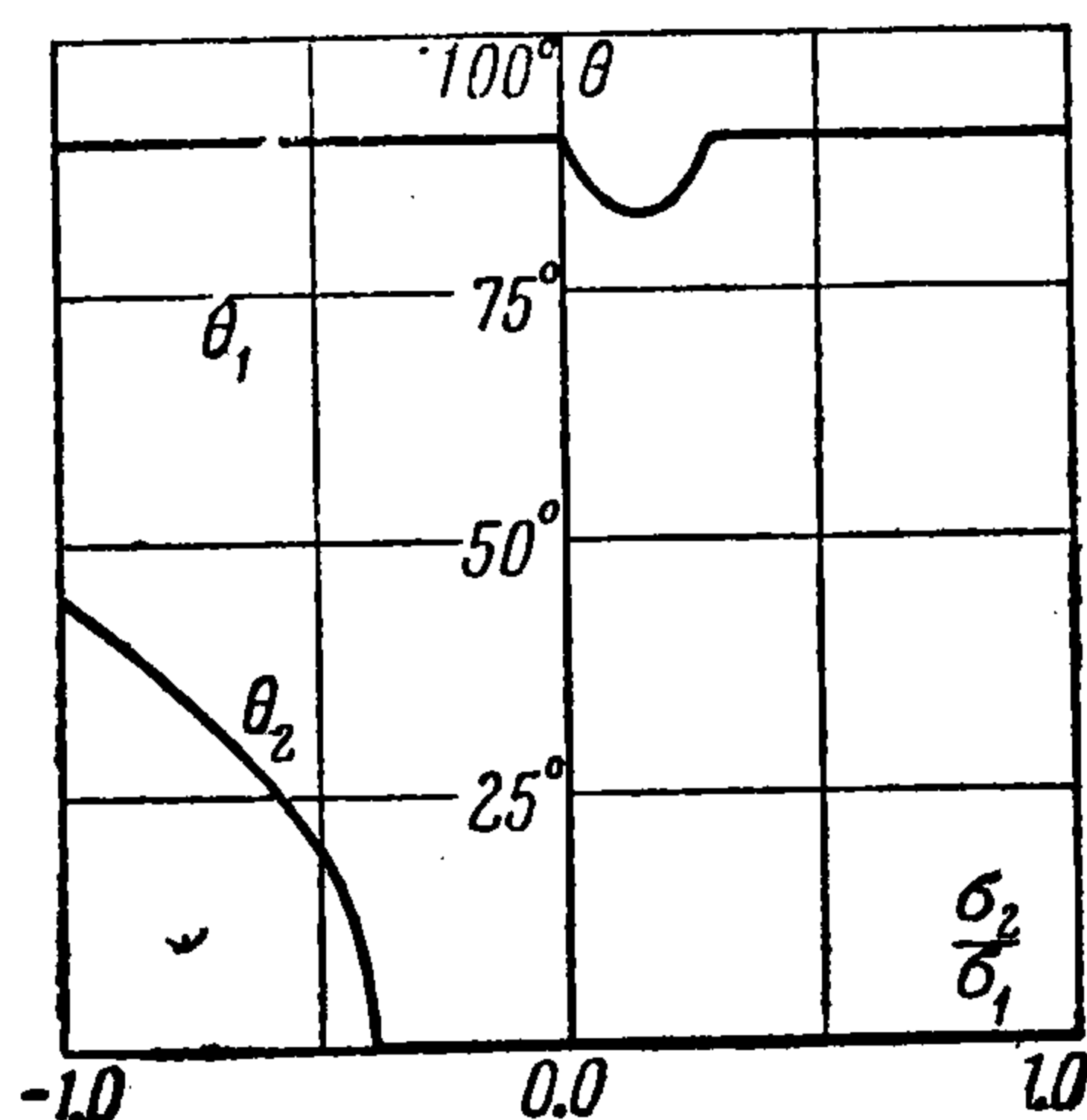
Производную  $K_1$  исключим с помощью формулы (см. [4])

$$n = \frac{1}{\pi} \left[ - \frac{1}{K_1(0)} \left. \frac{d^2 K_1(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

дающей математическое ожидание среднего числа пересечений нулевого уровня нор-



Фиг. 3



Фиг. 4

мальной случайной функцией  $H_1(\xi)$ . Обозначая через  $h$  среднеквадратичное значение функции  $H_1(\xi)$ , найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_1(\omega) d\omega = (\pi n h)^2 \quad (3.16)$$

Внося (3.16) в (3.13), получим

$$D = \frac{\Phi^2(\cos \theta, \sin \theta)}{9T_0^2} (\pi n h)^2 \quad (3.17)$$

Отсюда определим среднеквадратичное значение  $T$

$$D^{1/2} = \pi n h T_0 \chi \quad (3.17)$$

где

$$\chi = \frac{|\Phi(\cos \theta, \sin \theta)|}{3T_0^2} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \left| 2\sigma_1^2 \cos^2 \theta + 2\sigma_2^2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta}{m} [(2\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \theta + (2\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \theta] \right| \quad (3.19)$$

Выражение коэффициента концентрации найдем по формуле (2.10)

$$\alpha = 1 + 2\pi n h \chi \quad (3.20)$$

Так как коэффициент концентрации зависит от  $\theta$ , появляется возможность уменьшить его за счет выбора  $\theta$ , а следовательно, и направления обработки. Как следует из формулы (3.19), каждому значению отношения  $\sigma_2 / \sigma_1$  соответствует определенное значение  $\theta = \theta_1$  в промежутке  $[0, 90^\circ]$ , при котором достигается минимум  $\chi = \chi_1$ , а поэтому и коэффициента концентрации. Зависимости  $\chi = \chi_1(\sigma_2 / \sigma_1)$  и  $\theta = \theta_1(\sigma_2 / \sigma_1)$  в предположении  $|\sigma_2| \leq |\sigma_1|$ ,  $m = 4$  показаны на фиг. 3 и 4. Там же для сравнения приводятся зависимости  $\chi = \chi_2(\sigma_2 / \sigma_1)$  и  $\theta = \theta_2(\sigma_2 / \sigma_1)$ , соответствующие максимальному значению коэффициента концентрации. Из рассмотрения фиг. 4 следует приближенный вывод: при заданных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  наименьшее значение  $\chi$ , а следовательно, и коэффициента концентрации достигается, когда образующая цилиндрической поверхности  $z = H(x, y)$  совпадает с направлением наибольшего по величине напряже-

ния ( $\sigma_1$  или  $\sigma_2$ ). Это означает, что минимум  $\alpha$  достигается, когда направление механической обработки совпадает с линией действия наибольшего по величине главного напряжения в невозмущенном поле напряжений.

Приведем выражения коэффициента концентрации напряжений для некоторых частных видов невозмущенного напряженного состояния и ориентации направления обработки.

а. Всестороннее равномерное растяжение ( $\sigma_1 = \sigma_2$ )

$$\alpha = 1 + 2\pi nh \left(1 + \frac{2}{m}\right) \quad (3.21)$$

б. Одноосное растяжение ( $\sigma_2 = 0$ ); направление механической обработки перпендикулярно линии действия напряжения  $\sigma_1$  ( $\theta = 0$ )

$$\alpha = 1 + 2\pi nh \left(2 - \frac{1}{m}\right) \quad (3.22)$$

в. Состояние чистого сдвига. Направление механической обработки наклонено под углом  $45^\circ$  к линии действия одного из главных напряжений

$$\alpha = 1 + 2\pi nh \quad (3.23)$$

4. Пусть однородное случайное поле  $H(x, y)$  будет статистически изотропным. Известно [3], что корреляционная функция такого поля зависит только от расстояния между точками наблюдения  $r$ , а спектральная плотность — только от величины  $\omega$

$$K(x, y) = (r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad S(\mu, \nu) = S(\omega), \quad \omega = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad (4.1)$$

При таком виде спектральной плотности выражение  $D$  по (2.9) может быть существенно упрощено.

Внесем  $S$  по (4.1) в (2.9). При вычислении получающегося интеграла целесообразно перейти к полярным координатам, полагая

$$\mu = \omega \cos \varphi, \quad \nu = \omega \sin \varphi \quad (4.2)$$

и воспользоваться свойством (3.12) функции  $\Phi(\mu, \nu)$ . Тогда выражение  $D$  примет вид

$$D = \frac{1}{9T_0^2} \int_0^\infty \omega^3 S(\omega) d\omega \int_0^{2\pi} \Phi^2(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \quad (4.3)$$

Второй интеграл здесь легко вычисляется, если воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} \Phi^2(\cos \varphi, \sin \varphi) = & b_0 \sin^8 \varphi + b_1 \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \\ & + b_2 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi + b_3 \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + b_4 \cos^8 \varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

и применить интеграл

$$\int_0^{1/2\pi} \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\gamma-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \quad (4.5)$$

Здесь  $B$  — бета-функция Эйлера.

Окончательное выражение второго интеграла в (4.3) таково

$$\int_0^{2\pi} \Phi^2(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{8^2} (35b_0 + 5b_1 + 3b_2 + 5b_3 + 35b_4) \quad (4.6)$$

Коэффициенты  $b_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} b_0 = A^2, \quad b_1 = 4 \left(1 + \frac{1}{m}\right) AC, \quad b_2 = 4 \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 c^2 + 2AB \\ b_3 = 4 \left(1 + \frac{1}{m}\right) BC, \quad b_4 = B^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$A = \sigma_2 \left( 2\sigma_2 - \sigma_1 + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{m} \right), \quad B = \sigma_1 \left( 2\sigma_1 - \sigma_2 + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{m} \right) \\ C = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (4.8)$$

Первый интеграл в (4.3) допускает простое выражение через непосредственно измеряемые статистические характеристики профиля шероховатой поверхности. Чтобы это показать, запишем корреляционную функцию поля

$$K(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu x + \nu y)} S(\mu, \nu) d\mu d\nu \quad (4.9)$$

Внося сюда спектральную плотность поля по (4.1) и вводя полярные координаты (4.2) и  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$ , найдем

$$K(x, y) = K(r) = \int_0^{\infty} S(\omega) \omega d\omega \int_0^{2\pi} e^{i\omega r \cos(\varphi - \psi)} d\varphi \quad (4.10)$$

Вторая производная корреляционной функции  $K(r)$  при  $r = 0$  входит в (4.3)

$$K''(0) = -\pi \int_0^{\infty} \omega^3 S(\omega) d\omega \quad (4.11)$$

Заметив, что функция  $K(r)$  совпадает с корреляционной функцией ординат профиля шероховатой поверхности, исключим ее из (4.11) при помощи формулы, аналогичной (3.45). В результате получим

$$\int_0^{\infty} \omega^3 S(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} (\pi n h)^2 \quad (4.12)$$

Здесь  $h$  — среднеквадратичная величина поля  $H(x, y)$ , а  $n$  — математическое ожидание среднего числа пересечений нулевого уровня профилем шероховатой поверхности. В соответствии со сказанным выше формула (4.12), как и (3.15), справедлива для случайного поля  $H$  с нормальным законом распределения.

Внося интегралы (4.12) и (4.6) в (4.3), найдем

$$D = (\pi n h T_0 \chi)^2, \quad \chi = \frac{1}{24 T_0^2} (35b_0 + 5b_1 + 3b_2 + 5b_3 + 35b_4)^{1/2} \quad (4.13)$$

что в соответствии с (2.10) дает следующее выражение коэффициента концентрации напряжений

$$\alpha = 1 + 2\pi n h \chi \quad (4.14)$$

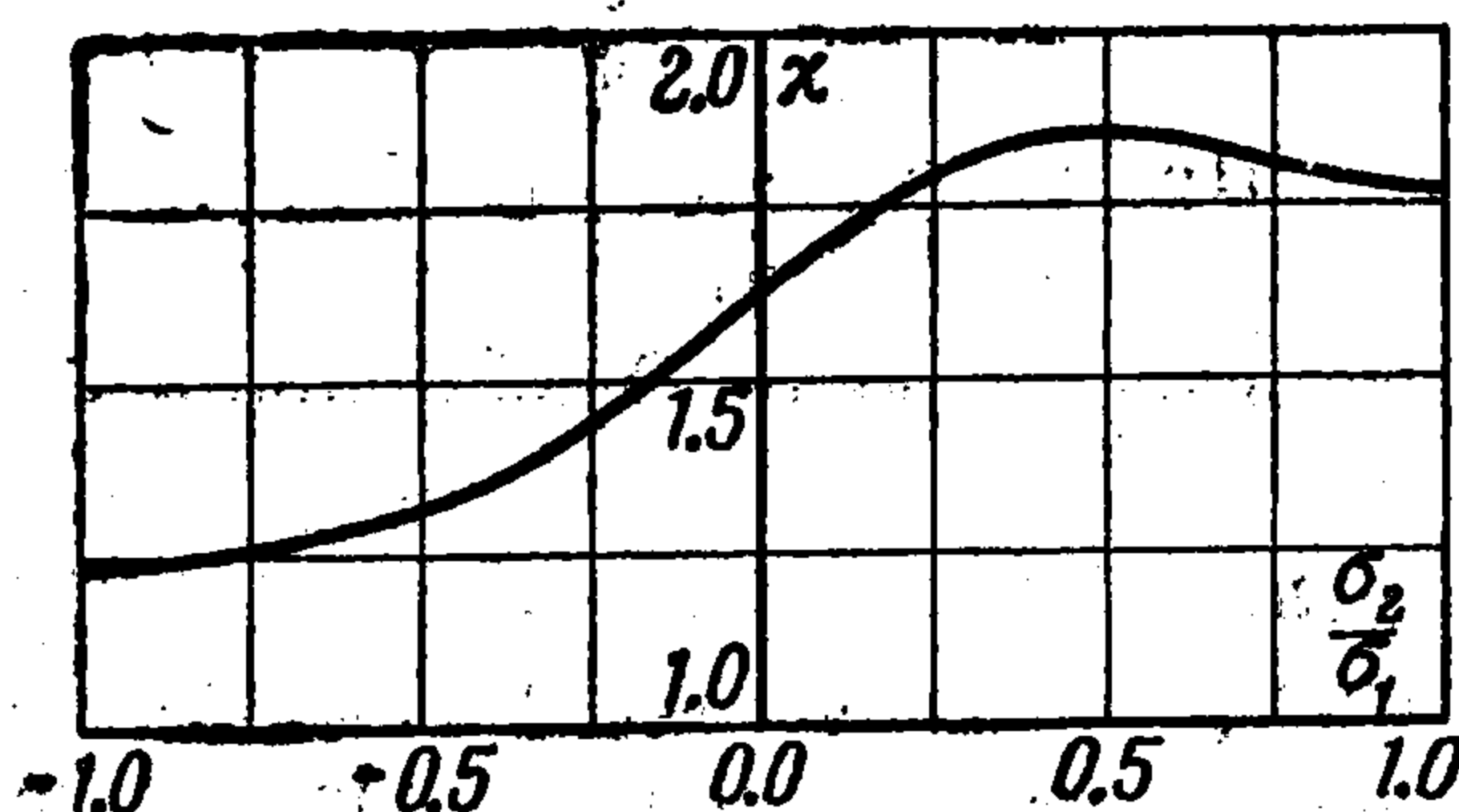
Результат вычисления  $\chi$  при  $m = 4$  и разных значениях отношения  $\sigma_2 / \sigma_1$  приводится на фиг. 5.

В заключение отметим, что формулы (3.21), (3.22), (3.23), (3.20), (4.14) удобны при практических расчетах, так как содержат легко измеряемые статистические характеристики профиля шероховатой поверхности.

Поступила 11 III 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
2. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
3. С в е ш н и к о в А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
4. Х у с у А. П. О некоторых встречающихся в технике функционалах, заданных на процессах, Вест. Ленингр. ун-та, 1956, № 1.



Фиг. 5