

О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ СКЛЕЕННЫХ ТЕЛ

Р. Л. Салганик (Москва)

Исследование разрушения склеенных тел вследствие распространения трещин по местам склейки имеет важное практическое значение. К такому виду разрушения относится, например, продвижение возникающей в результате гидравлического разрыва трещины, распространяющейся по границе раздела между двумя пластами горных пород. Однако до последнего времени хрупкое разрушение склеенных тел теоретически не исследовалось.

В теории трещин хрупкого разрушения рассматривались, в основном, задачи о трещинах в однородных телах. Изложение основ теории трещин в однородных телах имеется в обзоре Г. И. Баренблатта [1]. Большинство экспериментальных исследований тоже относится к трещинам в однородных телах. Обзор этих исследований можно найти в недавних статьях Хиорнса и Венейблса [2,3].

Распространение трещин по месту склейки качественно отличается от распространения трещин в однородных телах. Остановимся на этом отличии, предполагая здесь и в дальнейшем, что имеет место плоская деформация.

В однородном материале развитие трещины происходит следующим образом. При возрастании нагрузки, стремящейся увеличить трещину, конец трещины сначала остается неподвижным. При этом распределение сил сцепления, действующих между противоположными берегами трещины в малой концевой области, и форма трещины в этой области изменяются. Это изменение прекращается в момент начала квазистатического (подвижно-равновесного) продвижения конца трещины. Если такое продвижение возможно, то оно происходит в направлении, обеспечивающем локальную симметрию, т. е. действие в концевой области только нормальных напряжений, симметрично распределенных относительно направления распространения. Форма трещины и распределение сил сцепления в концевой области квазистатически продвигающегося конца трещины уже не зависят от внешних параметров, а определяются только свойствами материала. Концевая область становится автономной.

Рассмотрим теперь трещину, находящуюся на поверхности склейки между двумя упругими однородными материалами. Если прочность склейки достаточно велика, то трещина по этой поверхности не пойдет, а будет распространяться в глубь одного или сразу двух склеенных тел в соответствии с тем, как распространяются трещины в однородных материалах.

Основной интерес представляет рассматриваемый в дальнейшем другой случай, когда прочность склейки относительно невелика. Тогда трещина будет распространяться по поверхности склейки и ее развитие будет совсем иным. В процессе квазистатического продвижения концевая область такой трещины уже не обладает локальной симметрией, потому что конец трещины продвигается по заранее предопределенному, не зависящему от процесса нагружения пути — границе склейки. Из-за различия свойств склеенных материалов противоположные берега трещины могут выпучиваться и налегать один на другой, образуя площадки контакта. Реакции, действующие на этих площадках, будут добавляться к другим действующим силам и влиять на продвижение трещины. Для трещин, распространяющихся по поверхности склейки между различными материалами, характерно также и то обстоятельство, что при действии чистого растяжения поперек трещины или чистого сдвига вдоль трещины на продолжении трещины в сплошном теле в том и другом случае будут возникать как касательные, так и нормальные напряжения.

Указанные отличия делают невозможным простое формальное перенесение методов теории трещин в однородных материалах на случай трещин, продвигающихся по поверхности склейки.

В предлагаемой работе при помощи надлежащего распространения методов теории трещин в однородных материалах выводится условие равновесия трещины, которая может продвигаться только по поверхности склейки и указывается способ определения положения концов трещины.

§ 1. Исследование поля напряжений и смещений в окрестности конца прямолинейного разреза. Предположим, что граница склейки прямолинейна, совпадает с осью x и на ней от $x = 0$ до $x = l$ расположен разрез, нагруженный распределенными по его берегам напряжениями; другие нагрузки отсутствуют. Склеенные тела будем считать бесконечными, их упругие постоянные будем отмечать индексами 1 и 2 соответственно для $y > 0$ и $y < 0$. При $y > 0$ согласно формулам Н. И. Мусхелишвили [4] имеем для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и смещений u , v

$$\begin{aligned} \sigma_x \mp \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), & \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) \mp \Omega(\bar{z}) \mp (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mp i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \kappa_1 \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где μ — модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона, $z = x \mp iy$.

Рассматриваемая задача является частным случаем одной из задач, исследованных Г. П. Черепановым в [5], и независимо, но позднее, Эрдоганом [6]. Решение этой задачи при $y > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_1(\kappa_2 \mp 1) F_1 \mp (\mu_2 \mp \mu_1 \kappa_2) F_2}{\mu_1(\kappa_2 \mp 1) \mp \mu_2(\kappa_1 \mp 1)}, & \Omega &= \frac{-\mu_1(\kappa_2 \mp 1) F_1 \mp (\mu_1 \mp \mu_2 \kappa_1) F_2}{\mu_1(\kappa_2 \mp 1) \mp \mu_2(\kappa_1 \mp 1)} \\ F_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{p^+(t) - p^-(t)}{t - z} dt, & F_2 &= \frac{1}{2\pi i Z(z)} \left[\int_0^l \frac{f(t) Z(t \mp i0)}{t - z} dt + iC \right] \\ Z(z) &= z^{1/2 - i\beta} (z - l)^{1/2 + i\beta}, & \lim_{z \rightarrow \infty} [Z(z)/z] &= 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu_1 \mp \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 \mp \mu_1 \kappa_2}, & \beta &= \frac{1}{2\pi} \ln m, & C &= \frac{\mu_2 \mu_1 (\kappa_2 \kappa_1 - 1)}{(\mu_1 \mp \mu_2 \kappa_1) (\mu_2 \mp \mu_1 \kappa_2)} (X \mp iY) \\ f &= \frac{\mu_2 (\kappa_1 \mp 1) p^+ \mp \mu_1 (\kappa_2 \mp 1) p^-}{\mu_2 \mp \mu_1 \kappa_2}, & p^\pm &= (\sigma_y - i\tau_{xy})|_{z=x \pm i0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величины X , Y представляют собой компоненты равнодействующей сил, приложенных к поверхностям разреза. Решение при $y < 0$ получается из приведенного решения при помощи очевидных переобозначений. Из выписанного решения получаем, что вблизи конца разреза $x = 0$ с точностью до малых более высокого порядка

$$[u \mp iv] = M \sqrt{x} \left(\frac{x}{l - x} \right)^{i\beta} \{ (B - 2\beta A) - i(A \mp 2\beta B) \} \quad (1.4)$$

где слева стоит разность векторов смещения верхнего и нижнего берегов разреза в соответствующих точках, M — некоторая положительная постоянная, остающаяся конечной при $\beta \rightarrow 0$, величины A и B выражаются через приложенные нагрузки:

$$A \mp iB = \frac{1}{2\pi \sqrt{l}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^l \left(\frac{l - t}{t} \right)^{i\beta + 1/2} f(t) dt \mp C \right\} \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что разности продольных и поперечных смещений берегов разреза при $A^2 \mp B^2 \neq 0$ представляют собой колеблющиеся функции. При $x \rightarrow (l/2)$ экспонента в (1.4) стремится к единице. При уменьшении x от $(l/2)$ до нуля она первый раз становится чисто мнимой при

$$x = x_* = l e^{-\pi/2\beta} (1 \mp e^{-\pi/2\beta})^{-1} \quad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\beta > 0$. Этого всегда можно достигнуть соответствующей нумерацией разделяемых границей полупространств. Легко показать, что, с другой стороны, $\beta \leq (\ln \kappa_1) / 2\pi$. Так как всегда $\nu \geq 0$, то при всех возможных значениях β величина $x_* < 10^{-4}l$. Это неравенство позволяет пользоваться формулой (1.5) в интервале изменения x , включающем x_* .

В интервале $0 < x < x_*$ вектор $[u \mp iv]$ при $A^2 \mp B^2 \neq 0$ совершает бесконечное число оборотов. Такой колебательный характер решения вблизи места смены граничного условия на границе раздела между различными телами был уже давно замечен В. М. Абрамовым [7].

Из решения (1.1) — (1.3) также следует, что в сплошном теле на продолжении разреза вблизи его конца $x = 0$

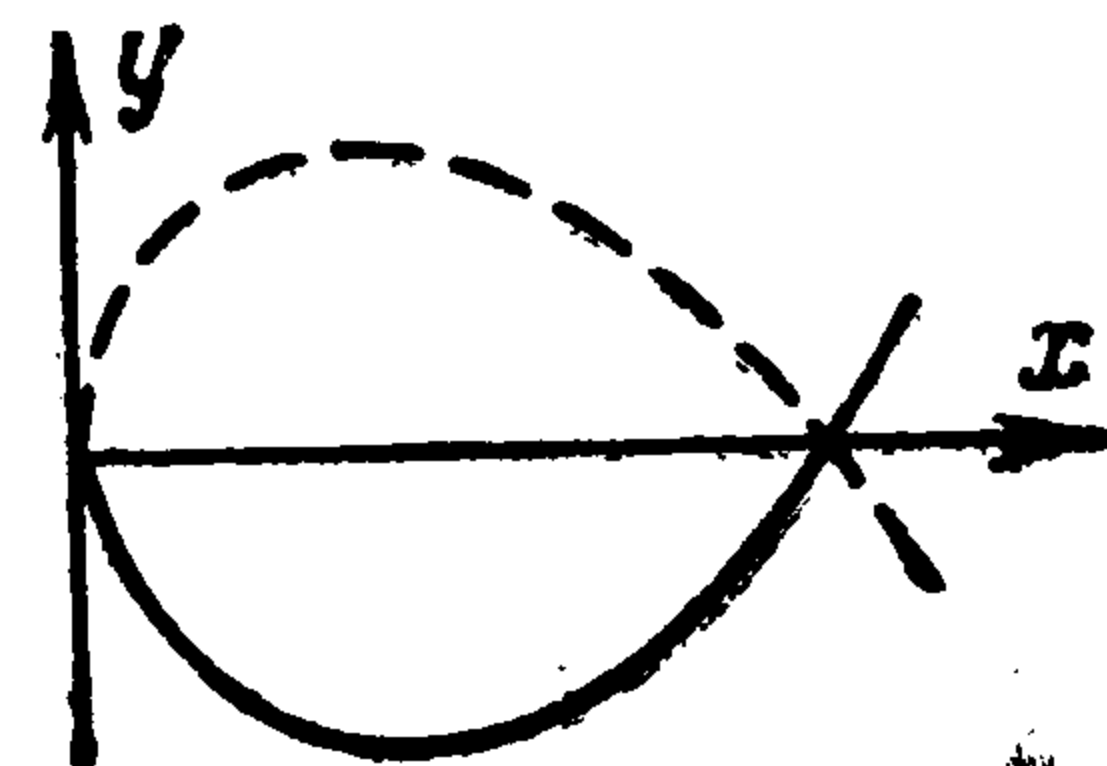
$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{s}} \left\{ \left(\frac{s}{l+s} \right)^{i\beta} (A + iB) + o(1) \right\} \quad (1.7)$$

Здесь $z = x = -s$, $s \rightarrow +0$. Из (1.7) следует, что при $A^2 + B^2 \neq 0$ напряжения на продолжении разреза бесконечно велики и бесконечно часто меняют знак.

§ 2. Вывод условия равновесия конца трещины. При рассмотрении упругого поля в малой окрестности конца криволинейной трещины границу раздела можно считать прямолинейной, а отделяемые ею тела — бесконечными. Отсюда следует, что распределение смещений берегов трещины и напряжений на продолжении трещины в малой концевой области будет таким же, как в малой окрестности конца прямолинейного полубесконечного разреза. Переходя в формулах (1.4), (1.7) к асимптотическим выражениям при $l \rightarrow \infty$, получаем, что в этой окрестности

$$[u + iv] = M \sqrt{x} \left(\frac{x}{L} \right)^{i\beta} \{ (B - 2\beta A) - i(A + 2\beta B) \}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{s}{L} \right)^{i\beta} (A + iB) \quad (2.1)$$

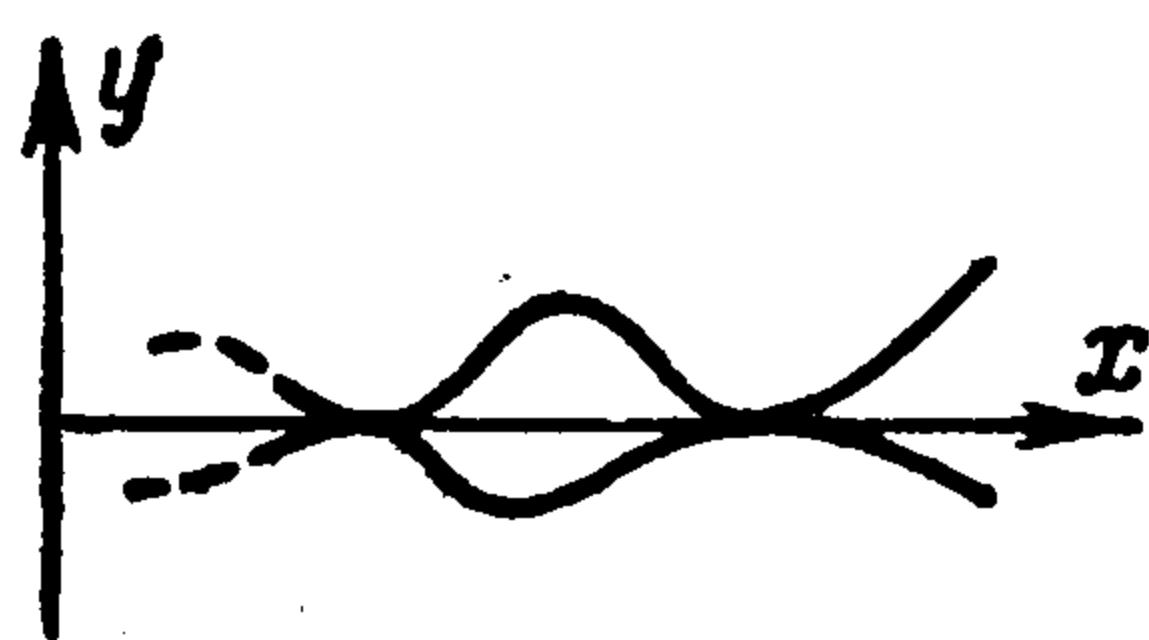


Фиг. 1

Здесь ось x направлена по касательной к линии трещины, ось y — по нормали, длина L связана с геометрическими характеристиками задачи, величины A и B зависят от действующих нагрузок (в общем случае — не по формулам (1.5)).

В § 1 было отмечено, что при приближении к концу трещины вектор, равный разности векторов смещения верхнего и нижнего берегов, совершает бесконечное число оборотов. Это означает, что в бесконечном числе точек верхний берег оказывается под нижним. Такой физически нереальный случай взаимного проникания разделяемых трещиной областей ранее был отмечен и для трещин в однородном материале [8]. При исследовании структуры трещины вблизи ее конца оказалось, что эта структура имеет вид, изображенный на фиг. 1, где верхний берег расположен под нижним. Напряжения на продолжении такой «трещины» оказываются сжимающими и препятствуют ее продвижению в глубь тела. Наоборот, они заставляют ее смыкаться до тех пор, пока не образуется площадка контакта от $x = 0$ до $x = x_1$. Расстояние x_1 определяется из условия плавности смыкания противоположных берегов трещины или конечности напряжений. Это условие, впервые выдвинутое С. А. Христиановичем [9] и доказанное затем при помощи вариационных принципов Г. И. Баренблаттом [10], является основным в теории трещин.

В разбираемом случае при $A^2 + B^2 \neq 0$ вблизи конца трещины бесконечно много мест, в которых должно было бы происходить взаимное проникание сред. Поэтому, во-



Фиг. 2

обще говоря, площадок контакта может образоваться несколько, так что трещина вблизи конца будет иметь вид, изображенный на фиг. 2. На этих площадках будут действовать силы реакции. Кроме того, в концевой области трещины будут действовать силы сцепления. В результате величины A и B будут складываться из величин A_0 , B_0 , вычисленных без учета сил реакции и сил сцепления, и величин A' , B' , учитывающих действие этих сил

$$A = A_0 + A', \quad B = B_0 + B' \quad (2.2)$$

В теории трещин в однородных материалах условие подвижного равновесия данной точки контура трещины выводится путем нахождения виртуальной работы и приравнивания ее нулю. Это было сделано в работах [10, 11].

Аналогично поступим и в рассматриваемом случае.

Разложим упругое поле на два: поле, которое возникает от приложенных нагрузок в отсутствие трещины, и поле, создаваемое трещиной, нагруженной напряже-

ниями, противоположными тем, которые имело первое поле в месте расположения трещины. При варьировании положения конца трещины первое поле изменяться не будет, и, следовательно, на выражении для работы не скажется. Это выражение будет целиком определяться вторым полем. Поэтому при вычислении виртуальной работы можно считать, что все нагрузки приложены к поверхности трещины и других нагрузок нет. Возможное перемещение конца трещины вдоль границы склейки δh будем считать настолько малым, что при исследовании области, затронутой вариацией, эту границу можно считать прямолинейной, а разделяемые ею среды — бесконечными. Таким образом, задача сводится к вычислению виртуальной работы, которая производится при возможном перемещении полубесконечного разреза вдоль прямолинейной границы между двумя полупространствами.

Каждая точка разреза в результате возможного перемещения сдвигается на δh . При этом, например, на верхний берег в точке x действует сила $p^+(x)\delta h$. Смещение в этой точке изменяется на $[\partial(u^+ + iv^+)/\partial x] dx$. В результате на верхнем берегу производится суммарная работа δw^+

$$\delta w^+ = -\delta h \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} \tau_{xy}^+ + \frac{\partial v^+}{\partial x} \sigma_y^+ \right) dx = -\delta h \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \overline{p^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial x} + i \frac{\partial v^+}{\partial x} \right) dx \quad (2.3)$$

Знак минус перед интегралом поставлен потому, что на верхнем берегу положительные направления напряжений τ_{xy}^+ , σ_y^+ противоположны положительным направлениям осей x и y соответственно. В это выражение нужно подставить асимптотическое решение, получающееся из (1.1) — (1.3) переходом к пределу при $l \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\delta w^+ = -\operatorname{Im} \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi i \mu_1 [\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)]} \left\{ \mu_2(\kappa_1 + 1) \int_0^{\infty} \frac{p^+(t) \overline{p^+(x)}}{t-x} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2-i\beta} dt dx + \right. \\ \left. + \mu_1(\kappa_2 + 1) \left[\int_0^{\infty} \frac{p^-(t) \overline{p^+(x)}}{t-x} \left(\frac{t}{x} \right)^{1/2-i\beta} dt dx - \int_0^{\infty} \frac{p^-(t) \overline{p^+(x)}}{t-x} dt dx \right] \right\} \delta h \quad (2.4)$$

Обозначая первый интеграл в (2.4) через J_1 , преобразуем его следующим образом

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{p^+(t) \overline{p^+(x)}}{\sqrt{t} \sqrt{x}} \frac{t-x+x}{t-x} \left(\frac{t}{x} \right)^{-i\beta} dt dx = \int_0^{\infty} \frac{p^+(t) \overline{p^+(x)}}{\sqrt{t} \sqrt{x}} \left(\frac{t}{x} \right)^{-i\beta} dt dx = \bar{J}_1 \quad (2.5)$$

Аналогично для второго интеграла найдем

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{p^-(t) \overline{p^+(x)}}{\sqrt{t} \sqrt{x}} \left(\frac{t}{x} \right)^{-i\beta} dt dx - \int_0^{\infty} \frac{p^-(x) \overline{p^+(t)}}{t-x} \left(\frac{t}{x} \right)^{i\beta} dt dx \quad (2.6)$$

Выражение для работы на нижнем берегу δw^- получается из (2.4) заменой κ_1 на κ_2 , μ_1 на μ_2 , p^+ на p^- , p^- на p^+ . Складывая выражения для δw^+ и δw^- , найдем с учетом (2.5) и (2.6), что полная работа δw равна

$$\delta w = \frac{(\mu_2 + \mu_1 \kappa_2)^2}{8\pi \mu_1 \mu_2 [\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)]} \left| \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \left(\frac{t}{L_0} \right)^{-i\beta} dt \right| \delta h \quad (2.7)$$

где L_0 — произвольная величина размерности длины. Работа δw от этой величины не зависит. Это сразу видно, если раскрыть выражение для модуля.

Полагая в (1.5) $l = L_0$ и переходя к асимптотическому выражению при $L_0 \rightarrow \infty$, после подстановки этого выражения в (2.7) получим

$$\delta w = \frac{\pi (\mu_1 + \mu_2 \kappa_1) (\mu_2 + \mu_1 \kappa_2)}{2\mu_1 \mu_2 [\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)]} (A^2 + B^2) \delta h \quad (2.8)$$

Условие равновесия данного конца трещины заключается в равенстве δw нулю. Полагая в (2.8) $\delta w = 0$, с учетом обозначений (2.2) получим

$$A \equiv A_0 + A' = 0, \quad B \equiv B_0 + B' = 0 \quad (2.9)$$

Из этих равенств и формул (2.1) следует, что если рассматриваемый конец трещины находится в равновесии, то в малой концевой области противоположные берега трещины, как и в случае трещины в однородном материале, смыкаются монотонно и плавно. Напряжения на продолжении трещины при этом получаются конечными. Таким образом, с учетом возможного появления площадок контакта, строение трещины вблизи ее подвижно-равновесного конца имеет вид, изображенный на фиг. 3.

§ 3. Условие для определения положения концов трещины. В основу современной теории трещин положены две гипотезы [12]: гипотеза о малости концевой области трещины по сравнению со всеми макроскопическими размерами задачи и гипотеза об автономности этой концевой области. Автономность понимается в том смысле, как это было объяснено во введении.

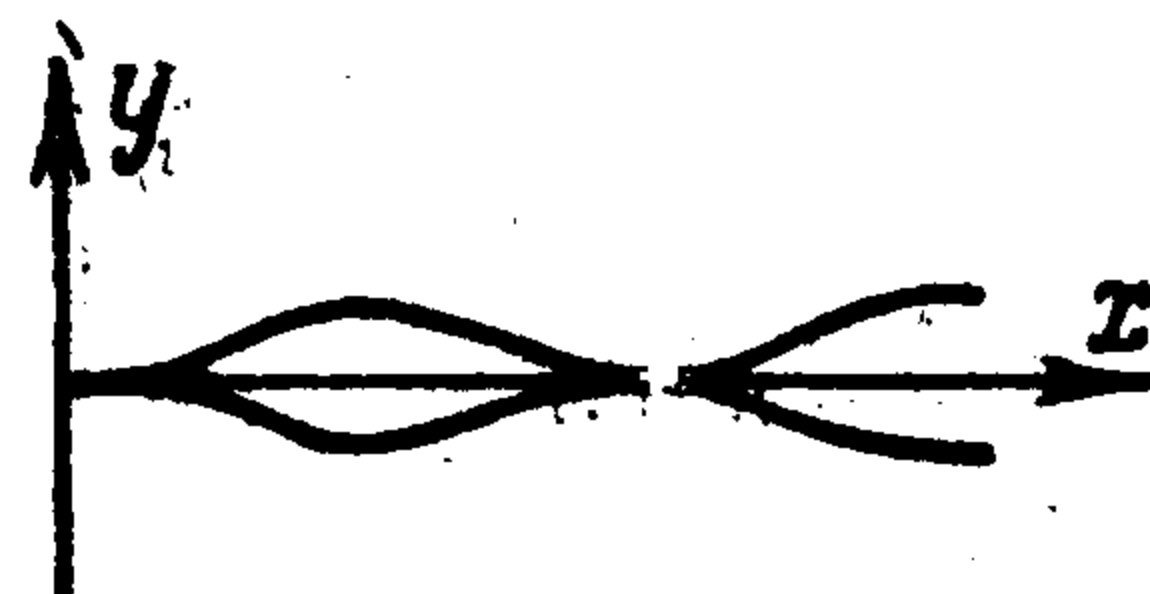
В рассматриваемом случае концевая область — это область, где распределены силы взаимодействия (силы сцепления и силы реакции) противоположных берегов трещины. Если внешние нагрузки распределены так, что при вычислении смещений по (1.1)–(1.3) места, в которых происходило бы взаимное проникание сред, оказываются сосредоточенными только вблизи концов трещины, а в основной части трещины таких мест нет, то и площадки контакта могут находиться только вблизи концов трещины. Размер областей, в которых эти площадки распределены, стремится к нулю при исчезновении различия в свойствах сред, между которыми расположена трещина. Для прямой трещины длины l в бесконечном теле размер каждой из этих областей, как было показано, никогда не превосходит $10^{-4} l$. Таким образом, учитывая, что область действия сил сцепления, из-за специфической природы этих сил, всегда мала, можно считать, что мала и концевая область, т. е. принять первую гипотезу.

Первая гипотеза. Концевая область, в которой распределены силы взаимодействия противоположных берегов трещины, мала по сравнению с характерными размерами.

Этой гипотезой можно пользоваться, по крайней мере, до тех пор, пока размер трещины по порядку величины меньше или сравним с прочими, не зависящими от него характерными размерами.

Вторую гипотезу — об автономности концевой области — в том виде, как она была сформулирована для трещин в однородных материалах, в данном случае принять нельзя, потому что при движении трещины по поверхности склейки в концевых областях отсутствует локальная симметрия.

Положение данного конца трещины определяется упругим полем, создаваемым силами взаимодействия, распределенными в концевой области. Это поле, в свою очередь, однозначно определяется величинами A' , B' . Предположим, что приложенные нагрузки изменяются в зависимости от некоторого параметра λ таким образом, что данный конец трещины квазистатически продвигается вглубь тела. Каждому значению параметра λ соответствуют единственное положение этого конца и единственные значения величин A' и B' . Отсюда следует, что в процессе такого нагружения



Фиг. 3

$$F(A', B') = 0 \quad (3.1)$$

Вид функции, определяемой (3.1), может быть разным в зависимости от того, как именно изменяются приложенные нагрузки. Эта функция может и вообще не существовать, если нагрузки изменяются в зависимости не от одного, а, например, от двух параметров. Предположение, что для подвижно-равновесного (квазистатически продвигающегося) конца трещины функция (3.1) существует и ее вид не зависит от приложенных нагрузок, является естественным обобщением понятия автономности на рассматриваемый случай. Таким образом, вторую гипотезу можно принять в следующем обобщенном виде.

Вторая гипотеза (обобщенная гипотеза автономности). Если конец трещины, которая может продвигаться только по поверхности склейки между двумя упругими материалами, находится в состоянии подвижного равновесия, то

$$F(A', B') = 0 \quad (3.2)$$

где функция, определяемая (3.2), существует и не зависит от внешних нагрузок. Эта функция определяется свойствами склеенных материалов и клеящего вещества и их термодинамическим состоянием.

Покажем, что в том случае, когда материалы, между которыми распространяется трещина, различны, вид этой функции определяется единственным образом. Из (2.1) имеем

$$A' + iB' = - \lim_{s \rightarrow 0} (\sigma_y' - i\tau_{xy}') V \bar{s} \left(\frac{s}{L} \right)^{-i\beta} \quad (3.3)$$

где σ_y' , τ_{xy}' — напряжения на продолжении трещины, вызванные силами взаимодействия. В формуле (3.3) все величины, кроме L , зависят от свойств упругого поля вблизи конца трещины. Геометрический параметр L , вообще говоря, зависит от приложенных нагрузок. Если принять обобщенную гипотезу автономности, то левая часть (3.2) не должна явно зависеть от L . Легко видеть при помощи (3.3), что единственными не зависящими явно от L комбинациями из A' и B' являются $A'^2 + B'^2$ и любые функции от этой величины. В результате, условие (3.2) обязательно должно иметь вид

$$A'^2 + B'^2 = D^2 \quad (3.4)$$

где D — постоянная величина, зависящая от свойств клея, склеенных материалов, термодинамического состояния того и других и не зависящая от приложенных нагрузок. Сопоставляя (3.4) и (2.8), видим, что предположение об автономности сводится к требованию постоянства работы, производимой одними только силами взаимодействия, при образовании единицы длины трещины.

Положение подвижно-равновесных концов трещины определяется из условия автономности (3.4) и условий равновесия (2.9). Задача о развитии трещины из начального разреза для разбираемого случая формулируется точно так же, как в теории трещин в однородных материалах.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за постановку задачи и руководство работой. Автор выражает свою искреннюю признательность Р. В. Гольдштейну за помощь в работе.

Поступила 11 VI 1963

Институт механики
Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Hoigns F. J., Venables J. Propagation of fractures in brittle solids. British Coal Util. Res. Assoc., 1961, vol. XXV, No 10.
3. Hoigns F. J., Venables J. Controlled fracture of brittle solids. British Coal Util. Res. Assoc., 1962, vol. XXVI, No 3.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
5. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
6. Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogenous elastic plane with cracks. J. Appl. Mech., 1962, Paper No 62-Wa-148.
7. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. XVII, № 4.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
9. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта, Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
10. Баренблатт Г. И. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
11. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О конечности напряжений на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
12. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.