О НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

П. В. Крауклис, Л. А. Молотков (Ленинград)

Использование точных решений задач динамической теории упругости для слоистых систем позволяет выяснить особенности распространения волн в низкочастотной области. Изучение поля смещений в однородном тонком упругом слое дало возможность обосновать и уточнить известные классические уравнения колебаний тонких пластин [1]. Также в результате этого подхода удалось записать уравнения колебаний многослойных пластин [2] и исследовать упруго-жидкие системы, состоящие из полупространств, разделенных тонким слоем [3,4]. Ниже метод применяется к изучению низкочастотных колебаний упругого слоя, находящегося в нежестком контакте с подстилающим упругим полупространством. Заметим, что под низкочастотными колебаниями понимаются колебания, частота f которых удовлетворяет условию $f \ll v_s / 2h$ (v_s — скорость поперечных волн, h — мощность слоя). Это условие эквивалентно требованию малости толщины слоя по сравнению с длиной волны колебаний.

1. В цилиндрической системе координат задан упругий слой (0) ($0 < z < h$), лежащий на упругом полупространстве (1) ($z > h$). Обозначим через a_0^{-1}, a_1^{-1}, b_0^{-1}, b_1^{-1} скорости продольных и поперечных волн соответственно в среде (0) и (1); μ_0, μ_1, ρ_0, ρ_1 — модули сдвига и плотности, а через $\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1$ — продольный и поперечный потенциалы полей смещений, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial z^2}=a_\nu^2\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial r}-\frac{\psi_\nu}{r}+\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z^2}=b_\nu^2\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial t^2}\end{gathered}\qquad (\nu=0,1) \tag{1.1}$$

Будем считать, что на границе $z = h$ имеет место нежесткий контакт: нормальные составляющие смещения w и напряжения t_{zz} непрерывны, тангенциальное напряжение $t_{rz} = 0$. Эти условия приводят к соотношениям

$$2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r\partial z}+b_0^2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2}=0,\qquad 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z}+b_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=0$$

$$\begin{gathered}\mu_0\left[(b_0^2-2a_0^2)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right]=\\ =\mu_1\left[(b_1^2-2a_1^2)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right]\\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial z}+\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\frac{\psi_0}{r}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{\psi_1}{r}\end{gathered} \tag{1.2}$$

между потенциалами φ_0, ψ_0, φ_1, ψ_1 при $z = h$.

При $t < 0$ возмущение в среде отсутствует, а с момента $t = 0$ в точке $z = 0$ $r = 0$ начинает действовать источник в виде нормальной силы

$$t_{rz}^\circ=0,\qquad t_{zz}^\circ=\int_0^\infty\frac{k^2J_0(kr)\,dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}A(k,\eta)\exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right)d\eta \tag{1.3}$$

Функция $A(k, \eta)$ определяется зависимостью источника от времени. Во всех дальнейших исследованиях вид функции $A(k, \eta)$ оказывается несущественным.

Таким образом, определение потенциалов φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 смещений сводится к решению уравнений (1.1) при нулевых начальных и граничных условиях (1.2), (1.3).

2. Решение задачи ищем в виде

$$\varphi_0=\int_0^\infty\frac{J_0(kr)\,dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}[X_0^+e^{kz\alpha_0}+X_0^-e^{-kz\alpha_0}]\exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right)d\eta$$

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= \int_0^\infty \frac{J_1(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [Y_0^+ e^{kz\beta_0} + Y_0^- e^{-kz\beta_0}] \exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right) d\eta \\
\varphi_1 &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_1 \exp\left\{k\left[\frac{t\eta}{b_0} - (z-h)\,\alpha_1\right]\right\} d\eta \\
\psi_1 &= \int_0^\infty \frac{J_1(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_1 \exp\left\{k\left[\frac{t\eta}{b_0} - (z-h)\,\beta_1\right]\right\} d\eta
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

В формулах (2.1) приняты обозначения

$$
\beta_0 = \sqrt{1+\eta^2}, \qquad \beta_1 = \sqrt{1+\delta_1^2\eta^2}, \qquad \alpha_0 = \sqrt{1+\gamma_0^2\eta^2}
$$

$$
\alpha_1 = \sqrt{1+\gamma_1^2\eta^2}, \quad \delta_1 = b_1 b_0^{-1}, \qquad \gamma_0 = a_0 b_0^{-1}, \qquad \gamma_1 = a_1 b_0^{-1}
$$

Для однозначности радикалов β_0, β_1, α_0 и α_1 из точек ветвления $\pm i$, $\pm i\delta_1^{-1}$ $\pm i\gamma_0^{-1}$, $\pm i\gamma_1^{-1}$ в левую полуплоскость проведены разрезы и основные листы фиксированы условиями $\arg \alpha_i = \arg \beta_i = 0$ при $\eta > 0$. Заметим, что решения в виде (2.1) удовлетворяют уравнениям (1.1) и нулевым начальным данным. Подставив (2.1) в граничные условия (1.2) — (1.3) и решив систему алгебраических уравнений, получим выражения для функций $X_0^\pm$, $Y_0^\pm$, X_1 и Y_1.

При исследовании решений основное внимание обратим на составляющие q_ν и w_ν вектора смещения $u_\nu = q_\nu \mathbf{r}_1 + w_\nu \mathbf{k}_1$ в ν-й среде. Эти составляющие связаны соотношениями

$$
q_\nu = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial r} - \frac{\partial \psi_\nu}{\partial z}, \qquad w_\nu = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial r} + \frac{\psi_\nu}{r} \tag{2.2}
$$

с потенциалами φ_ν и ψ_ν. На основании решений (2.1) и выражений (2.2) для смещений q_0 w_0 на дневной поверхности и смещений q_1, w_1 в полупространстве имеем

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Q_0(k,\eta)\, A(k,\eta) \exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right) d\eta \\
w_0 &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W_0(k,\eta)\, A(k,\eta) \exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right) d\eta \\
q_1 &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [Q_1^{(1)} e^{k(h-z)\alpha_1} + Q_2^{(1)} e^{k(h-z)\beta_1}] \exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right) d\eta A(k,\eta) \\
w_1 &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)\,dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [W_1^{(1)} e^{k(h-z)\alpha_1} + W_2^{(1)} e^{k(h-z)\beta_1}] \exp\left(\frac{kt\eta}{b_0}\right) d\eta\, A(k,\eta)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

В равенствах (2.3) приняты обозначения:

$$
Q_0 = -\Delta_1\Delta_0^{-1}, \quad W_0 = \Delta_2\Delta_0^{-1}, \quad Q_1^{(1)} = -\Delta_3\Delta_0^{-1}, \quad Q_2^{(1)} = -\Delta_4\Delta_0^{-1} \tag{2.4}
$$

$$
W_1^{(1)} = -\Delta_5\Delta_0^{-1}, \quad W_2^{(1)} = -\Delta_6\Delta_0^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 = &-R_1\alpha_0\,[g_0^2 \operatorname{sh} kh\beta_0 \operatorname{ch} kh\alpha_0 - 4\alpha_0\beta_0 \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{ch} kh\beta_0] + \\
&+ \sigma_{01}\delta_1^2\alpha_1\,[8\alpha_0\beta_0 g_0^2 (\operatorname{ch} kh\alpha_0 \operatorname{ch} kh\beta_0 - 1) - (g_0^4 + 16\alpha_0^2\beta_0^2) \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{sh} kh\beta_0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = &-R_1\alpha_0\,(g_0^2 \operatorname{sh} kh\beta_0 \operatorname{ch} kh\alpha_0 - 2\alpha_0\beta_0 \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{ch} kh\beta_0) + \\
&+ 2\sigma_{01}\delta_1^2\alpha_0\beta_0\alpha_1\,(g_0^2+2)\, g_0\, (\operatorname{ch} kh\alpha_0 \operatorname{ch} kh\beta_0 - 1) - \sigma_{01}\delta_1^2\alpha_1\,(g_0^3 + 8\alpha_0^2\beta_0^2) \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{sh} kh\beta_0
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_2 = \alpha_0\eta^2\,\{\alpha_0 R_1 \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{sh} kh\beta_0 + \sigma_{01}\delta_1^2\alpha_1\,[g_0^2 \operatorname{sh} kh\beta_0 \operatorname{ch} kh\alpha_0 - 4\alpha_0\beta_0 \operatorname{sh} kh\alpha_0 \operatorname{ch} kh\beta_0]\}
$$

$$
\Delta_3 = \sigma_{01}\alpha_0 g_1\,(g_0^2 \operatorname{sh} kh\beta_0 - 4\alpha_0\beta_0 \operatorname{sh} kh\alpha_0)
$$

$$
g_1\Delta_4 = -2\alpha_1\beta_0\Delta_3, \qquad \Delta_5 = \Delta_0\Delta_3, \qquad \beta_1\Delta_6 = \Delta_4, \qquad R_1 = g_1^2 - 4\alpha_1\beta_1
$$

$$
g_1 = 2 + \delta_1^2\eta^2, \qquad \sigma_{01} = \mu_0\mu_1^{-1}, \qquad g_0 = 2 + \eta^2
$$

3. При исследовании поля смещений в полупространстве контур интегрирования $\operatorname{Re}\eta = \sigma$ деформируем, как и в работе [3], в стационарные контуры фазовых функций

$$f_1(\eta) = t\eta / b_0 - (z-h)\alpha_1, \qquad f_3(\eta) = t\eta / b_0 - (z-h)\beta_1 \tag{3.1}$$

В случае же смещений на поверхности $z = 0$ контур $\operatorname{Re}\eta = \sigma$ смещаем так, чтобы он охватывал разрезы, проведенные из точек ветвления $\pm i\gamma_1^{-1}$ и $\pm i\delta_1^{-1}$.

При указанной деформации могут быть пересечены особые точки подынтегральных функций на плоскости η. Для учета особенностей необходимо провести исследование подынтегральных функций. Рассмотрение явных выражений этих функций показывает, что подынтегральные функции имеют существенно особую точку $\eta = \infty$; точки ветвления $\pm i\gamma_1^{-1}$, $\pm i\delta_1^{-1}$; особенности, связанные с полюсами $A(k, \eta)$, и полюса, совпадающие с корнями уравнения

$$\Delta_0(kh, \eta) = 0 \tag{3.2}$$

При исследовании поля, представляемого формулами (2.4), решающую роль играет поведение корней в зависимости от параметра kh. Нетрудно видеть, что при $kh = 0$ уравнение (3.2) имеет ограниченное число корней, находящихся на конечном расстоянии от начала координат, и бесчисленное множество корней на бесконечности в левой полуплоскости переменной η. По аналогии с [3] назовем первую часть корней корнями первого класса, а остальную — второго. Если учесть, что в разложении в интеграл Фурье по волновым числам частота определяется выражением $\omega = k \operatorname{Im}\eta b_0^{-1}$, то окажется, что корни первого класса будут соответствовать колебаниям, спектр которых начинается с нулевой частоты. Корни второго же класса отвечают колебаниям, начинающимся с граничных частот

$$\omega_n = \lim_{k\to 0} (k \operatorname{Im}\eta b_0^{-1}) \approx n\pi (b_0 h)^{-1} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

Таким образом, для исследования низкочастотных колебаний достаточно выяснить расположение корней уравнения (3.2) при

$$kh \ll 1, \qquad kh\,|\eta| < 1 \tag{3.3}$$

Одновременно эти условия выполняются только для корней первого класса.

Несложный анализ уравнения (3.2) показывает, что в области (3.3) подынтегральные выражения имеют две пары полюсов

$$\eta_1 = \pm i\tau_1 + O(k^2h^2), \qquad (\tau_1^2\delta_1^2 - 2)^2 - 4\sqrt{1-\gamma_1^2\tau_1^2}\sqrt{1-\delta_1^2\tau^2} = 0 \tag{3.4}$$

$$\eta_2 = \pm i2\sqrt{1-\gamma_0^2}\left[1 - \frac{k^2h^2}{6}(1-2\gamma_0^2)^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm \frac{2\sigma_{01}\delta_1^2(1-\gamma_0^2)^2(1-2\gamma_0^2)^2\alpha_1}{R_1\delta_0^2} k^3h^3\right] + O(k^4h^4) \tag{3.5}$$

и полюсы, связанные с функцией источника $A(k, \eta)$. (В (3.5) значения α_1 и R_1 следует брать в точке $\eta = i2\sqrt{1-\gamma_0^2}$.) Так как в настоящей работе рассмотрение низкочастотного поля ведется для произвольного источника, то вычеты в полюсах функции $A(k, \eta)$ специально изучаться не будут. Таким образом, низкочастотное поле сводится к сумме интегралов по k от вычетов в полюсах (3.4) — (3.5) и от интегралов по стационарным контурам и разрезам. Выражения, содержащие интегралы по стационарным контурам, описывают максимальные смещения на поверхностях

$$a_1^2[(z-h)^2 + r^2] = t^2, \qquad b_1^2[(z-h)^2 - r^2] = t^2 \tag{3.6}$$

и поэтому могут рассматриваться как низкочастотные преломленные волны. След этих волн на дневной поверхности описывается интегралами по разрезам. Вычеты в точках η_1 определяют волну Релея, распространяющуюся в слое и полупространстве вдоль $z = h$. Свойства этой волны близки к свойствам одноименной волны в системе, состоящей из упругого полупространства и жидкого слоя [5-6].

Как известно, в свободной пластине при симметричном воздействии распространяется продольная волна со скоростью $v = 2\sqrt{1-\gamma_0^2}b_0^{-1}$ (ее обычно называют продольной пластинчатой волной). Как непосредственно следует из (3.5), волна, описываемая вычетами в η_2, имеет ту же скорость распространения. Однако для рассматриваемой модели среды меняется уже как характер дисперсии волны, так и ее затухание. При условии $b_0 < 2b_1 \sqrt{1-\gamma_0^2}$ эта волна испытывает дополнительное экспоненциальное затухание при распространении. Величина этого затухания зависит от $\operatorname{Re}\eta_2$, имеющей выражение

$$\operatorname{Re}\eta_2 = -\varkappa_1 (kh)^3 = -\left.\frac{4\sigma_{01}\delta_1^2 (1-\gamma_0^2)^{5/2} (1-2\gamma_0^2)^2 |\alpha_1| k^3h^3}{g_1^2 + 4|\alpha_1||\beta_1|}\right|_{\eta=i2\sqrt{1-\gamma_0^2}}$$

$$2\sqrt{1-\gamma_0^2} > \gamma_1^{-1} \tag{3.7}$$

$$\operatorname{Re}\eta_2 = -\varkappa_2 (kh)^3 = \left.\frac{-16\sigma_{01}\delta_1^2 (1-\gamma_0^2)^{5/2} (1-2\gamma_0^2)^2 |\alpha_1|^2 |\beta_1| k^3h^3}{g_1^4 + 16|\beta_1^2||\alpha_1^2|}\right|_{\eta=i2\sqrt{1-\gamma_0^2}}$$

$$\delta_1^2 < 2\sqrt{1-\gamma_0^2} < \gamma_1^{-1}$$

4. Будем в дальнейшем различать три случая соотношений между параметрами

$$a_0^{-1} > b_0^{-1} > a_1^{-1} > b_1^{-1} \tag{4.1}$$

$$a_1^{-1} > a_0^{-1} > b_1^{-1} > b_0^{-1} \tag{4.2}$$

$$a_1^{-1} > b_1^{-1} > a_0^{-1} > b_0^{-1} \tag{4.3}$$

В результате подстановки (3.5), (3.7) в (2.3) и замены переменных $\omega = 2k\sqrt{1-\gamma_0^2}\,b_0^{-1}$ можно получить спектральное представление поля для каждого из случаев (4.1) — (4.3) в следующем общем окончательном виде

$$\begin{gathered} q_0 = \operatorname{Re}\int_0^{\omega_1} A_0(\omega)\, J_1\!\left(\frac{r\omega b_0}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)\exp\left[-\chi_\nu\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\right] e^{i\omega t}\, d\omega \\ w_0 = \operatorname{Re}\int_0^{\omega_1} B_0(\omega) J_0\left(\frac{r\omega b_0}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)\exp\left[-\chi_\nu\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\right]\left(\frac{h}{\lambda}\right) e^{i\omega t}\, d\omega \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} q_1 = \operatorname{Re}\int_0^{\omega_1} & J_1\left(\frac{r\omega b_0}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)\left\{C_1^{(1)}(\omega)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\gamma_1^2(1-\gamma_0^2)-1}\right)\right]+\right. \\ & \left.+ C_1^{(2)}(\omega)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\delta_1^2(1-\gamma_0^2)-1}\right)\right]\right\}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\exp\left[-\chi_\nu\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\right]d\omega \\ w_1 = \operatorname{Re}\int_0^{\omega_1} & J_0\left(\frac{r\omega b_0}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)\left[D_1^{(1)}(\omega)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\gamma_1^2(1-\gamma_0^2)-1}\right)\right]+\right. \\ & \left.+ D_1^{(2)}(\omega)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\delta_1^2(1-\gamma_0^2)-1}\right)\right]\right\}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\exp\left[-\chi_\nu\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3\right]d\omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\chi_\nu = \varkappa_\nu\left(\frac{\pi\gamma_0}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)^3 \frac{\omega t}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}} \tag{4.6}$$

а $\varkappa_\nu = \varkappa_1$, если выполняется (4.1), $\varkappa_\nu = \varkappa_2$ в случае (4.2) и, наконец, $\varkappa_\nu = 0$, если имеет место (4.3). Явный вид функции C, A и B, D, введенных в (4.4) — (4.5), легко определяется из (2.3) и (2.4), а h/λ равно отношению толщины пластины к длине волны в пластине $\lambda = (a_0 f)^{-1}$. Частота ω_1, являющаяся верхним пределом интегрирования, в соответствии с (3.3) удовлетворяет условию

$$\omega_1 \ll 2\sqrt{1-\gamma_0^2}\,(b_0 h)^{-1} \tag{4.7}$$

При обсуждении физических следствий, вытекающих из решения поставленной задачи, обращает на себя внимание отсутствие изгибных колебаний, существующих в случае свободного слоя. Пластинчатая продольная волна имеет такую же дисперсию, как и для свободного слоя. Затухание же волны с расстоянием по цилиндрическому закону происходит лишь при выполнении неравенства (4.3). В этом случае не происходит утечки энергии в подстилающее полупространство, в котором поле смещений является неоднородной волной (убывает экспоненциально с ростом z). Если выполняются условия (4.1) и (4.2), пластинчатая волна в слое испытывает дополнительное затухание, связанное с излучением энергии в полупространство. При этом амплитуда q_0 составляющей вектора смещений монотонно убывает с ростом h / λ, амплитуда же w_0 составляющей имеет максимум, положение которого определяется равенством

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{1}{3\chi_\nu}} \tag{4.8}$$

из которого следует, что с ростом t максимум смещается в сторону меньших h / λ; в этом случае в полупространстве будут возбуждаться однородные конические волны. В случае (4.1) однородными волнами будут как продольная, так и поперечная, в случае же (4.2) поперечная будет однородной, а продольная неоднородной. Уравнение поверхностей равных фаз легко получить, воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя при больших r

$$\begin{aligned} &t - \frac{b_0 r}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}} - \frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\gamma_1^2(1-\gamma_0^2)-1} = \text{const} \\ &t - \frac{b_0 r}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}} - \frac{b_0(z-h)}{2\sqrt{1-\gamma_0^2}}\sqrt{4\delta_1^2(1-\gamma_0^2)-1} = \text{const} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Положение максимума спектральной функции этих колебаний определяется условием

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt[3]{\frac{2}{3\chi_\nu}}$$

характеризующим сдвиг максимума с ростом r в сторону меньших h / λ. Интересно, что при распространении волны затухание в случае больших h имеет большее значение, чем для малых. В заключение следует отметить, что при закреплении границ слоя с полупространством низкочастотные волны рассмотренного типа не возникают [3].

Поступила 10 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрашень Г. И., Молотков Л. А. О некоторых проблемах динамической теории упругости в случае сред, содержащих тонкие слои. Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 22.
2. Молотков Л. А. Об инженерных уравнениях колебаний пластин, имеющих слоистую структуру. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд. Ленингр. ун-та, 1961.
3. Молотков Л. А. О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим тонким слоем. Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Изд. Ленингр. ун-та, 1961.
4. Крауклис П. В. О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
5. Зволинский Н. В. Распространение возмущения от точечного импульса в упругом полупространстве, покрытом слоем жидкости. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 6.
6. Петрашень Г. И. Колебание упругого полупространства, покрытого слоем жидкости. Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1954, вып. 25.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ЕДИНИЧНОЙ ШИРИНЫ

С. И. Юрченко
(Ростов-на-Дону)

Изучаются периодические колебания бесконечной пластинки. Методом, предложенным в работе [1], решаемая ниже задача сводится к краевой задаче Римана [2]. Последняя решается приближенно. Суть приближения состоит в замене коэффициента задачи, имеющего сравнительно сложную структуру, выражением более простого вида. Затем применением обратного преобразования Фурье к решению задачи Римана находится приближенное решение исходной задачи. Решение доведено до числового результата и найдена оценка погрешности.