ИЗМЕНЧИВОСТЬ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО СПЕКТРУ

Е. А. Новиков (Москва)

1. Диссипация кинетической энергии представляет одну из основных характеристик турбулентного потока

$$\varepsilon = 2\nu D_{ik}^2, \qquad D_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, v_i — поле скорости, D_{ik} — тензор деформации жидкой частицы. Величина ε, так же как и скорость, случайным образом зависит от координат и времени.

В работе А. Н. Колмогорова [1] были выдвинуты две гипотезы подобия, касающиеся структуры турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Согласно первой гипотезе, структура турбулентного потока, в масштабах достаточно малых по сравнению с характерным внешним масштабом турбулентности L, определяется двумя параметрами: средней диссипацией энергии $\langle\varepsilon\rangle$ и ν. Согласно второй гипотезе, в так называемом инерционном интервале расстояний

$$L \gg r \gg l_0 \equiv \nu^{3/4} \langle\varepsilon\rangle^{-1/4} \tag{2}$$

(l_0 — внутренний масштаб турбулентности [1]), остается существенным только параметр $\langle\varepsilon\rangle$. На основе гипотез подобия получен ряд результатов, из которых наиболее важным является «закон $^2/_3$» Колмогорова — Обухова [1,2] и его аналог на спектральном языке — «закон $^5/_3$»

$$E\,(p) = C\,\langle\varepsilon\rangle^{2/3}\,p^{-5/3}\;(l_0^{-1} \gg p \gg L^{-1}) \tag{3}$$

Здесь $E\,(p)$ — спектральная плотность кинетической энергии, p — волновое число, C — постоянная.

Вскоре после возникновения концепции подобия турбулентности, Л. Д. Ландау [3] указал на необходимость учета изменений ε, связанных с крупномасштабным движением. В работах [4] и [5] намечено уточнение гипотез подобия с учетом статистической природы (изменчивости) диссипации энергии в турбулентном потоке. В настоящей заметке используется, в несколько ином плане, та же идея об учете изменчивости диссипации энергии, что приводит к следующим, на первый взгляд, парадоксальным выводам: а) подобие, вообще говоря, «ухудшается» по мере проникновения во все более мелкие масштабы; б) поле скорости, достаточно гладкое (в смысле существования высоких производных) в отдельных реализациях, обостряется после статистического осреднения (среднеквадратичные значения достаточно высоких производных обращаются в бесконечность).

2. В [4,5] введено понятие «чистого» статистического ансамбля с фиксированным значением $\varepsilon\,(r)$ — диссипации энергии, осредненной по шару радиуса r. Для «чистого» ансамбля формулируются гипотезы подобия и пишутся выражения для структурных функций поля скорости, отвечающих расстоянию r. Для «смешанного» (полного) ансамбля соответствующие формулы получаются осреднением по различным значениям величины $\varepsilon\,(r)$, для которой в [4,5] принят логарифмически-нормальный закон распределения с дисперсией, зависящей от расстояния r.

В настоящей статье удобнее будет использовать несколько иное определение «чистого» ансамбля. При описании турбулентности в неподвижных (эйлеровых) координатах, мимо наблюдателя, измеряющего скорость в фиксированных точках, проносятся области, по-разному насыщенные диссипацией. Естественно предположить, что структурные функции поля скорости, отвечающие расстоянию r, определяются диссипацией энергии, осредненной по области с размерами много большими r, чтобы можно было «набрать статистику» [1]. Под «чистым» будем понимать ансамбль с фиксированным

[1] Если рассматриваются многоточечные структурные функции, то под r подразумевается расстояние между максимально удаленными точками.

значением ε — диссипации энергии, осредненной по области с размерами, достаточно большими по сравнению с интересующими нас расстояниями r. «Смешанный» ансамбль — это наложение «чистых» ансамблей с некоторым (не зависящим от r) статистическим распределением, удовлетворяющим условию нормировки

$$\int_0^\infty f(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \qquad (4)$$

Возможно, аналогичные представления подразумевались в работе [6], где авторы пришли к выводу, что изменчивость диссипации энергии слабо влияет на форму распределения кинетической энергии по спектру, включая область больших волновых чисел. Однако такой вывод связан только со специальным выбором формы спектральной плотности энергии для «чистого» ансамбля — два степенных закона, сшитых в области внутреннего масштаба турбулентности. Ниже показано, что при других исходных спектрах для «чистого» ансамбля изменчивость диссипации энергии существенно влияет на форму спектра энергии в «смешанном» ансамбле, особенно в области больших волновых чисел.

3. Из соображений подобия можно написать следующее выражение для спектра энергии в «чистом» ансамбле

$$E(p) = \varepsilon^{2/3} p^{-5/3} \varphi(p^2 \nu \tau) \qquad (\tau = \nu^{1/2} \varepsilon^{-1/2},\ pL \gg 1) \qquad (5)$$

Функция $\varphi(x)$, которую можно считать универсальной (не зависящей от крупномасштабных особенностей потока), удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty x^{-1/3} \varphi(x)\, dx = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \varphi(x) = C \qquad (6)$$

Первое условие вытекает из нормировки спектра

$$2\nu \int_0^\infty p^2 E(p)\, dp = \varepsilon \qquad (7)$$

Второе условие означает, что в инерционном интервале волновых чисел выражение (5) должно переходить в «закон $^5/_3$».

Для «смешанного» ансамбля, осредняя (5) по ε с весом $f(\varepsilon)$, получим

$$\langle E(p)\rangle = \langle \varepsilon\rangle^{2/3} p^{-5/3} \varphi_*(p^2 \nu \tau_0) \qquad (\tau_0 = \nu^{1/2} \langle\varepsilon\rangle^{-1/2},\ pL \gg 1)$$
$$\varphi_*(p^2 \nu \tau_0) = \langle \varepsilon^{2/3} \varphi(p^2 \nu \tau)\rangle \langle\varepsilon\rangle^{-2/3}, \qquad C_* = \lim_{x\to 0} \varphi_*(x) = C \langle \varepsilon^{2/3}\rangle \langle\varepsilon\rangle^{-2/3} \qquad (8)$$

(функция $\varphi_*(x)$ удовлетворяет первому из условий (6)). Распределение $f(\varepsilon)$ зависит от крупномасштабных особенностей потока, и, в этом смысле, функция $\varphi_*(x)$ и спектр $\langle E(p)\rangle$ не являются универсальными. Из (8) видно, что в инерционном интервале волновых чисел всегда имеет место «закон $^5/_3$», однако постоянная C_* может зависеть от крупномасштабных свойств потока.[1] Далее, если спектр в «чистом» ансамбле имеет степенную асимптотику в области больших волновых чисел, то такую же асимптотику (с точностью до не универсальной постоянной) будет иметь спектр и в «смешанном» ансамбле. Этот случай и был рассмотрен в упомянутой выше работе [6], где показатель степени в асимптотике принят равным — 7 (модель Гейзенберга [8]). Представляется более естественным предположить, что в «чистом» ансамбле поле скорости имеет в среднеквадратичном сколь угодно высокие производные. Тогда спектр в «чистом» ансамбле должен убывать в области больших волновых чисел быстрее любой степени, а спектр в «смешанном» ансамбле не будет обладать универсальной асимптотикой в об-

[1] Заметим, что при лагранжевом описании турбулентности вторые моменты скоростей и расстояний между жидкими частицами в соответствующем инерционном интервале времен зависят от диссипации линейно, поэтому соответствующие постоянные являются универсальными [7].

ласти больших волновых чисел (даже с точностью до постоянной). В этом смысле, имеет место вывод а) сформулированный в конце раздела 1. Вывод б) следует из того, что функция $\varphi_*(x)$ может иметь степенную асимптотику, даже если $\varphi(x)$ убывает быстрее любой степени (или $\varphi_*(x)$ может убывать с меньшим показателем степени). Оба этих вывода проиллюстрированы ниже на конкретном примере.

Заметим, что в некотором диапазоне изменения ε (при фиксированном среднем $\langle\varepsilon\rangle$) распределение $f(\varepsilon)$ может обладать универсальностью. Учитывая это, вывод а) следует сформулировать более осторожно: по мере проникновения во все более мелкие масштабы усиливается зависимость характеристик турбулентности (в частности, спектра энергии) от распределения вероятностей для ε. Было бы интересно экспериментальное исследование функции распределения $f(\varepsilon)$.

4. В работе [9] получена асимптотика спектра энергии в области больших волновых чисел, которая естественным образом сшивается с «законом $^5/_3$»; на основе такого сшивания в [9] предложена формула для спектра энергии во всем интервале $pL \gg 1$, которая может быть записана в виде

$$E(p) = C\nu^{2/3}\tau^{-4/3}p^{-5/3}\exp\{-ap^2\nu\tau\} \qquad \left(C = \frac{a^{2/3}}{\Gamma(2/3)},\ a \approx \frac{2\sqrt{7}}{3}\right) \tag{9}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Эту формулу примем за исходную спектральную плотность в «чистом» ансамбле. Вместо распределения $f(\varepsilon)$ удобнее ввести распределение величины $y = \tau\langle\tau\rangle^{-1}$, которое для простоты расчетов зададим функцией

$$P(y) = \frac{\alpha^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}y^{\alpha}e^{-\alpha y} \tag{10}$$

Единственным параметром, характеризующим распределение $P(y)$ и, следовательно, крупномасштабные особенности турбулентного потока, является величина α, связанная со средним значением и дисперсией диссипации формулами:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\nu}{\langle\tau\rangle^2}\frac{\alpha}{\alpha-1}, \qquad \frac{\langle[\varepsilon-\langle\varepsilon\rangle]^2\rangle}{\langle\varepsilon\rangle^2} = \frac{2(2\alpha-3)}{(\alpha-2)(\alpha-3)} \tag{11}$$

Для того чтобы существовало среднее значение диссипации, необходимо $\alpha > 1$. Для того чтобы существовала дисперсия диссипации (которая, вообще говоря, не обязана быть конечной в «смешанном» ансамбле), необходимо $\alpha > 3$.

Осредняя (9), получим

$$\langle E(p)\rangle = \frac{C_*\langle\varepsilon\rangle^{2/3}p^{-5/3}}{[1+\beta(pl_0)^2]^{\alpha-1/3}} \tag{12}$$

$$C_* = \frac{C\Gamma(\alpha - 1/3)}{m^{1/3}\Gamma(\alpha-1)}, \qquad \beta = am^{-1/2}, \qquad m = \alpha(\alpha-1) \tag{13}$$

Формула (12) хорошо иллюстрирует сформулированные выводы. Отметим, что при $\alpha=3$ получается степенная асимптотика модели Гейзенберга (показатель степени — 7).

Поступила 27 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
2. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1941, № 5.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.
4. Obоukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence. J. Fl. Mech., 1962, 13, part 1.
5. Kolmogoroff A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. J. Fl. Mec., 1962, 13, part 1.
6. Grant H. L., Stewart R. W. and Moilliet A. Turbulence spectra from a tidal channel J. Fl. Mech., 1962, 12, part 2.
7. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентости ЖЭТФ, 1963, т. 44, № 6.
8. Heisenberg W. Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Phys., 1948, v. 124.
9. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.