15. Обобщение на случай произвольного конического тела не представляет труда. не вихревого слоя решение будет переходить в решение А. Л. Гонора [4]. В слое $= O(\varepsilon^2)$, u_0 выражается аналогично случаю круглого конуса, в формуле для w_1 личину k нужно заменить на A_2, а в формуле для v_0 добавится множитель A_1, где $_1$ и A_2 — коэффициенты Ляме, вычисленные на поверхности единичной сферы [4]. озможно также обобщение вышеизложенного на случай реального газа, если в каче ве малого параметра взять отношение плотностей до и после ударной волны.

После того, как настоящая работа была окончена, автор ознакомился с работой], в которой решается та же задача методом ПЛГ, однако авторы [7] используют дру ие переменные, которые в отличие от переменнных, используемых нами, не позволили олучить единое решение вплоть до поверхности конуса, найденное в настоящей аботе.

Автор благодарит Б. М. Булаха за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 8 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

. Cheng H. K. Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies. J. Fluid Mech., 1962, february, v. 12, part 2.
. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание круглого конуса под углом атаки ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 7.
. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
. Булах Б. М. О несимметричном гиперзвуковом обтекании кругового конуса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
. Цянь Сюэ-сень. Метод Пуанкаре—Лайтхилла—Го. Проблемы механики, вып. 2, ИЛ, 1959.
. Melnik R. E., Sheuing R. A. Shock layer structure and entropy layers in hypersonic conical flows. Progr. Astronaut. and Rocketry, v. 7. New York—London. Acad. Press, 1962. pp. 379—420.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

Л. А. Поспелов

(Харьков)

Рассматривается влияние нелинейности на распространение упругих волн в проводящем твердом теле при наличии магнитного поля. Предполагается, что влияние нелинейности и диссипации слабо проявляется на расстояниях порядка длины волны. Пренебрегая кубичными членами, исходная система уравнений (1) сведена к одному уравнению (15), решение которого известно [1]. Показано, что влияние нелинейности может привести к образованию разрыва.

Влияние нелинейности уравнений движения и диссипации в среде на распространение волн представляет известный интерес и ему посвящено большое число работ. Исследование распространения звуковых волн в газе [1,2], электромагнитных волн в феррите [3] и в проводящей жидкости [4], упругих волн в изотропном твердом теле [5] показывает, что вследствие нелинейного взаимодействия волн исходный сигнал сильно обогащается гармониками. Это может привести к искажению фронта волны и даже к разрыву, если среда не обладает дисперсией. При наличии диссипации старшие гармоники поглощаются более сильно и тенденция образования разрыва уменьшается. Все эти явления следует ожидать и при распространении магнитоупругих волн в изотропном твердом теле, которым и посвящена настоящая статья.

Рассмотрим систему самосогласованных уравнений для магнитного поля H и уравнений для вектора смещения u среды [6]

$$\frac{\partial^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{4\pi\rho}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}]_i, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = \mathrm{rot}_i\left[\frac{du}{dt}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta H_i \qquad \left(\sigma_{ik} = \frac{\partial E}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\right) \tag{1}$$

Здесь σ_{ik} — упругий тензор натяжений, E — энергия упругих деформаций

$$E = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^2 + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_k} +$$

$$+\left(\frac{B+k}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{A}{12}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \frac{B}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \frac{C}{3}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3$$

Пусть рассматриваемое твердое тело занимает полупространство $x > 0$ и пусть вдоль направления x распространяется бегущая волна (волновой вектор k параллелен оси x). Считаем, что внешнее постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости xy. Рассматривая в компонентах исходную систему уравнений, получим, что уравнения для u_z, H_z, H_x не содержат других компонент. Это означает, что если на границе они равны нулю, то они останутся таковыми и во всем пространстве. Итак, считаем

$$u_z = 0, \qquad H_z = 0, \qquad H_x = H_{0x} \tag{2}$$

Уравнения для остальных компонент имеют вид

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} - c_e^2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{4\pi\rho}H_{0y}\frac{\partial h_y'}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\rho}h_y'\frac{\partial h_y'}{dx} + \frac{2d}{\rho}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{d^2 u_y}{dt^2} - c_t^2\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{4\pi\rho}H_{0x}\frac{\partial h_y'}{\partial x} = \frac{d}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial h_y'}{\partial t} + H_{0y}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t\,\partial x} - H_{0x}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t\,\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(h_y'\frac{\partial u_x}{\partial t}\right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 h_x'}{\partial x^2}$$

Здесь

$$h_y' = H_y - H_{0y}, \qquad d = {}^1/_4 A + {}^1/_2(B+k) + {}^2/_3\mu, \qquad q = {}^2/_3\rho c^2 + A + 3B + C$$

Пусть в линейном приближении (и при $\sigma = \infty$) вдоль оси x распространяется бегущая волна с фазовой скоростью $u = k/\omega$, которая удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$D_0(u) = \begin{vmatrix} 1-\beta_e^2 & 0 & \beta_a^2 \\ 0 & 1-\beta_t^2 & -\alpha\beta_a^2 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Здесь

$$\beta_e^2 = \frac{c_e^2}{u^2}, \qquad \beta_t^2 = \frac{c_t^2}{u^2}, \qquad \beta_a^2 = \frac{u_a^2}{u^2}, \qquad u_a^2 = \frac{H_{0y}^2}{4\pi\beta}, \qquad \alpha = \frac{H_{0x}}{H_{0y}}$$

Другими словами, в линейном приближении все искомые величины являются функциями одной независимой переменной $\psi = kx - \omega t$. При учете малых нелинейных и малых диссипативных членов следует считать [1,2,4], что искомые величины зависят от двух переменных: полной фазы $\psi = kx - \omega t$ и «медленной координаты» $\xi = \varepsilon kx$, где $\varepsilon \ll 1$. Требование малости ε отражает тот факт, что нелинейные и диссипативные силы слабо проявляются на расстоянии порядка длины волны [1].

[1] Идея этого метода, по существу, совпадает с идеей метода Крылова, Боголюбова, Митропольского (КБМ), [7], а получение упрощенных уравнений (5) введением «медленной координаты» можно считать исходным пунктом в применении метода КБМ. Здесь метод КБМ не применяется, — для уравнения (15) известно точное решение.

Учитывая это замечание и переходя от переменных (x, t) к переменным (ψ, ξ), перепишем уравнение (3) в виде

$$
\begin{gathered}
(1-\beta_t^2)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\alpha\beta_a^2\frac{\partial h}{\partial\psi}=2\varepsilon\beta_t^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\psi}+\varepsilon\alpha\beta_a^2\frac{\partial h}{\partial\psi}+\\
+\frac{2d}{u^2}\gamma\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)-\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\frac{\partial w}{\partial\psi}+2\gamma\frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\\
\frac{\partial h}{\partial\psi}-\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}+\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}-\varepsilon\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\psi\,\partial\xi}+\gamma\frac{\partial}{\partial\psi}\left(h\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)+R_m\frac{\partial^2 h}{\partial\psi^2}\\
(1-\beta_e^2)\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}+\beta_a^2\frac{\partial h}{\partial\psi}=2\varepsilon\beta_e^2\frac{\partial^2 v}{\partial\psi\,\partial\xi}-\varepsilon\beta_a^2\gamma h\frac{\partial h}{\partial\psi}+\frac{2q}{u^2}\gamma\frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}+\frac{2d}{u^2}\gamma\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Здесь

$$
h=\frac{h'}{H_{0y}\gamma},\qquad v=\frac{u_x}{u},\qquad w=\frac{u_y}{u},\qquad \gamma=ku_0,\qquad R_m=\frac{c^2\omega}{4\pi\sigma u^2}
$$

При переходе от системы (3) к уравнениям (5) использованы соотношения

$$
\varepsilon\sim\gamma+R_m\ll 1 \tag{6}
$$

и были опущены члены, имеющие порядок ε^3.

Далее оказывается удобным ввести новые искомые функции соотношениями

$$
V=-\frac{1-\beta_t^2}{\alpha(1-\beta_e^2)}v,\qquad W=w,\qquad h=\frac{1-\beta_t^2}{\alpha\beta_a^2}h \tag{7}
$$

и преобразовать систему уравнений к виду

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial\psi^2}=\Phi_1,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial\psi^2}+\frac{\partial h}{\partial\psi}=\Phi_2,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}-\frac{\partial h}{\partial\psi}=\Phi_3 \tag{8}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\Phi_1=\frac{\alpha}{1-\beta_t^2}\left\{2\varepsilon\beta_e^2 v_{\xi\psi}-\varepsilon\beta_a h_\xi-\beta_a\gamma h h_\psi+\frac{2q}{u^2}\gamma v_\psi v_{\psi\psi}\right\}\\
\Phi_2=\frac{1}{1-\beta_t^2}\left\{2\varepsilon\beta_t^2 w_{\xi\psi}+\varepsilon\alpha\beta_a h_\xi+\frac{2d}{u^2}\partial(v_\psi w_\psi)_\psi-\gamma v_{\psi\psi}w_\psi+2\gamma v_\psi w_{\psi\psi}\right\}\\
\Phi_3=\frac{1}{\alpha}\{\varepsilon v_{\xi\psi}-\alpha\varepsilon w_{\xi\psi}+\gamma(hv_\psi)_\psi+R_m h_{\psi\psi}\}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Индекс ψ и ξ у искомых функций означает дифференцирование по ψ и ξ.

Систему уравнений, записанную в форме (8), будем называть системой приведенных уравнений. Далее убедимся, что запись исходной системы уравнений в форме приведенной будет существенным моментом в применении используемого метода. В этой формулировке метод становится применимым к другим системам уравнений, могущих содержать большее число исходных уравнений.

Так система самосогласованных уравнений магнитной гидродинамики для магнитного поля H, вектора скорости u, плотности ρ, температуры T и энтропии S сводится к системе четырех приведенных уравнений (для двух компонент скорости, одной компоненты магнитного поля и плотности) вида

$$
\frac{\partial x_1}{\partial\psi}-\frac{\partial x_2}{\partial\psi}=\Phi_1,\qquad \frac{\partial x_3}{\partial\psi}-\frac{\partial x_4}{\partial\psi}=\Phi_3,\qquad \frac{\partial x_2}{\partial\psi}-\frac{\partial x_3}{\partial\psi}=\Phi_2,\qquad \frac{\partial x_4}{\partial\psi}-\frac{\partial x_1}{\partial\psi}=\Phi_4 \tag{10}
$$

Здесь Φ_i — линейная комбинация членов вида

$$
(x_m, x_n)_\psi,\qquad x_{m\psi\psi}\qquad (i, m, n=1, 2, 3, 4)
$$

Уравнения, описывающие распространение звуковой волны в теплопроводящем вязком газе [2], сводятся к системе двух приведенных уравнений для скорости и плотности

$$
\frac{\partial x_1}{\partial\psi}-\frac{\partial x_2}{\partial\psi}=\Phi_1,\qquad \frac{\partial x_2}{\partial\psi}-\frac{\partial x_1}{\partial\psi}=\Phi_2 \tag{11}
$$

Рассматривая уравнения (8) как алгебраические и решая их относительно величин

$$x_1 = V_\psi, \qquad x_2 = W_\psi, \qquad x_3 = h_\psi$$

получим

$$d_0 x_1 = d_i \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad d_0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Здесь d_i — определитель, получающийся заменой i-го столбца в d_0 столбцом, составленным из свободных членов уравнений (8). Используя (9) и (10), легко убедиться, что

$$d_1 = d_2 = d_3 = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \tag{13}$$

Из уравнений системы (8) с точностью до членов порядка ε^2 следуют равенства

$$V_\psi = W_\psi = h = \eta \tag{14}$$

Подставляя соотношения (14) в уравнения (13), получим уравнение, которому удовлетворяет характеристическая функция

$$\eta_\zeta + \eta\eta_\psi = \delta\eta_{\psi\psi} \tag{15}$$

Здесь

$$\zeta = \frac{b}{a}\xi, \qquad \delta = \frac{c}{b}, \qquad a = -\varepsilon\left[\frac{1+\beta_e^2}{1-\beta_e^2} + \frac{(1+\beta_t^2)^2}{1-\beta_t^2} + \frac{1-\beta_t^2}{\alpha^2(1-\beta_e^2)^2} + 1\right]$$

$$b = \frac{\alpha\gamma}{1-\beta_t^2}\left[\frac{2d}{u^2} + \frac{(1-\beta_t^2)}{\alpha^2}\left(\frac{2(q-3)}{u^2(1-\beta_e^2)} - \frac{1}{\beta_a^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{\alpha(1-\beta_e^2)}\left(\frac{4d}{u^2}+1\right) - \frac{\gamma(1-\beta_t^2)^2}{\alpha^3\beta_a^2(1-\beta_e^2)}, \qquad c = \frac{R_m(1-\beta_t^2)}{\alpha\beta_a^2}$$

Использованные здесь преобразования справедливы при выполнении следующих соотношений

$$ku_0 + \frac{c^2\omega}{4\pi u^2\sigma} \ll 1, \qquad \xi \lesssim 1 \tag{16}$$

Второе из этих соотношений не представляет собой ограничения, так как процесс деформирования фронта волны происходит на расстояниях $\xi \lesssim 1$ $(x \lesssim \varepsilon^{-1})$, т. е. уравнение (15) полностью описывает весь процесс нелинейного деформирования фронта волны. Заметим, что соотношения (14) представляют собой решение поставленной задачи, отличающееся от точного на величину порядка ε^3. Учитывать в полученном решении члены порядка ε^2 не имеет смысла, так как пренебрегая членами порядка ε^3 в уравнении, определяющем производную от решения по медленной координате, при $\xi \sim 1$ в решении совершается ошибка[1] порядка ε^2. В размерных величинах полученные решения имеют вид

$$u_{x,\psi} = -u_0\frac{1-\beta_t^2}{\alpha(1-\beta_e^2)}, \quad \eta, \quad u_{y,\psi} = u_0\eta, \quad h_y 1 = H_{0y}\gamma\frac{1-\beta_t^2}{\alpha\beta_a^2}\eta \tag{17}$$

Решение уравнения (15) можно записать [1] в виде

$$\eta = -2\delta\frac{\theta_\psi}{\theta} \tag{18}$$

где $\theta = \theta(\zeta, \psi)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} = \delta\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2} \tag{19}$$

[1] Ситуация здесь подобна той, которая встречается при применении метода КБМ к обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [7], стр. 42).

Если

$$\eta(\zeta, \psi)_{\zeta=0} = \eta_0(\psi) \tag{20}$$

можно считать, что

$$\theta(\zeta, \psi)_{\zeta=0} = \theta_0(\psi) = \exp\left\{-\frac{1}{2\delta}\int_0^{\psi} \eta_0(\psi)\, d\psi\right\} \tag{21}$$

и общее решение уравнения (19) при граничном условии (20) можно записать в виде

$$\theta(\zeta, \psi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta\zeta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\varphi) \exp\left(-\frac{(\psi-\varphi)^2}{4\delta\zeta}\right) \alpha\varphi \tag{22}$$

Пусть [1,2] решение для η в линейном приближении имеет вид

$$\eta = -\eta_0 \sin\psi$$

тогда для θ граничным условием при $\zeta = 0$ будет

$$\theta(\zeta, \psi)_{\zeta=0} = \exp\left(\frac{\eta_0}{2\delta}\cos\psi\right)$$

Решение уравнения (19) при этом граничном условии будет иметь вид

$$\theta(\zeta, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta\zeta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\psi-\varphi)^2}{4\delta\zeta} + \frac{\eta_0\cos\varphi}{2\delta}\right] d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-n^2\delta\zeta} \cos n\psi \tag{23}$$

$$\left(A_0 = I_0\left(\frac{\eta_0}{2\delta}\right),\ A_{n\neq 0} = 2I_n\left(\frac{\eta_0}{2\delta}\right)\right)$$

Здесь I_n — модифицированная функция Бесселя. Довольно громоздкое выражение (23) существенно упрощается в случае больших и малых проводимостей среды. В первом случае решение имеет вид бегущей волны Римана

$$\eta = -\eta_0 \sin(\psi - \zeta\eta) \tag{24}$$

которая в явном виде описывает нелинейное искажение фронта волны. Из решения (24) следует, что влияние нелинейности приводит к разрыву фронта волны при $\zeta \sim 1$.

В другом предельном случае малой электропроводимости (большой диссипации) решение (23) можно записать в виде ряда Тэйлора по малому параметру $\eta_0 / 2\delta$, который с точностью до $\eta_0 / 2\delta$ имеет вид

$$\eta_0 = -\eta_0\left\{e^{-\delta\zeta}\sin\psi - \frac{\eta_0}{4\delta}\left(e^{-2\delta\zeta} - e^{-4\delta\zeta}\right)\sin 2\psi\right\} \tag{25}$$

В этом случае влияние нелинейности уравнений движения приводит лишь к возбуждению высших гармоник, разрыва же фронта волны при этом не наступает. Формула (25) дает зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния до источника.

Поступила 18 IV 1963

Институт Радиофизики
и электроники АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Cole T. On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics. Quart. Appl. Math., 1951, v. 9, No 3.
2. Хохлов Р. В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях. Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, вып. 6.
3. Auld B. A., Finite ampelitude electromagnetic Waves in Gyromagnetic Media. J. Appl. Phys., 1960, v. 31, No 5.
4. Солуян С. И., Хохлов Р. В. О распространении акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1961, т. 41, вып. 2.
5. Гедройц А. А., Красильник В. А. Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1962, т. 43.
6. Пелетминский С. В. Про объемні та поверхневі магнітопружні хвилі в металах. Укр. физ. ж., 1958, т. 3, вып. 5.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.