

КРУГОВОЙ КОНУС ПОД УГЛОМ АТАКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Я. Г. Сапунков (Саратов)

В работах [1, 2] решается задача о гиперзвуковом обтекании конуса под углом атаки методом разложения решения по степеням $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ и $\sigma = \sin \alpha / \sin \tau$, где γ — отношение теплоемкостей, τ — угол полураствора конуса, α — угол атаки. Получено второе приближение. Однако решения, получаемые применением этого метода, на поверхности конуса имеют логарифмические особенности, что указывает на непригодность его в окрестности поверхности конуса. Ченгом [1] дано исправление первого приближения в «вихревом слое».

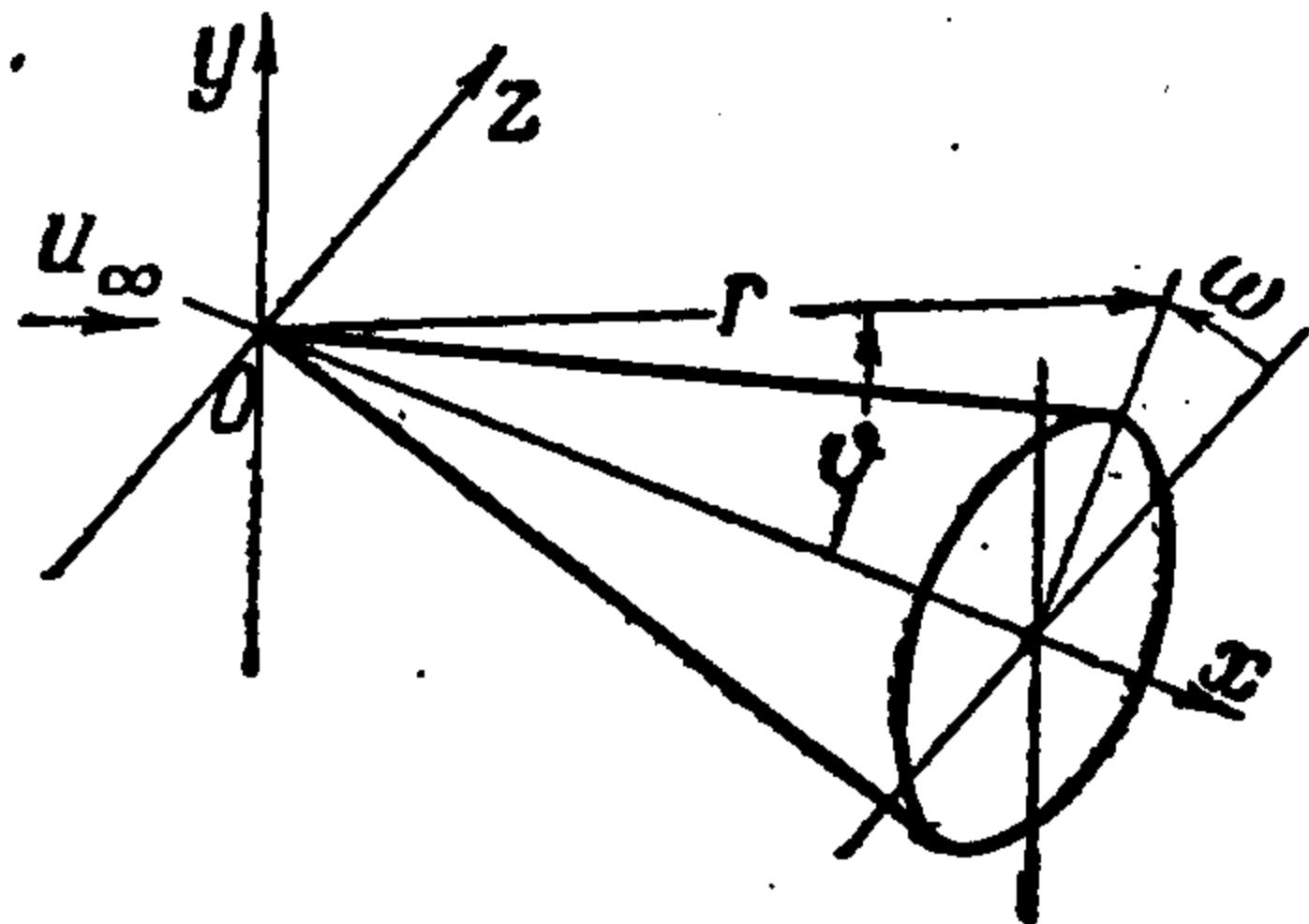
Ниже для решения задачи предлагается метод последовательных приближений позволяющий найти приближения равномерно аппроксимирующие точное решение во всей области между поверхностью ударной волны и поверхностью конуса, включая «вихревой слой». Получено решение с точностью до малых второго порядка включительно. Производится сравнение с результатами работ [1, 2].

Невязкий гиперзвуковой поток около конических тел рассмотрен А. Л. Гонором [3, 4], который искал решение в виде степенных рядов по $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ и получил нулевое приближение.

Однако можно показать, что первое приближение, полученное методом малых параметров, имеет логарифмическую бесконечность на поверхности конуса. Это указывает на то, что этот метод не проходит вблизи поверхности конуса (см. также [1]).

Ниже для решения этой задачи применен метод Пуанкаре—Лайтхилла—Го (ПЛГ). Для кругового конуса под произвольным углом атаки получено нулевое приближение справедливое всюду между поверхностью ударной волны и поверхностью конуса. Показано, что вне вихревого слоя решение переходит в решение А. Л. Гонора.

1. Рассмотрим обтекание кругового конуса с полураствором τ однородным потоком газа под углом атаки α в сферической системе координат r, ϑ, ω с осью, совпадающей с осью конуса (фиг.1).



Будем придерживаться обозначений работы [3]. Обозначим через u_+, v_+, w_+ компоненты вектора скорости в направлении увеличения r, ϑ, ω , через p_+, ρ_+ давление и плотность.

Введем безразмерные переменные

$$u = \frac{u_+}{u_\infty}, \quad v = \frac{v_+}{\varepsilon u_\infty \sin \tau}, \quad w = \frac{w_+}{u_\infty \sin \tau}$$

$$\rho = \frac{\varepsilon \rho_+}{\rho_\infty}, \quad P = \frac{p_+}{\rho_\infty u_\infty^2 \sin^2 \tau}, \quad \theta = \frac{\sin \vartheta - \sin \alpha}{\varepsilon \sin \tau}$$

Тогда уравнения количества движения, неразрывности, энергии примут вид

$$\left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] u = \sin^2 \tau [e^2 v^2 + \sigma^2 w^2]$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \sigma^2 \rho \frac{w^2}{1 + \varepsilon \theta} - \varepsilon \rho \left[v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{I(1 + \varepsilon \theta)} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{u}{I} \right] v$$

$$\sigma \rho \left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} + u \right] w = - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial \omega} + \sigma I \rho v w \right]$$

$$2(1 + \varepsilon \theta) \rho u + I \frac{\partial}{\partial \theta} [(1 + \varepsilon \theta) \rho v] + \sigma \frac{\partial}{\partial \omega} (\rho w) = 0$$

$$\left[I v \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma \frac{w}{1 + \varepsilon \theta} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Здесь

$$I = \cos \vartheta = [1 - \sin^2 \tau (1 + \varepsilon \theta)^2]^{1/2}$$

На поверхности конуса имеем условие обтекания

$$v = 0 \quad \text{при } \theta = 0$$

На поверхности ударной волны $\theta = \theta^+(\omega)$ условия сохранения массы, импульса, энергии и касательных составляющих скорости имеют вид [1]

$$\begin{aligned} I [\rho v - I\sigma \sin \omega + (1 + \varepsilon\theta^+) \cos \alpha] &= \sigma \Theta [\rho w - \varepsilon \cos \omega] \\ [I^2 + \varepsilon^2 \Theta^2] (p - k\varepsilon) &= [I (1 + \varepsilon\theta^+) \cos \alpha - I^2 \sigma \sin \omega + \sigma \varepsilon \Theta \cos \omega]^2 - \varepsilon \rho [Iv - \sigma \Theta w]^2 \\ [I^2 + \varepsilon^2 \Theta] (p/\rho - k) (1 + \varepsilon) + \varepsilon^2 [Iv - \sigma \Theta w]^2 &= \\ &= [I (1 + \varepsilon\theta^+) \cos \alpha - I^2 \sigma \sin \omega + \sigma \varepsilon \Theta \cos \omega]^2 \\ I\sigma (w - \cos \omega) + \varepsilon \Theta [\varepsilon v - I\sigma \sin \omega + (1 + \varepsilon\theta^+) \cos \alpha] &= 0 \\ u - I \cos \alpha &= \sin^2 \tau (1 + \varepsilon\theta^+) \sigma \sin \omega \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$k = \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2 \sin^2 \tau} = \text{const}, \quad \theta_\omega^+ = \frac{d\theta^+(\omega)}{d\omega}, \quad \Theta = \frac{\theta_\omega^+}{1 + \varepsilon\theta^+}$$

Величина k считается ограниченной. Интеграл Бернулли имеет вид

$$(p/\rho - k) (1 + \varepsilon) \sin^2 \tau + u^2 + \sin^2 \tau (\varepsilon^2 v^2 + \sigma^2 w^2) = 1. \quad (1.4)$$

2. Ченг [1] ищет решение в виде степенных рядов по ε и σ ; например, давление p представлено в виде

$$p = p_{00} + p_{10}\varepsilon + p_{01}\sigma + p_{20}\varepsilon^2 + p_{11}\varepsilon\sigma + p_{02}\sigma^2 + \dots, \quad p_{ij} = p_{ij}(\theta, \omega) \quad (2.1)$$

и функция $\theta^+(\omega)$ — определяющая положение ударной волны

$$\theta^+(\omega) = \theta_{00} + \theta_{10}\varepsilon + \theta_{01}\sigma + \theta_{20}\varepsilon^2 + \theta_{11}\varepsilon\sigma + \theta_{02}\sigma^2 + \dots, \quad \theta_{ij} = \theta_{ij}(\omega)$$

При решении задачи этим методом в третьем приближении в выражении для величины $S = \rho r^{-\gamma}$ появляется $\ln \theta$, поэтому третье приближение обращается в бесконечность на поверхности конуса ($\theta = 0$), что указывает на непригодность разложения типа (2.1) вблизи поверхности конуса.

Ченг производит исправление первого приближения; для S оно имеет вид [2]

$$\begin{aligned} S &= 1 + k + \varepsilon [k + 2(1 + k) \ln(1 + k)] + 2\sigma \cos \tau (1 - \zeta_0^2) / (1 + \zeta_0^2) \quad (2.2) \\ (\zeta_0 &= \theta^{\sigma\varepsilon(1+k)} \sec \tau \operatorname{tg} (1/2 \omega + 1/4 \pi)) \end{aligned}$$

Из (2.2) следует, что решение так зависит от ε и σ , что при разложении в степенной ряд по ε и σ получаются ряды, которые не являются равномерно сходящимися во всей области между поверхностью ударной волны и поверхностью конуса.

3. Для нормальной и окружной составляющих скорости введем приближенные выражения v^+ и w^+ , такие, что

$$v - v^+ \leq O(\theta^{1/3}), \quad w - w^+ \leq O(\theta^{1/3}) \quad \text{при } \theta \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

Введем функцию ζ , удовлетворяющую уравнению

$$v^+ \cos \tau \partial \zeta / \partial \theta + \sigma w^+ \partial \zeta / \partial \omega = 0 \quad (3.2)$$

и граничному условию

$$\zeta = -\sin w \quad \text{при } \theta = 1/2(1 + k)$$

(Смысл граничного условия станет ясен в дальнейшем.) Характер поведения линий $\zeta = \text{const}$ соответствует поведению линий тока. Они также имеют узел в точке $\theta = 0, \omega = 1/2\pi$, а поверхность конуса есть линия $\zeta = 1$, примем за независимые переменные θ и ζ ; уравнение для $S = \rho r^{-\gamma}$ представим в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + \sigma \frac{wv^+ \cos \tau - w^+v(1 + \varepsilon\theta)I}{(1 + \varepsilon\theta)v v^+ I \cos \tau} \frac{\partial S}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = 0 \quad (3.3)$$

4. Рассмотрим систему уравнений, состоящую из второго, третьего, четвертого уравнений системы (1.2), интеграла Бернулли (1.4), уравнения (3.3) с граничными условиями (1.3). Функцию $S = p\rho^{-\gamma}$ будем предполагать в виде

$$S = S_{00} + \varepsilon S_{01} + \sigma S_{01} + \varepsilon^2 S_{20} + \varepsilon\sigma S_{11} + \sigma^2 S_{02} + \dots, \quad S_{ij} = S_{ij}(\theta, \zeta; \varepsilon, \sigma) \neq 0 \quad (1)$$

Введем в рассмотрение разложения

$$Z = Z_{00} + Z_{10}\varepsilon + Z_{01}\sigma + Z_{20}\varepsilon^2 + Z_{11}\varepsilon\sigma + Z_{02}\sigma^2 + \dots, \quad z_{ij} = z_{ij}(\theta, \omega; \varepsilon, \sigma) = O(1) \quad (4.1)$$

в виде которых будем предполагать решения p, ρ, u, v, w , а также функцию $\theta^+(\omega)$, определяющую положение ударной волны.

5. Интегрируя уравнение неразрывности и учитывая ограниченность искомых величин в области между поверхностью конуса и поверхностью ударной волны, можно получить, что $v = O(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$; тогда этим свойством должны обладать и v_{ij} .

Будем предполагать, что $\partial\zeta/\partial\omega$ существует всюду и ограничена вне некоторой окрестности точки $(\theta = 0, \omega = 1/2\pi)$. В дальнейшем на примерах первого и второго приближения подтвердим сделанные предположения.

Введем еще функцию ζ_{n+1} , удовлетворяющую уравнению

$$\cos \tau \left(\sum_{i+j=0}^n v_{ij}^+ \varepsilon^i \sigma^j \right) \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial \theta} + \sigma \left(\sum_{i+j=0}^{n+1} w_{ij}^+ \varepsilon^i \sigma^j \right) \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial \omega} = 0 \quad (5.1)$$

и граничному условию

$$\zeta_{n+1} = -\sin \omega \quad \text{при } \theta = 1/2(1+k)$$

Ниже будет показано, что $w_{00}^+ = 0$. Оценим разность $R = \zeta - \zeta_{n+1}$, она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R}{\partial \theta} + \sigma \frac{w^+}{v^+ \cos \tau} \frac{\partial R}{\partial \omega} = \\ & = \frac{\sigma}{\cos \tau} \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial \omega} \left(v^+ \sum_{i+j=1}^{n+1} w_{ij}^+ \varepsilon^i \sigma^j - w^+ \sum_{i+j=0}^n v_{ij}^+ \varepsilon^i \sigma^j \right) \left(v^+ \sum_{i+j=0}^n v_{ij}^+ \varepsilon^i \sigma^j \right)^{-1} \end{aligned}$$

и граничному условию

$$R = 0 \quad \text{при } \theta = 1/2(1+k)$$

Составляя характеристические уравнения и интегрируя их, получим

$$R = \int_{1/2(1+k)}^{\theta} \frac{\sigma O[(\varepsilon + \sigma)^{n+2}]}{\theta \cos \tau} \frac{\partial \zeta_{n+1}}{\partial \omega} d\theta$$

Интеграл берется вдоль линии $\zeta = \text{const}$. Ниже будет показано, что $\partial\zeta_1/\partial\omega$ и $\partial\zeta_2/\partial\omega$ имеют порядок θ^{2q} при $\theta \rightarrow 0$ вне некоторой окрестности особой точки, аналогичное станет очевидным и для более высоких приближений. Тогда для R имеем всюду оценку $R = O[(\varepsilon + \sigma)^{n+1}]$ ($R = 0$ при $\theta = 0$).

Отсюда следует, что для получения решения с точностью до $(n+1)$ -го порядка малости включительно достаточно знать ζ_{n+1} , так как $S_{00} = \text{const}$ и не зависит от ζ .

6. Подставив разложения типа (4.1) в систему уравнений и граничных условий, указанную в п. 4, и собрав члены с одинаковыми степенями ε и σ , получим уравнения для коэффициентов представлений искомых величин.

Так как $v = O(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$, а производная $\partial\zeta/\partial\omega$ и I ограничены, то, если учесть (3.1), справедлива следующая оценка

$$\partial S / \partial \theta = O(\theta^{q-1}) \quad (q \geq 1/3) \quad (6.1)$$

Из (6.1) следует, что при решении уравнения (3.3) логарифмическая особенность появиться не может. Уравнения для остальных величин таковы, что если логарифмической особенности нет в уже известных приближениях, то при решении этих уравнений она не появится.

7. Приведем значения коэффициентов в нулевом приближении для безразмерных величин

$$p_{00} = 1, \quad \rho_{00} = (1+k)^{-1}, \quad u_{00} = \cos \tau \quad (7.1)$$

$$v_{00} = -2\theta, \quad w_{00} = (2\theta)^{1/2} (1+k)^{-1/2} \cos \omega, \quad \theta_{00} = 1/2 (1+k)$$

$$u_{10} = -1/2 (1+k) \sin \tau \operatorname{tg} \tau, \quad u_{01} = -\zeta \sin^2 \tau$$

$$v_{10} = \theta (1+k) \operatorname{tg}^2 \tau - \theta^2 (\operatorname{tg}^2 \tau - 1) - 4/3 \theta^3 (1+k)^{-1}$$

(7.2)

$$v_{01} = 2 \left(\sin \tau \operatorname{tg} \tau + \frac{2 \cos \tau}{1+k} \right) \int_0^\theta \zeta(t, \omega) dt + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \frac{(1+k) \sin \omega}{3 \cos \tau} - \frac{4 \cos \tau}{1+k} \theta \zeta$$

$$w_{10} = \cos \omega \left\{ 2(1+k) + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \left[\frac{k^2}{2(1+k)} - \frac{15}{8} (1+k) - \frac{1+k}{4} \operatorname{tg}^2 \tau \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \left[\frac{1+k}{8} \operatorname{tg}^2 \tau - \frac{3}{8} (1+k) \right] - \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \frac{1+k}{24} \right\} - \sec \tau \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[\frac{1+k}{2} \cos \tau \cos \omega + \left(\frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} + \frac{2 \cos \tau}{1+k} \right) \int_0^{1/2(1+k)} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} d\theta + \frac{1+k}{6} \frac{\cos \omega}{\cos \tau} \right]$$

$$w_{01} = - \left(\frac{2\theta}{1+k} \right) \frac{\sin 2\omega}{3 \cos \tau} + \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\sin 2\omega}{\cos \tau} \sin^2 \tau - \cos \omega \left(\frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 \cos \tau}{1+k} \right) \left[\frac{1}{2} \int_0^{1/2(1+k)} \left(\int_0^\varphi \zeta(t, \omega) dt - \varphi \zeta(\varphi, \omega) \right) \frac{d\varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{(1+k)} \int_0^{1/2(1+k)} \zeta d\theta \right] \right\}$$

$$p_{10} = \frac{5k+1}{4} - \frac{\theta^2}{1+k}, \quad p_{01} = -2 \sin \omega \cos \tau, \quad \rho_{10} = \frac{k^2 - \theta^2}{(1+k)^2} + \frac{1}{4}$$

$$\rho_{01} = -2 \cos \tau [\zeta + (1+k) \sin \omega] (1+k)^{-2}, \quad \theta_{10} = \frac{1}{24} (1+k)^2 (7 + 3 \operatorname{tg}^2 \tau) - \frac{k^2}{2}$$

$$\theta_{01} = \frac{1+k}{2} \cos \tau \sin \omega + \left[\frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} + \frac{2 \cos \tau}{1+k} \right] \int_0^{1/2(1+k)} \zeta d\theta + \frac{1+k}{6} \frac{\sin \omega}{\cos \tau}$$

Здесь $\zeta(t, \omega)$ и $\zeta(\varphi, \omega)$ означают, что вместо θ подставлено t или φ в формулу для $\zeta(\theta, \omega)$. Вычислим первое приближение для ζ , т. е. ζ_1 . Из (7.1) и (7.2) следует, что

$$v_{00}^+ = -2\theta, \quad w_{01}^+ = 0, \quad w_{10}^+ = 2(1+k) \cos \omega$$

Тогда для ζ_1 имеем

$$-\theta \cos \tau \frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta} + \sigma \varepsilon (1+k) \cos \omega \frac{\partial \zeta_1}{\partial \omega} = 0, \quad \zeta_1 = -\sin \omega \quad \text{при} \quad \theta = 1/2(1+k)$$

Решение для ζ_1 имеет вид

$$\zeta_1 = (1 - \eta_1^2) / (1 + \eta_1^2), \quad \eta_1 = [2\theta / (1+k)]^{\sigma \varepsilon (1+k) \sec \tau} \operatorname{tg} (1/2\omega + 1/4\pi) \quad (7.3)$$

Если в (7.2) подставить вместо ζ значение ζ_1 , то будем иметь первое приближение с точностью до малых первого порядка включительно, так как $R = \zeta - \zeta_1$ есть величина первого порядка. Интегралы от ζ_1 можно оценить по формуле

$$\int_0^t \zeta_1(\theta, \omega) d\theta = t \zeta_1(t, \omega) + \sigma \varepsilon (1+k) \sec \tau \int_0^t [1 - \zeta_1^2(\theta, \omega)] d\theta \quad (7.4)$$

8. Определим давление во втором приближении

$$\begin{aligned}
 p_{20} &= \frac{3}{32} (1+k)^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{(1+k)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \tau - \left(\frac{\theta k}{1+k} \right)^2 - \frac{(2\theta)^2}{16} + \frac{5(2\theta)^3}{24(1+k)} + \\
 &\quad + \theta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - \frac{\theta^3 \operatorname{tg}^2 \tau}{1+k} - \frac{11\theta^4}{6(1+k)^2} \\
 p_{11} &= \frac{4(1+k)}{15} \frac{\sin \omega}{\cos \tau} \left[\left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{5/2} - 1 \right] - \frac{4 \cos \tau}{(1+k)^2} \int_0^{\theta} dt \int_0^t \zeta_1(\varphi, \omega) d\varphi + \\
 &\quad + \frac{2 \sin^2 \tau}{(1+k) \cos \tau} \theta \int_0^{\theta} \zeta_1(t, \omega) dt + \frac{2\theta^2}{1+k} \cos \tau \sin \omega + \left(\frac{6 \cos \tau}{1+k} + \frac{2 \sin^2 \tau}{\cos \tau} \right) \times \\
 &\quad \times \int_0^{1/2(1+k)} \zeta_1(\theta, \omega) d\theta - \frac{(1+k) \sin \omega}{2 \cos \tau} (2 \cos^2 \tau - 3) + 2 \cos \tau \sin \omega \\
 p_{02} &= \cos 2\tau - \cos^2 \omega [\cos^2 \tau + 1/4 - \theta^2 (1+k)^{-2}]
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Здесь ζ заменено на ζ_1 , так как остановимся на втором приближении. Кроме того разлагая в ряды по ε и σ , легко показать, что p_{11} и θ_{01} отличаются от соответствующим выражений из работы [2] на величины второго порядка. В дальнейших вычислениях будут использоваться результаты работы [2]. Из уравнения (3.3) имеем

$$S_{20} = \text{const}, \quad S_{11} = f_1(\zeta), \quad S_{02} = 2 \int_{1/2(1+k)}^{\theta} \frac{\cos \omega}{\sqrt{2\theta(1+k)}} \frac{d\zeta}{d\omega} d\theta + f_2(\zeta)$$

Интеграл берется вдоль линии $\zeta = \text{const}$.

В выражениях для S_{11} и S_{02} заменим ζ на ζ_1 , это не повлияет на точность второго приближения. Тогда для плотности и радиальной составляющей скорости имеем

$$\begin{aligned}
 p_{20} &= \frac{1}{1+k} \left\{ \theta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - 2 \left(\frac{\theta k}{1+k} \right)^2 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{5\theta^3}{3(1+k)} - \right. \\
 &\quad - \frac{\theta^3 \operatorname{tg}^2 \tau}{1+k} - \frac{11\theta^4}{6(1+k)^2} + \frac{\theta^2(9+5k)}{4(1+k)} + \frac{(1+k)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \tau + \\
 &\quad \left. + \frac{11+38k-5k^2}{32} - \frac{(1+k)(7+3\operatorname{tg}^2 \tau)}{12} - \frac{k^3}{(1+k)^2} \right\} \\
 p_{11} &= \frac{\sin \omega}{(1+k) \cos \tau} \left\{ \frac{4(1+k)}{15} \left[\left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{5/2} - 1 \right] + \frac{\sin^2 \tau}{2} \left[1 - \frac{(2\theta)^2}{1+k} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k}{2} \left[\left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^2 \cos^2 \tau + 1 \right] \right\} + [\zeta_1 + (1+k) \sin \omega] \frac{\cos \tau}{(1+k)^2} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{7+3k}{2} + \frac{2\theta^2}{1+k} \right) + \frac{\zeta_1}{(1+k) \cos \tau} \left[\frac{4k}{(1+k)^2} \cos^2 \tau + \frac{1}{3} \right] + \\
 &\quad + 2 \cos \tau \sin \omega \left[\frac{1}{4} - \frac{k^2 + \theta^2}{(1+k)^2} \right] \\
 p_{02} &= \frac{(3-k) \zeta_1^2 \cos^2 \tau}{(1+k)^3} + \frac{4\zeta_1 \cos^2 \tau}{(1+k)^2} \sin \omega - \frac{\cos^2 \omega}{1+k} \left[\cos^2 \tau + \frac{1}{4} - \left(\frac{\theta}{1+k} \right)^2 \right] + \\
 &\quad + \frac{\cos^2 \tau}{1+k} - \frac{k \sin^2 \tau}{(1+k)^2} - \frac{2(1-\zeta_1^2)}{(1+k)^2} \left[1 - \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \right] \\
 u_{20} &= \sin \tau \operatorname{tg} \tau \left[\frac{k^2}{2} - \frac{(1+k)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \tau - \frac{(1+k)^2}{6} - \theta^2 \right] \\
 u_{11} &= \frac{(1+k) \sin^2 \tau}{2 \cos \tau} \left[\frac{\zeta_1}{\cos \tau} \left(\frac{4k+2}{1+k} \cos^2 \tau + \frac{1}{3} - \sin^2 \tau \right) + 4 \cos \tau \sin \omega \right] \\
 u_{02} &= \frac{\sin^2 \tau}{2 \cos \tau} \left\{ \sin^2 \tau - \zeta_1^2 - \frac{2\theta}{1+k} \cos^2 \omega - 2(1-\zeta_1^2) \left[1 - \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{1/2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Так как нулевое и первое приближения в безразмерных переменных для нормальной и окружной составляющих скорости соответствуют первому и второму приближениям в физических переменных, то коэффициенты $v_{20}, v_{11}, v_{02}, w_{20}, w_{11}, w_{02}$ не будем определять.

9. Надо определить ζ_2 , так как использовать ζ_1 в формулах для ρ_{01}, u_{01} при вычислении второго приближения нельзя. Из уравнений для w_{20}, w_{11}, w_{02} следует, что их решения имеют вид

$$w_{20} = \cos \omega \cos^{-2} \tau [1/2 (3k + 2) (1 + k) \sin^2 \tau - 2k^2 \cos^2 \tau - 1/30 (1 + k) (22k + 7)] + \theta^{1/3} f_1(\theta, \omega) + C_1(\omega) \theta^{1/3} + O(\varepsilon, \sigma) \quad (9.1)$$

$$w_{11} = 2(1 + k) \zeta_1 \cos \omega [2(1 + k)^{-1} \cos \tau + \sin \tau \operatorname{tg} \tau] + (1 + k) \sin 2\omega (\cos \tau - 1/4 \cos^{-1} \tau) + \theta^{1/3} f_2(\theta, \omega) + \theta^{1/2} C_2(\omega) + O(\varepsilon, \sigma)$$

$$w_{02} = \theta^{1/3} f_3(\theta, \omega) + \theta^{1/2} C_3(\omega)$$

Здесь ζ заменено на ζ_1 и считается, что v_{20}, v_{11}, v_{02} имеют порядок θ при $\theta \rightarrow 0$, что было показано в п. 5. Функции f_1, f_2, f_3 — ограниченные и их вид определяется коэффициентами $\rho_{20}, \rho_{11}, \rho_{02}, v_{20}, v_{11}, v_{02}$ и некоторыми другими, а $C_1(\omega), C_2(\omega), C_3(\omega)$ — определяются из граничных условий. Из (7.2) и (7.4) следует

$$v_{10}^+ = \theta (1 + k) \operatorname{tg}^2 \tau, \quad v_{01}^+ = 2\zeta_1 \theta \sin \tau \operatorname{tg} \tau \quad (9.2)$$

Первые члены в формулах (9.1) представляют собой $w_{20}^+, w_{11}^+, w_{02}^+$. Уравнение для ζ_2 примет вид

$$\cos \tau (v_{00}^+ + \varepsilon v_{10}^+ + \sigma v_{01}^+) \partial \zeta_2 / \partial \theta + \varepsilon \sigma (w_{10}^+ + \varepsilon w_{20}^+ + \sigma w_{11}^+) \partial \zeta_2 / \partial \omega = 0 \quad (9.3)$$

и граничное условие

$$\zeta_2 = -\sin \omega \quad \text{при } \theta = 1/2 (1 + k) \quad (9.4)$$

Так как ζ_1 отличается от ζ_2 на малые первого порядка, то можно в уравнении (9.3) в коэффициентах при производных от ζ_2 заменить ζ_1 на ζ_2 . Точность уравнения для ζ_2 при этом только улучшится, так как в более точных решениях на месте ζ_1 должно находиться ζ_2 . Решением будет

$$f(\zeta_2, \eta_2) = 0 \quad (9.5)$$

Здесь

$$\eta_2 = \left(\frac{2\theta}{1+k} \right)^{\varepsilon\sigma(1+k) \sec \tau (1+\varepsilon n_1 + \sigma \zeta_2 n_2)} \operatorname{tg} (1/2 \omega + 1/4 \pi) (\cos \omega)^{\sigma n_3} [1 + O[(\varepsilon + \sigma)^2]]$$

$$n_1 = \frac{1/2 (1 + k) (5k + 4) \sin^2 \tau - 2k^2 \cos^2 \tau - 1/30 (1 + k) (22k + 7)}{52 (1 + k) \cos^2 \tau} \quad (9.6)$$

$$n_2 = 2(1 + k)^{-1} \cos \tau + 2 \sin \tau \operatorname{tg} \tau, \quad n_3 = \cos \tau - 1/4 \cos^{-1} \tau$$

Функция f определяется из граничного условия (9.4).

Можно предложить приближенную формулу, дающую ζ_2 с точностью до малых первого порядка включительно. Этой точности достаточно для построения второго приближения. Разлагая в ряд η_2 , при $\theta = 1/2 (1 + k)$ имеем

$$\eta_2 (1/2 (1 + k), \omega) = \operatorname{tg} (1/2 \omega + 1/4 \pi) + \sigma n_3 \operatorname{tg} (1/2 \omega + 1/4 \pi) \ln \cos \omega + O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma, \sigma^2) \quad (9.7)$$

Это разложение обладает точностью до малых первого порядка вне некоторой окрестности с радиусом первого порядка малости около точки $\omega = 1/2 \pi$. Но в этой окрестности граничное условие отличается от единицы на величину второго порядка. Будем искать решение в виде $\zeta_2 = \varphi(\eta_2)$. Удовлетворяя граничному условию с точностью до малых первого порядка включительно, получим

$$\zeta_2 = \frac{1 - \eta_2^2}{1 + \eta_2^2} + \sigma n_3 \frac{4\eta_2^2}{(1 + \eta_2^2)^2} \ln \frac{2\eta_2}{1 + \eta_2^2} + O((\varepsilon + \sigma)^2) \quad (9.8)$$

где η_2 выражается формулой (9.6), в которой ζ_2 заменено на ζ_1 . Причем ζ_2 имеет всюду точность до малых первого порядка включительно.

Таким образом, в физических переменных полностью построено второе приближение.

10. Этим методом может быть построено приближение более высокого порядка, но в уравнениях резко возрастает число членов, что осложняет процесс вычислений.

Если найденное решение формально разложить в ряды по ε и σ , то оно переходит в решение, которое получается формальным применением метода малого параметра. Но получающиеся ряды расходятся на поверхности конуса ($\theta = 0$), а в ее окрестности не являются равномерно сходящимися.

Для сравнения решений, полученных этими двумя способами, рассматривался пример со следующими данными: $\tau = 45^\circ$, $\alpha = 17^\circ$, $M_\infty = 9.4$, $\gamma = 1.40$.

Разница между радиальными скоростями, вычисленными по этим двум способам, во втором приближении составляла при $\theta = 0.1 \approx 8\%$, при $\theta = 0.01 \approx 14\%$, при $\theta = 0.001 \approx 23\%$, на поверхности конуса расхождение достигает 80%.

Аналогичное решение можно предложить для задачи об обтекании конуса под углом атаки сверхзвуковым потоком.

11. Ниже рассматривается задача об обтекании кругового конуса с полураствором τ , невязким однородным гиперзвуковым потоком совершенного газа под произвольным углом атаки α в сферической системе координат r, ϑ, ω с осью, совпадающей с осью конуса (фиг. 1).

В качестве независимых переменных берутся ω и ϑ , где $\psi(\omega, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению

$$v_+ \partial \psi / \partial \vartheta + w_+ \operatorname{csec} \vartheta \partial \psi / \partial \omega = 0$$

Уравнения количества движения, неразрывности и энергии примут вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{w_+}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_+}{\partial \omega} - v_+^2 - w_+^2 &= 0 \\ \frac{\omega_+}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_+}{\partial \omega} + u_+ v_+ - \frac{w_+^2}{\operatorname{tg} \vartheta} &= - \frac{1}{\rho_+ \vartheta_\psi} \frac{\partial p_+}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \ln(\rho_+ w_+ \vartheta_\psi) + 2 \frac{u_+}{w_+} \sin \vartheta = 0 \quad (11.1) \\ \frac{\gamma p_+}{\rho_+ (\gamma - 1)} + \frac{u_+^2 + v_+^2 + w_+^2}{2} &= \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty (\gamma - 1)} + \frac{u_\infty^2}{2} \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{p_+}{\rho_+^\gamma} &= 0, \quad w_+ \frac{\partial \vartheta}{\partial \omega} = v_+ \sin \vartheta \end{aligned}$$

Решение должно удовлетворять условиям на ударной волне и поверхности конуса [3].

А. Л. Гонор решает систему (11.1) методом разложения по малому параметру $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, полагая

$$\begin{aligned} u_+ &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v_+ = \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \dots, \quad w_+ = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \\ p_+ &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad \rho_+ = \varepsilon^{-1} \rho_0 + \rho_1 + \dots, \quad \vartheta = \tau + \varepsilon \vartheta_0 + \dots \quad (11.2) \end{aligned}$$

Им были найдены значения коэффициентов с нулевым индексом. Однако, если попытаться найти решение для коэффициентов с индексом 1, то w_1 на поверхности конуса обращается в логарифмическую бесконечность.

12. Преобразуем систему (11.1) к виду, удобному для применения метода ПЛГ.

Так как $v_+ \sim O(\varepsilon)$, то из первого уравнения системы (11.1) следует

$$\operatorname{csec} \vartheta \partial u_+ / \partial \omega = w_+ + O(\varepsilon^2) \quad (12.1)$$

(Это соотношение становится точным на поверхности конуса, так как на ней $v_+ = 0$, а вблизи $v_+ \sim O(\vartheta - \tau)$.) Представим p_+ и ρ_+ следующим образом

$$\begin{aligned} p_+ &= p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2), \quad p_i = p_i(\omega, \psi; \varepsilon) = O(1) \\ \rho_+ &= \varepsilon^{-1} [\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + O(\varepsilon^2)], \quad \rho_i = \rho_i(\omega, \psi; \varepsilon) = O(1) \end{aligned} \quad (12.2)$$

Тогда из интеграла Бернулли (четвертое уравнение системы (11.1)) при использовании постоянства энтропии вдоль линии тока имеем

$$u_+^2 + \left(\csc \vartheta \frac{\partial u_+}{\partial \omega} \right)^2 + \frac{p_0^+}{\rho_0^+} \left[1 + \varepsilon \left(1 + 2 \ln \frac{p_0}{p_0^+} + \frac{p_1^+}{p_0^+} - \frac{\rho_1^+}{\rho_0^+} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = u_\infty^2 + \frac{2\gamma p_\infty}{(\gamma - 1) \rho_\infty} \quad (12.3)$$

Верхний индекс плюс означает, что величина вычисляется на линии сечения поверхности тока $\psi = \text{const}$ с ударной волной.

Введем новую переменную вместо ω

$$z = \int_{\omega^+}^{\omega} \sin \vartheta d\omega$$

Кроме того, введем обозначения

$$f(z, \psi) = X_0(\psi) + \varepsilon X_1(z, \psi), \quad X_0(\psi) = \left[u_\infty^2 + \frac{2\gamma p_\infty}{\rho_\infty(\gamma - 1)} - \frac{p_0^+}{\rho_0^+} \right]^{1/2} \quad (12.4)$$

$$X_1(z, \psi) = - \frac{p_0^+}{2\rho_0^+ X_0(\psi)} \left[1 + 2 \ln \frac{p_0}{p_0^+} + \frac{p_1^+}{p_0^+} - \frac{\rho_1^+}{\rho_0^+} \right]$$

Тогда уравнение (12.3) примет вид

$$u_+^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = f^2(z, \psi) \quad (12.5)$$

Решения для u_+ ищем в виде

$$u_+ = f(z, \psi) \sin y(z, \psi) \quad (12.6)$$

Тогда уравнение для $y(z, \psi)$ имеет вид

$$f y_z' + f_z' \operatorname{tg} y = f(z, \psi) \quad (12.7)$$

Штрих означает дифференцирование. Для независимых переменных принимаем

$$z = q + \varepsilon z_1(q, \psi) + \dots, \quad \psi = \psi \quad (12.8)$$

Искомые функции ищем в виде

$$y = y_0(q, \psi) + \varepsilon y_1(q, \psi) + \dots \quad (12.9)$$

Подставляя (12.8) и (12.9) в (12.7), имеем

$$X_0 y_{0q}' + \varepsilon (X_1 y_{0q}' + X_0 y_{1q}') + \varepsilon X_{1q}' \operatorname{tg} y_0 + \dots = X_0 + \varepsilon (X_0 z_{1q}' + X_1) + \dots \quad (12.10)$$

Собирая в (2.10) свободные члены, получим

$$y_{0q}' = 1, \quad \text{т. е. } y_0 = q + \alpha(\psi) \quad (12.11)$$

Удовлетворяя граничному условию на поверхности ударной волны [3], имеем

$$\alpha(\psi) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u_0^+}{w_0^+}$$

Собирая члены с ε и требуя, чтобы y_1 не имело особенности, получим

$$z_{1q}' = X_{1q}' \operatorname{tg} [q + \alpha(\psi)]$$

Тогда

$$y_{1q}' = 0, \quad z_1 = \int_0^q X_{1q}' \operatorname{tg} [q + \alpha(\psi)] dq, \quad y_1 = y_1(\psi) \quad (12.12)$$

Из (12.12), (12.4) и ограниченности X_{1q}' следует оценка

$$z = q + \varepsilon O \{ (\partial p_0 / \partial q) \ln \cos [q + \alpha(\psi)] \}$$

Отсюда видно, что $z - q \leq 0$ ($\varepsilon \ln \varepsilon$) при $q + \alpha(\psi) \leq 1/2 \pi - 0(\varepsilon)$, где $0(\varepsilon) > 0$.

При приближении $q + \alpha(\psi)$ к $1/2 \pi$ величина z быстро растет при малых возрастаниях q .
Далее из (12.1), (12.4), (12.6), (12.11), (12.12) имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= X_0(\psi) \sin [q + \alpha(\psi)] \\ u_1 &= X_1(z, \psi) \sin [q + \alpha(\psi)] + X_0(\psi) \cos [q + \alpha(\psi)] y_1(\psi) \\ w_0 &= X_0(\psi) \cos [q + \alpha(\psi)] \partial q / \partial z \\ w_1 &= X_{1z}'(z, \psi) \sin [q + \alpha(\psi)] + X_1 \cos [q + \alpha(\psi)] \partial q / \partial z - \\ &\quad - X_0 \sin [q + \alpha(\psi)] y_1(\psi) \partial q / \partial z \end{aligned} \quad (12.13)$$

Отсюда видно, что u_0, w_0 отличаются на малые первого порядка от соответствующих им результатов А. Л. Гонора [3] при

$$q + \alpha(\psi) \leq 1/2 \pi - O(\varepsilon)$$

т. е. вне вихревого слоя.

Осуществляя предельный переход на поверхность конуса, имеем

$$u_0 = X_0(\psi_0), \quad u_1 = + X_1(z, \psi_0), \quad w_0 = 0, \quad w_1 = X_1'(z, \psi_0) \quad (12.14)$$

где $\psi = \psi_0$ для поверхности конуса.

Эти величины совпадают с таковыми, найденными на поверхности конуса в [5].

13. Вместо ϑ введем величину $\varphi = (\vartheta - \tau)/\varepsilon$. Из третьего уравнения (11.1) имеем

$$\varphi = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\rho_+ w_+ \varphi_{\psi}^+}{\rho_+ w_+} \exp \left(-2 \int_{\omega_+}^{\omega} \frac{u_+ \sin \vartheta d\omega}{w_+} \right) / d\psi \quad (13.1)$$

Отсюда, используя (12.13), легко получить, что w_+ имеет порядок $O(\varepsilon)$, если φ будет порядка $O(\varepsilon^2)$. Это согласуется с результатами работы [2] (при малых углах атаки). Там, где $w_+ \geq O(\varepsilon)$, т. е. при $\varphi \geq O(\varepsilon^2)$, u_0 и w_0 определяются решением А. Л. Гонора правильно, следовательно, в этой области верно и давление p_0 , определяемое в решении [3] формулой (12). Но тогда выполнены все предположения работы [5], и, следовательно, давление p_0 определено в решении А. Л. Гонора верно всюду. Легко показать, что φ определяется формулой (13) из работы [3] с точностью до ε^2 вне слоя $\varphi = O(\varepsilon^2)$. Следовательно, нулевое приближение А. Л. Гонора верно всюду вне слоя $\varphi = O(\varepsilon^2)$.

Тогда можно определить функцию $y_1(\psi)$ из граничного условия для u_1 на поверхности ударной волны.

Если теперь в формулу (13.1) подставить нулевые приближения вместо всех величин, а вместо w подставить $w_0 + \varepsilon w_1$, из (12.13), то получим нулевое приближение для φ , годное всюду. Получающаяся формула для φ будет определять в нулевом приближении поле энтропии в переменных φ, ω , всюду между поверхностью ударной волны и поверхностью конуса.

14. Можно определить поведение линий тока в окрестности поверхности конуса. Из уравнения неразрывности следует, что при

$$\varphi = O(\varepsilon^2), \quad v_0 = -2u_0(\psi, \omega) \varphi_0 + O(\varepsilon \varphi) \quad (u_0(\psi, \omega) = x_0(\psi) + O(\varepsilon))$$

Из (12.13), учитывая п. 13, при $q + \alpha(\psi) = 1/2 \pi - o(\varepsilon)$, т. е. в вихревом слое, имеем

$$w_+ = -\varepsilon [kX_0(\psi) p_0(\omega, \tau)]^{-1} p_{0\omega}'(\omega, \tau) + o(\varepsilon) \quad (k = \sin \tau)$$

Тогда линии тока вблизи поверхности конуса в переменных φ, ω имеют вид

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1} \right) \exp \left(2X_0(\psi) k \int_{\omega_1}^{\omega} w_1^{-1} d\omega \right) = 1 \quad (14.1)$$

где φ_1, ω_1 — точка, принадлежащая линии ψ , находящаяся в слое $\varphi = O(\varepsilon^2)$. Из (14.1) следует, что все линии тока сходятся в точке $\varphi = 0, \omega = 1/2 \pi$, что соответствует качественному анализу А. Ферри.

15. Обобщение на случай произвольного конического тела не представляет труда. В вихревом слое решение будет переходить в решение А. Л. Гонора [4]. В слое $= O(\varepsilon^2)$, u_0 выражается аналогично случаю круглого конуса, в формуле для w_1 величину k нужно заменить на A_2 , а в формуле для v_0 добавится множитель A_1 , где A_1 и A_2 — коэффициенты Ляме, вычисленные на поверхности единичной сферы [4]. Возможно также обобщение вышеизложенного на случай реального газа, если в качестве малого параметра взять отношение плотностей до и после ударной волны.

После того, как настоящая работа была окончена, автор ознакомился с работой [7], в которой решается та же задача методом ПЛГ, однако авторы [7] используют другие переменные, которые в отличие от переменных, используемых нами, не позволили получить единое решение вплоть до поверхности конуса, найденное в настоящей работе.

Автор благодарит Б. М. Булаха за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 8 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Cheng H. K. Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies. *J. Fluid Mech.*, 1962, february, v. 12, part 2.
- 2. Сапунков Я. Г. Гиперзвуковое обтекание круглого конуса под углом атаки ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
- 3. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 7.
- 4. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
- 5. Булах Б. М. О несимметричном гиперзвуковом обтекании кругового конуса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
- 6. Цянь Сюэ-сень. Метод Пуанкаре—Лайтхилла—Го. Проблемы механики, вып. 2, ИЛ, 1959.
- 7. Melnik R. E., Sheuing R. A. Shock layer structure and entropy layers in hypersonic conical flows. *Progr. Astronaut. and Rocketry*, v. 7. New York—London. Acad. Press, 1962. pp. 379—420.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

Л. А. П о с п е л о в

(Харьков)

Рассматривается влияние нелинейности на распространение упругих волн в проводящем твердом теле при наличии магнитного поля. Предполагается, что влияние нелинейности и диссипации слабо проявляется на расстояниях порядка длины волны. Пренебрегая кубичными членами, исходная система уравнений (1) сведена к одному уравнению (15), решение которого известно [1]. Показано, что влияние нелинейности может привести к образованию разрыва.

Влияние нелинейности уравнений движения и диссипации в среде на распространение волн представляет известный интерес и ему посвящено большое число работ. Исследование распространения звуковых волн в газе [1, 2], электромагнитных волн в феррите [3] и в проводящей жидкости [4], упругих волн в изотропном твердом теле [5] показывает, что вследствие нелинейного взаимодействия волн исходный сигнал сильно обогащается гармониками. Это может привести к искажению фронта волны и даже к разрыву, если среда не обладает дисперсией. При наличии диссипации старшие гармоники поглощаются более сильно и тенденция образования разрыва уменьшается. Все эти явления следует ожидать и при распространении магнитоупругих волн в изотропном твердом теле, которым и посвящена настоящая статья.