К ТЕОРИИ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

Л. А. Островский

(Горький)

Движения неоднородной среды, близкие к характеристическим (римановым волнам), подробно изучены в литературе применительно к распространению волн малой длины, т. е. в приближении геометрической акустики — как для линейного случая [1-3], так и с учетом нелинейных эффектов [4-7]. Полученные результаты относятся к средам с постоянными во времени свойствами. Изменение параметров среды во времени вносит, очевидно, ряд особенностей в процесс распространения, в частности, длительность (период) и энергия волны изменяются даже в отсутствие каких-либо диссипативных эффектов.

Ниже рассматриваются волны в среде, параметры которой зависят от координаты x и времени t, т. е. среда движется произвольным заданным образом в направлении оси x. Используемый ниже метод, несколько отличный от обычных методов характеристик, позволяет при определенных условиях свести задачу к последовательному интегрированию уравнений в частных производных первого порядка.

Метод применяется сначала к задаче, в которой невозмущенное (по отношению к рассматриваемой волне) движение представляет собой простую (риманову) волну; при этом удается получить общее решение, описывающее звуковые возмущения произвольного вида. Для произвольного же начального движения среды найдены и исследованы решения, обобщающие приближение геометрической акустики на случай волн в нестационарных средах, в том числе для волн конечной амплитуды.

§ 1. Взаимодействие звуковой и римановой волн. Исходные уравнения газодинамики в отсутствие диссипативных эффектов имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0,\quad p=p(\rho,S),\qquad c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \tag{1.1}$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, p — давление, c — скорость звука, S — энтропия; внешние силы пока считаем отсутствующими.

Имея в виду, что движение мало отличается от римановой волны, будем искать производную одной из величин (например, u) и связь остальных величин с u на характеристике.

Рассматривая для определенности c_+-характеристику, положим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_+=\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x,t),\qquad u=u_0+\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{c}{\rho}\,d\rho+\psi(x,t)\qquad (v=u+c) \tag{1.2}$$

где φ и ψ — неизвестные функции.

Подстановка (1.2) в (1.1) дает для изэнтропических движений линейные относительно φ и ψ уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\qquad \varphi=c\,\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.3}$$

Следовательно, ψ распространяется вдоль c_--характеристики.

Положим, в соответствии со сказанным выше $u=u^\circ(\xi)+u'$, $\rho=\rho^\circ(\xi)+\rho'$ и т. д., где u', ρ' — малые функции, а u°, ρ° образуют простую волну, т. е. удовлетворяют соотношениям (1.2) при $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$ и зависят от переменной $\xi=x-v^\circ t$. Тогда в первом приближении в (1.3) можно положить $u=u^\circ$, $c=c^\circ$ (так как φ и ψ малы, то при этом отбрасываются лишь величины второго порядка малости). Чтобы проинтегрировать (1.3), перейдем от x, t к переменным ξ, $t'=t$ и учтем, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{1}{v^\circ}\frac{\partial\xi}{\partial t}=1-t'\frac{dv^\circ}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(1+t'\frac{dv^\circ}{d\xi}\right)^{-1}$$

В этих переменных уравнение c_--характеристики линейно относительно t'

$$\left(\frac{dt'}{d\xi}\right)_- = \frac{1}{2c}\left(1 + t'\frac{dv^\circ}{d\xi}\right)$$

В результате найдем интеграл (1.3)

$$\psi = F\left(t'\sqrt{c^\circ\rho^\circ} \mp \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi}\sqrt{\frac{\rho^\circ}{c^\circ}}d\xi\right), \qquad \varphi = \sqrt{c^\circ\rho^\circ}\frac{dF}{dy} \tag{1.4}$$

Здесь и далее F — произвольная функция, определяемая начальными и граничными условиями, y — аргумент F.

Учитывая второе уравнение (1.2) и (1.4), первое уравнение (1.2) относительно малых возмущений u' представим в виде

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + v^\circ\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{u'}{c^\circ}\frac{\partial c^\circ\rho^\circ}{\partial\rho^\circ}\frac{\partial u^\circ}{\partial x} = \frac{\rho^\circ}{c^\circ}\frac{\partial c^\circ}{\partial\rho^\circ}\frac{\partial u^\circ}{\partial x}F(y) \mp \sqrt{c^\circ\rho^\circ}\frac{dF}{dy} \tag{1.5}$$

После перехода к переменным ξ, t' уравнение (1.5) не содержит производной $\partial u'/\partial\xi$ и непосредственно интегрируется

$$u' = \left(1 + t'\frac{dv^\circ}{d\xi}\right)^{-1}\left\{\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\left[F\left(1 + t'\frac{dv^\circ}{d\xi}\right) - \frac{1}{\sqrt{c^\circ\rho^\circ}}\frac{dv^\circ}{d\xi}\int F\,dy\right]\right\} \tag{1.6}$$

1.6) представляет общий интеграл линеаризованной около $u^\circ(\xi)$, $\rho^\circ(\xi)$ системы (1.1), содержащий, как и следовало ожидать, две произвольные функции Φ и F. При постоянных u°, ρ° имеем, разумеется, обычный результат

$$u' = \Phi[x - (u^\circ + c^\circ)t] + F[x - (u^\circ - c^\circ)t]$$

В (1.6) положим $F \equiv 0$; тогда получим волну, бегущую в положительном направлении; как ясно из (1.2), функции $u = u^\circ \mp u'$, $\rho = \rho^\circ \mp \rho'$ образуют простую волну. Более интересному случаю «встречного» распространения соответствует $\Phi \equiv 0$. Пусть, например, навстречу простой волне, соединяющей области (1) и (2) постоянного течения, распространяется (в области (*1*)) синусоидальная звуковая волна с частотой $\omega^{(1)}$ и амплитудой u^m. Тогда, определяя $F(y)$ в (1.6), найдем [1]

$$\frac{u'}{u^m} = \sin\left(\frac{2\omega^{(1)}\sqrt{c^{(1)}/\rho^{(1)}}}{c^{(1)} - u^{(1)}}y\right) + \frac{c^{(1)} - u^{(1)}}{2\omega^{(1)}c^{(1)}}\sqrt{\frac{c^{(1)}\rho^{(1)}}{c^\circ\rho^\circ}}\frac{dv^\circ/d\xi}{1 + t'\,dv/d\xi} \times$$

$$\times\cos\left(\frac{2\omega^{(1)}\sqrt{c^{(1)}\rho^{(1)}}}{c^{(1)} - u^{(1)}}y\right) \tag{1.7}$$

(индекс $^\circ$ для постоянных величин в области (1) опущен). Отсюда следует, что после перехода в область (2) волна будет синусоидальной с той же амплитудой u^m (т. е. амплитуда p' изменяется пропорционально $c^\circ\rho^\circ$) и частотой $\omega^{(2)}$, равной

$$\omega^{(2)} = \omega^{(1)}\frac{[(u^\circ - c^\circ)\sqrt{\rho^\circ/c^\circ}]^{(2)}}{[(u^\circ - c^\circ)\sqrt{\rho^\circ/c^\circ}]^{(1)}} \tag{1.8}$$

Случай $u^\circ = c^\circ$ означает просто, что в данной области (в выбранной системе координат) волна стационарна, т. е. u' не зависит от t.

Если в простой волне есть участки сжатия, то при $1 + t'\,dv^\circ/d\xi = 0$, что соответствует образованию ударной волны, выражения (1.6) — (1.7) расходятся [2]. Решение

---

[1] Полагаем для простоты, что производная $dv^\circ/d\xi$ всюду непрерывна.

[2] Самостоятельный интерес представляет то обстоятельство, что в области сжатия амплитуда волны может резко возрастать за счет ее уменьшения в области разрежения.

задачи о взаимодействии звука с ударной волной отличается от (1.6) и для стационарного разрыва хорошо известно [1]. Вместе с этим решением (1.6) позволяет определить результат прохождения звука через волну конечной протяженности, состоящую из разрыва и следующей за ним волны разрежения.

Нетрудно определить также поведение энтропийной волны в области римановского движения. Для этого в третьем уравнении (1.1) положим $u = u^\circ$, $S = S^\circ + S'$ и перейдем снова к переменным ξ, t'. В результате получим

$$S' = F_s\left(t'\rho^\circ c^\circ + \int_{\xi_0}^{\xi} \rho^\circ\, d\xi\right) \qquad (F_s \text{ — произвольная функция}) \tag{1.9}$$

Отметим еще, что если частота $\omega^{(1)}$ достаточно велика ($dv^\circ / d\xi$ мало), то вторым членом в (1.7) можно пренебречь. При этом u' зависит от y, а (1.7) является частным случаем «геометрико-акустического» решения (2.7) (с учетом разного выбора направлений распространения волн).

§ 2. **Геометрическая акустика нестационарных сред.** Предположим теперь, что изменение параметров среды соответствует некоторому произвольному движению, причем в общем случае присутствует еще поле тяжести $g\,(x, t)$, а среда может находиться в трубке с переменной площадью сечения $\Delta(x, t)$ (тогда x отсчитывается вдоль оси трубки). Последнее допущение позволяет обобщить решение на трехмерный случай (см. ниже), а также, например, рассмотреть важную для ряда приложений задачу о продольном движении проводящей плазмы в сильном магнитном поле **H** (если $p \ll p_m = H^2 / 8\pi$, то, благодаря вмороженности, движение происходит вдоль силовой трубки **H**). При сделанных предположениях правые части первого и второго уравнений (1.1) равны соответственно g и $-(\partial\Delta / \partial t + u\partial\Delta / \partial x)\rho / \Delta$.

Рассмотрим распространение коротких волн, характерные протяженности которых в пространстве λ и времени τ малы по сравнению с соответствующими масштабами L и T изменения параметров среды. Воспользуемся снова преобразованием (1.2), где u_0 и ρ_0 — параметры невозмущенной (по отношению к рассматриваемой волне) среды — являются теперь медленными функциями x и t, а интеграл в (1.3) берется при постоянном S. Исходные уравнения дают тогда для φ и ψ

$$\begin{gathered} c\frac{\partial\psi}{\partial x} - \varphi = g + \frac{cc_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial x} - c\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S} - c\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial S}\,d\rho\right) \\ \frac{D\psi}{Dt} - \varphi = \frac{c_0}{\rho_0}\frac{D\rho_0}{Dt} - \frac{Du_0}{Dt} + \frac{c}{\Delta}\frac{D\Delta}{Dt} \qquad \left(c_0 = c\,(\rho_0, S),\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнения (2.1) являются точным следствием исходной системы (1.1). В данном параграфе ограничимся линейной задачей, когда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $u = u_0 + u'$ и т. д., где ρ', u' — малы. Представим также φ в виде $\varphi_0 + \varphi'$, где φ_0— медленная функция, равная, согласно (1.2), $(du_0 / dt)_+$. Исключая ψ из (2.1) дифференцированием (непосредственное определение ψ в данном приближении не понадобится), получим

$$\begin{gathered} \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)_- = \frac{\partial\varphi'}{\partial t} + (u_0 - c_0)\frac{\partial\varphi'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x}\left\{\frac{\partial\rho_0 c_0}{\partial\rho_0}\left(\frac{c_0}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + \frac{c_0^2}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \frac{\rho_0}{\Delta}\frac{\partial c_0}{\partial\rho_0}\frac{D\Delta}{Dt} + c_0\frac{\partial c_0}{\partial S_0}\frac{\partial S_0}{\partial x}\right\} = f\,(x, t)\frac{\partial u'}{\partial x} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь отброшены нелинейные члены и учтено, что возмущение энтропии имеет второй порядок малости относительно u'. Через f обозначена медленная функция, стоящая в фигурных скобках.

Если φ' известно, искомая функция u' определяется линеаризованным уравнением (1.2)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + v_0\frac{\partial u'}{\partial x} = \varphi' - \frac{1}{c_0}\frac{\partial c_0\rho_0}{\partial\rho_0}\frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) можно проинтегрировать, отыскивая φ' в виде $a\,(x, t)\,u'$, где - медленная функция. Тогда, с точностью до малых величин

$$\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)_- = a\left(\frac{du'}{dt}\right)_- = -2ac_0\frac{\partial u'}{\partial x}$$

юследнее ясно из уравнения (2.3), правая часть которого, очевидно, мала при медıном изменении параметров). Поэтому

$$\varphi' = -\frac{f(x, t)}{2c_0}u' \qquad (2.4)$$

Учитывая (2.4), можно проинтегрировать и уравнение (2.3). Если $\delta\,(x, t)$ есть теграл уравнения $dx\,/\,dt = v_0$, определяющего c_+-характеристику невозмущенной стемы, то общий интеграл (2.3) имеет вид

$$\delta\,(x, t) = t - \int^{c+}\frac{dx}{v_0\,(x, t)} = F\left(\frac{u'}{q}\right), \qquad q = \left(\frac{c_0}{\Delta\rho_0 v_0^2}\right)^{1/2}\exp\left(\int^{c+}\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t}\,dt\right) \qquad (2.5)$$

(q — медленный множитель, определяющий изменение u' на характеристике). я стационарно движущейся или неподвижной среды (2.5) совпадает с известными пениями в приближении геометрической акустики. Следует отметить, что решение 5) справедливо и в трехмерном случае, если отождествить Δ с площадью сечения элетарной фазовой трубки, образованной нормалями $\mathbf{n}$ к фронту волны (которая вижущейся среде отлична от лучевой трубки). Этот факт следует из параллельности кторов $\mathbf{n}$ и u' и в стационарном случае подтверждается полученными ранее решения- [2, 7].

Пользуясь (2.5), можно определить изменение длительности τ волны (импульса) времени и ее полной энергии E (в стационарной среде эти величины, очевидно, поэянны). Величина τ представляет собой временной интервал между двумя ограничивающими волну характеристиками (2.5). Учитывая, что за время τ величина v_0 меняется мало, нетрудно показать, что

$$\tau + \int^{c+}\frac{\tau}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t}\,dt = \tau_1, \quad \text{или} \quad \tau = \tau_1\exp\left(-\int^{c+}\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t}\,dt\right) \qquad (2.6)$$

э τ_1 — начальное значение τ.

Так как плотность энергии волны равна [7]

$$e = \frac{v_0}{c_0}\rho_0 u'^2 \qquad (2.7)$$

полная энергия импульса

$$E = e\tau v_0 = E_1\exp\left(\int^{c+}\frac{1}{v_0}\frac{\partial v_0}{\partial t}\,dt\right) \qquad (2.8)$$

следовательно,

$$E\tau = \text{const} \qquad (2.9)$$

Таким образом, с увеличением v_0 во времени длительность импульса убывает, энергия растет (это относится также к любому периоду квазигармонической волны). еличина $E\tau$ является адиабатическим инвариантом в том же смысле, что и для істем с конечным числом степеней свободы.

§ 3. Нелинейные движения. Результаты предыдущего параграфа нетрудно обобить на слабонелинейный случай, когда u', ρ' конечны, так что деформации волны, бусловленные нелинейными эффектами и изменением параметров среды, проявляются в сравнимых интервалах.

При учете малых квадратичных относительно u' величин выражение (2.4) для φ' стается в силе, поскольку правая часть (2.3) уже мала ввиду медленности изменения параметров. В левой же части следует заменить

$$v_0 \to v \approx v_0 + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho_0 c_0}{\partial \rho_0} u'$$

Тогда вместо (2.7) получим

$$\delta (x, t) + \frac{u'}{q} \int^{c+} \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho_0 c_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial \delta}{\partial t} q \, dt = F \left(\frac{u'}{q} \right) \qquad (3$$

Для стационарного случая (при этом $\partial \delta / \partial t = 1$) решение (3.1) также совпад (с учетом сделанного выше замечания о трехмерной задаче) с полученными ра результатами [5].

Формула (3.1) позволяет, в частности, рассмотреть вопросы, связанные с возн новением и развитием ударных волн. Значения x_*, t_*, u_*', соответствующие обра ванию разрыва, определяются, как обычно, условиями $\partial t / \partial u' = 0$, $\partial^2 t / \partial u'^2 = ($ Тогда из (3.1) найдем

$$\int^{c+} \frac{q}{v_0 c_0} \frac{\partial c_0 \rho_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial \delta}{\partial t} dt = \frac{dF}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2 F}{d\alpha^2} = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{u'}{q} \right) \qquad (3$$

где α — величина, сохраняющаяся на c_+-характеристике.

Отметим, что если подынтегральное выражение в (3.2) убывает настолько быст что интеграл остается конечным при $t_* \to \infty$, то разрыв может не возникнуть вооб даже в волне сжатия. Нетрудно видеть, что эта особенность не является специфичес для нестационарных задач. Пусть, например, в стационарно движущемся идеальн газе возникает синусоидальное возмущение, т. е. $u'(0, t) = u^m \sin \omega t$ (очевидно, статочно рассматривать один период синусоиды); тогда из (3.2) следует

$$\frac{\gamma + 1}{2} u^m \omega \left(\frac{\Delta_0 \rho_{00} v_{00}^2}{c_{00}} \right)^{1/2} \int_0^{x_*} \frac{dx}{v_0^3 (\Delta \rho_0 / c_0)^{1/2}} = 1, \qquad u_*' = 0 \qquad (3$$

где γ — показатель адиабаты, $\rho_{00} = \rho_0(0)$, и т. д. Для плоской волны, распространя щейся в однородном поле тяжести в покоящейся изотермической атмосфере, отсю имеем

$$x_* = X_* \frac{\gamma (\gamma + 1) \omega u^m}{g} \ln \left[\left(1 - \frac{g}{\gamma (\gamma + 1) \omega u^m} \right)^{-1} \right] \qquad \left(X_* = \frac{2 c_0^2}{(\gamma + 1) \omega u^m} \right) \qquad (3.$$

Здесь X_* — расстояние, соответствующее образованию разрыва в однородн среде (при $g = 0$). Из (3.3) следует, что при $g > 0$ (распространение к центру тяжес $x_* > X_*$, т. е. неоднородность газа препятствует образованию разрыва. Ес $\gamma (\gamma + 1) \omega u^m > g$, то разрыв вообще не возникает [2]. Наоборот, при $g < 0$ (распро ранение от центра тяжести) $x_* < X_*$, и разрыв может возникнуть значительно быстр чем в однородной среде [3]. Причиной этого является изменение на характеристик величины u', а вместе с ней разности скоростей распространения различных точ профиля волны.

После образования разрыва волна вне его остается, как известно, простой с то ностью до величин третьего порядка малости. Если перед разрывом возмущение с

[1] Если разрыв возникает на границе с невозмущенной средой, то вместо второ условия следует [3] положить $u' = 0$.

[2] Аналогичный вывод справедлив для сходящейся сферической волны в централ ном поле тяжести ($\Delta \sim x^2$, $g \sim x^{-2}$), даже если не учитывать возникающих вбли центра (при $x \leqslant \lambda$) отражений.

[3] Последнее обстоятельство существенно для ряда астрофизических приложени

ствует, то, дифференцируя (2.4) по α вдоль траектории ударной волны, получим авнение, определяющее изменение ее величины α_s

$$\int^{c+} \frac{q}{v_0 c_0} \frac{\partial \rho_0 c_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{2}{\alpha_s^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_s} \alpha \frac{dF}{d\alpha} d\alpha \qquad (3.5)$$

В случае импульса конечной длительности интеграл

$$B(\alpha_s) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_s} \alpha \, dF(\alpha)$$

равой части (3.5) не может быть больше конечной величины, равной $B(0)$. Если теграл в левой части (3.5) расходится при $t \to \infty$ (как в однородной среде), то α неаниченно убывает, а $B \to B(0)$; при этом профиль импульса за разрывом на льших расстояниях стремится к линейному. Имеется, однако, и другая возможть, когда указанный интеграл остается конечным при $t \to \infty$ (ср. (3.1)). В этом слу α стремится к конечному пределу, и B не достигает значения $B(0)$; тогда профиль пульса при $t \to \infty$ не является линейным.

Как уже указывалось, энергия волны в нестационарной среде может возрастать счет энергии движения «невозмущенной» среды. При определенных условиях это растание происходит быстрее, чем диссипация энергии в ударной волне (по край мере на конечных интервалах), так что полная энергия импульса может расти ке при наличии разрыва.

Заметим в заключение, что изложенный метод позволяет рассмотреть аначные задачи, относящиеся к распространению магнитогидродинамических и ктромагнитных [8] волн в средах с переменными свойствами.

В некоторых случаях имеется прямая математическая аналогия между уравиями звуковых и электромагнитных волн в таких средах [9].

Автор весьма признателен А. В. Гапонову, С. А. Каплану и О. С. Рыжову за инес к работе и обсуждение результатов.

Поступила 13 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

Б л о х и н ц е в Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1946.

K e l l e r J. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, No 8.

Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1953.

W h i t h a m G. B. The Propagation of Weak Spherical Shocks in Stars. Comm. Pure Appl. Math., 1953, v. VI, No 3.

Г у б к и н К. Е. Нелинейная геометрическая акустика. Сб. Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961.

Р ы ж о в О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.

Р ы ж о в О. С., Ш е ф т е р Г. М. Об энергии звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах. ПММ, 1962, т. XXIV, вып. 5.

О с т р о в с к и й Л. А. Электромагнитные волны в неоднородной нелинейной среде с малыми потерями. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1961. т. IV, № 5.

С т е п а н о в Н. С. Об одном параметрическом явлении в акустике. Акуст. ж., 1962, т. VIII, вып. 1.