О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Л. И. Слепян
(Ленинград)

Решается задача о перемещении деформируемого тела под действием нестационарной акустической волны произвольной формы.

Сделаны некоторые общие выводы о влиянии свойств среды и деформаций тела на его окончательные (время $t = \infty$) перемещения.

Показано, в частности, что окончательные перемещения тела, погруженного в вязкую жидкость, не зависят от его плавучести.

В. В. Новожиловым исследована задача о перемещении погруженного в жидкость тела произвольной формы под действием акустической волны давления [1].

Задача решена при следующих предпосылках: тело абсолютно твердое, жидкость идеальная, волна давления плоская.

Ниже выясняется, какое влияние на перемещение тела оказывают его деформируемость и (не зависящие от времени) свойства акустической среды (например, вязкость жидкости). Предположений о форме волны, вообще говоря, не делается.

Линейность задачи позволяет представить уравнения движения тела в проекциях на его главные центральные оси инерции следующим образом:

$$M_{ii}\ddot{u}_{*i} + Q_i = P_i \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{1}$$

Здесь M_{ii} — масса (момент инерции) тела, $\ddot{u}_{*i}$ — ускорение центра инерции тела (отношение момента сил инерции к моменту инерции — угловое ускорение деформируемого тела), P_i — сила (момент), с которой распространяющаяся в среде волна воздействует на абсолютно твердое несмещаемое тело, Q_i — дополнительная сила (момент) взаимодействия тела со средой, вызванная смещением тела (точнее, смещением и деформацией поверхности тела); точка означает дифференцирование по времени t.

Сила (момент) Q_i определяется интегралом по поверхности тела S от скалярного произведения давления $\mathbf{q}$, вызванного смещением тела, на единичный вектор $\mathbf{v}_i$, совпадающий с направлением соответствующей оси (векторную функцию смещений точек поверхности недеформированного тела при его единичном повороте вокруг соответствующей оси)

$$Q_i = \iint\limits_{(S)} \mathbf{q}(x, y, t)\cdot\mathbf{v}_i(x, y)\, ds \tag{2}$$

Здесь x, y — координаты на поверхности, t — время.

Зависимость обобщенной силы Q_i от перемещения поверхности может быть выражена в явном виде. Чтобы сделать это, целесообразно представить перемещение поверхности в следующей форме

$$\mathbf{w}(x, y, t) = \sum_k u_k(t)\, \mathbf{v}_k(x, y) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Здесь $\{\mathbf{v}_k(x, y)\}$ — достаточно полная система векторных функций, причем при $k = 1, \ldots, 6$ эти функции совпадают с определенными выше функциями $\mathbf{v}_i$, т. е. соответствуют перемещениям поверхности в целом, а остальные ($k = 7, 8\ldots$) выражают деформации поверхности; $u_k(t)$ — обобщенная координата. При отсутствии деформаций $u_k = u_{*k}$ при $k = 1, 2, \ldots, 6$, $\quad u_k = 0$, при $k = 7, 8\ldots$

Пусть поверхность тела перемещается или деформируется так, что обобщенная координата u_k растет с единичной скоростью

$$\dot{u}_k = 1 \quad \text{при } t > 0, \qquad u_k = 0 \qquad \text{при } t < 0$$

$u_m = 0$ *при* $m \neq k$.

При этом на поверхности тела, вообще говоря, возникает давление с составляющими по всем направлениям $\mathbf{v}_i$. Соотношение (2) определит обобщенную силу $F_{ik}(t)$, соответствующую этим условиям.

Вследствие линейности задачи обобщенная сила $Q_i(t)$, возникающая при произвольном смещении поверхности, определится равенством, непосредственно вытекающим из принципа суперпозиции,

$$Q_i(t) = \sum_k Q_{ik}(t) = \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\, \ddot{u}_k(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

Здесь и далее предполагается, что $u_k = 0$ при $t \leqslant 0$, а $\ddot{u}_k$, вообще говоря, включают импульсивные функции (в частности, если $\lim u_k \neq 0$ при $t \to +0$).

Зависимость обобщенных сил P_i от параметров волны также может быть представлена при помощи функций F_{ik}.

Получить такую зависимость позволяет рассмотрение движения части среды, ограниченной (мысленно) поверхностью тела.

Динамическое равновесие полученного таким образом «фиктивного тела» можно описать уравнениями, аналогичными уравнениям (1).

Если при этом фиктивное тело расположено на месте исследуемого, а динамическое равновесие его рассматривается относительно выбранных выше осей, то составляющие внешнего воздействия на несмещаемую поверхность и функции F_{ik} для фиктивного тела будут теми же, что и для исследуемого [1], и уравнения будут иметь вид

$$\sum_n M_{ni}^\circ\, \ddot{u}_{*n}^\circ + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\, \ddot{u}_k^\circ(\tau) d\tau = P_i \tag{5}$$

Здесь M_{ni}° — масса, статический момент, момент инерции фиктивного тела относительно указанных осей; верхний индекс $^\circ$ означает принадлежность к фиктивному телу.

Момент сил инерции представлен здесь суммой моментов, возникающих вследствие обобщенных перемещений u_{*n}° как при $n = i$, так и при $n \neq i$, поскольку оси, относительно которых рассматривается динамическое равновесие фиктивного тела, вообще говоря, не являются для него главными центральными осями инерции.

Фиктивное тело не вносит возмущений в распространяющуюся по среде волну. Поэтому необходимые данные о его смещении (u_k°, u_{*i}°) могут быть получены интегрированием соответствующим образом спроектированных смещений среды по поверхности и объему тела.

Таким образом, уравнения (5) можно рассматривать как равенства, определяющие силы P_i.

На основании соотношений (4) и (5) уравнения движения тела (1) могут быть записаны в следующем виде

$$M_{ii}\, \ddot{u}_{*i} + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\, \ddot{u}_k(\tau)\, d\tau = \sum_n M_{ni}^\circ\, \ddot{u}_{*n}^\circ + \sum_k \int_0^t F_{ik}(t-\tau)\, \ddot{u}_k^\circ(\tau)\, d\tau \tag{6}$$

Анализ уравнений (6) позволяет сделать некоторые общие выводы об окончательных перемещениях тела.

Преобразование Лапласа приводит уравнения (6) к виду

$$M_{ii}\, p^2 u_{*i}^+ + \sum_k F_{ik}^+ p^2 u_k^+ = \sum_n M_{ni}^\circ\, p^2 u_{*n}^{\circ+} + \sum_k F_{ik}^+ p^2 u_k^{\circ+} \tag{7}$$

---

[1] Предполагается, что тело не «отделено» от среды. Если тело находится в твердой упругой среде или в реальной жидкости, перемещения среды на поверхности тела совпадают с перемещениями тела. В случае идеальной жидкости это относится к нормальным перемещениям.

где смысл индекса $^+$ и параметра p определяется соотношением

$$\int_0^\infty \Phi(t)\, e^{-pt}\, dt = \Phi^+(p)$$

Чтобы из уравнений (7) получить величины окончательных перемещений тела, достаточно воспользоваться формулой [2]

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \Phi_\infty = \lim_{p\to 0} p\Phi^+(p) \tag{8}$$

справедливой, если предел (не обязательно ограниченный) в ее левой части существует и выполняется условие

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t)\, e^{-pt} = 0 \qquad \text{при } p > 0$$

Если предположить, что волна внешних возмущений ограничена во времени или затухает, а среда безгранична, можно утверждать, что перемещения тела будут удовлетворять указанным условиям.

Действительно, излучение волн возмущений при колебаниях тела в безграничной среде вызывает затухание колебаний. Поэтому если колебания тела и будут иметь место, то с прекращением действия внешних возмущений они должны затухать, и, следовательно, перемещения тела будут стремиться к пределу. Кроме того, ограниченность внешнего воздействия исключает экспоненциальный рост перемещений тела при $t \to \infty$.

Характер зависимости окончательных перемещений тела от окончательных перемещений фиктивного тела (перемещений среды в отсутствие тела), как это следует из соотношений (7) и (8), существенным образом зависит от поведения функций $F_{ik}^+(p)$ при $p \to 0$ ($F_{ik}(t)$ при $t \to \infty$).

В случае тела ограниченных размеров в зависимости от свойств (безграничной) среды можно следующим образом классифицировать функции F_{ik}.

1. *Идеальная жидкость.* Пусть при $t > 0$ тело движется (деформируется) в безграничной идеальной жидкости с единичной скоростью $\dot{u}_k = 1$ ($u_k = 0$ при $t < 0$). По прошествии достаточно большого времени, когда обтекание установится, сжимаемость жидкости уже не будет влиять на поле скоростей в достаточно большой окрестности тела, и количество движения жидкости будет характеризоваться присоединенными массами m_{ik}. Движение жидкости создается силами F_{ik} при $\dot{u}_k = 1$, поэтому имеем

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t F_{ik}(\tau)\, d\tau = m_{ik} \tag{9}$$

Итак, в случае идеальной жидкости функции F_{ik} интегрируемы, а применение формулы (8) дает

$$\lim_{p\to 0} F_{ik}^+(p) = \int_0^\infty F_{ik}(\tau)\, d\tau = m_{ik} \tag{10}$$

2. *Реальная жидкость.* Равномерное движение в реальной жидкости будет встречать сопротивление трения α_{ik}, имеем

$$\lim_{t\to\infty} F_{ik}(t) = \alpha_{ik} \tag{11}$$

Можно утверждать, что $\alpha_{ii} > 0$. Кроме того, очевидно, что все сопротивления α_{ik} ограничены.

В соответствии с формулой (8)

$$\lim_{p\to 0} pF_{ik}^+ = \alpha_{ik} \tag{12}$$

3. *Твердая упругая среда.* Из соотношения

$$Q_{ik}^{+} = pF_{ik}^{+}\, pu_k^{+} = (\dot{F}_{ik})^{+} (\dot{u}_k)^{+} \tag{13}$$

видно, что $\dot{F}_{ik}$ — обобщенная сила, возникающая при единичном смещении $u_k = 1$ при $t > 0$ ($u_k = 0$ при $t < 0$).

В случае твердой упругой среды предел этой силы ($t \to \infty$) β_{ik} отличен от нуля по крайней мере при $k = i$. При этом $\beta_{ii} > 0$. Кроме того, очевидно, что все жесткости β_{ik} ограничены.

Формула (8), примененная к $\dot{F}_{ik}$, дает следующую зависимость

$$\lim_{p\to 0} p^2 F_{ik}^{+} = \beta_{ik} \tag{14}$$

Теперь можно рассмотреть предельные ($p \to 0$) соотношения, вытекающие из системы (7) и определяющие окончательные перемещения тела.

Если умножить все члены уравнений (7) на p^q, где $q = -1, 0, 1$ соответственно рассмотренным выше случаям, и устремить p к нулю, предельные соотношения будут иметь вид

$$1^\circ. \qquad M_{ii}\, u_{i\infty} + \sum_{k=1}^{6} m_{ik}\, u_{k\infty} + [M_{ii}\,(u_{*i\infty} - u_{i\infty})] + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}\, u_{k\infty}\Big] = \tag{15}$$

$$= \sum_{n} \mathring{M}_{ni}\, \mathring{u}_{n\infty} + \sum_{k=1}^{6} m_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty} + \Big[\sum_{n} \mathring{M}_{ni}\,(\mathring{u}_{*n\infty} - \mathring{u}_{n\infty})\Big] + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty}\Big]$$

$$2^\circ. \qquad \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik}\, u_{k\infty} + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik}\, u_{k\infty}\Big] = \sum_{k=1}^{6} \alpha_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty} + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty}\Big] \tag{16}$$

$$3^\circ. \qquad \sum_{k=1}^{6} \beta_{ik}\, u_{k\infty} + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik}\, u_{k\infty}\Big] = \sum_{k=1}^{6} \beta_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty} + \Big[\sum_{k=7}^{\infty} \beta_{ik}\, \mathring{u}_{k\infty}\Big] \tag{17}$$

Здесь члены в квадратных скобках соответствуют остаточным деформациям тела (в левых частях уравнений) и фиктивного тела (в правых).

Рассмотрение этих соотношений позволяет сделать следующие выводы.

1) Упругие деформации не влияют на окончательные перемещения.

Действительно, все коэффициенты M_{ii}, m_{ik}, α_{ik}, β_{ik} ограничены, а остаточные деформации равны нулю, поэтому равны нулю и члены, им соответствующие.

2) В случае, если функции F_{ii} не интегрируемы (реальная жидкость, твердая упругая среда), масса тела и деформации внутри тела не влияют на окончательные перемещения его поверхности.

Этот вывод является следствием уравнений (16) и (17), в которые обобщенные массы тела не входят.

3) Если деформации обоих тел упругие, главные центральные оси и массы (моменты инерции) их соответственно совпадают, окончательные перемещения тела равны окончательным перемещениям фиктивного тела (среды в отсутствие тела).

Деформации фиктивного тела будут упругими, например, в случае плоской волны, когда все частицы среды перемещаются на одно и то же расстояние.

4. Как следует из систем (16) и (17), окончательные перемещения поверхности тела в реальной жидкости, или в твердой упругой среде, совпадают с окончательными перемещениями поверхности фиктивного тела, если только деформации поверхностей обоих тел (u_k и u_k^0 при $k = 7, 8, \ldots$) упругие.

Обращает на себя внимание принципиальное отличие систем (16) и (17) от системы (15). В них отсутствуют члены, содержащие обобщенные массы тела (что и позволило сделать выводы 2 и 4). Это отличие обусловлено физической сущностью уравнений.

Уравнения (17) представляют собой уравнения обобщенных сил ($t = \infty$). Правой частью уравнений представлены силы, действующие на несмещаемое тело вследствие смещения среды, левой — необходимые для смещения тела в невозмущенной среде. Равенство этих сил становится очевидным, если учесть, что первое состояние может быть получено путем перемещения тела из конечного положения в первоначальное.

Очевидно также, что масса тела никакого влияния на эти силы, обусловленные упругостью твердой среды, не оказывает.

Менее очевидно аналогичное положение в случае реальной жидкости. Уравнения (16) представляют собой равенства интегралов по времени от обобщенных сил — равенства окончательных импульсов

$$\int_0^\infty Q_{ik}(t)\,dt$$

В случае реальной жидкости импульсы, необходимые для смещения тела (левая часть уравнений) или удержания его (правая) оказываются конечными и отличными от нуля. Импульс же сил инерции массы тела, необходимый для его перемещения из одного состояния покоя в другое, равен нулю. Поэтому обобщенные массы тела не оказывают влияния на его окончательные перемещения и не входят в систему (16). То же относится и к присоединенным массам.

В этом смысле реальная жидкость оказывается ближе к твердой упругой среде, чем к идеальной жидкости.

В случае идеальной жидкости окончательные импульсы равны нулю. Уравнения (15) представляют собой равенства интегралов от импульсов

$$\int_0^\infty \int_0^t Q_{ik}(\tau)\,d\tau dt$$

Эти величины для сил инерции массы тела и жидкости (присоединенной массы) оказываются конечными и отличными от нуля.

Вследствие этого обобщенная масса тела и присоединенные массы входят в систему (15) и влияют на окончательные перемещения тела.

Пусть упругое тело обладает такой симметрией, что под действием плоской волны в идеальной жидкости все его обобщенные перемещения, кроме одного, равны нулю. При этом из уравнений (15) следует формула В. В. Новожилова [1]

$$u_\infty = \frac{M^\circ + m}{M + m} u_\infty^\circ \tag{18}$$

которая оказывается, таким образом, справедливой и для упругого тела.

Из формулы (18) видно, что окончательное перемещение упругого тела под действием плоской волны в идеальной жидкости зависит от его плавучести.

При положительной плавучести ($M < M^\circ$) оно больше, а при отрицательной ($M > M^\circ$) меньше перемещения частиц жидкости.

Вместе с тем, как установлено выше, перемещение тела при тех же условиях, но в реальной жидкости, не зависит от его массы и всегда равно перемещению частиц жидкости.

В связи с этим может возникнуть вопрос о применимости формулы (18) для реальных условий. Ответ на этот вопрос следующий.

Пусть в идеальной жидкости за время T тело достигает перемещения, достаточно близкого к окончательному, и в дальнейшем не выходит из пренебрежимо малой его окрестности.

Если вязкость реальной жидкости достаточно мала или размеры тела достаточно велики, так что силы инерции, возникающие при перемещении тела в период $0 < t < T$, существенно преобладают над силами трения, формула (18) применима. Она дает значение окончательных перемещений именно в этот период, характеризующийся преобладанием сил инерции. Однако при $t \to \infty$ перемещение тела в реальной жидкости стремится к перемещению частиц жидкости независимо от его плавучести. Поэтому в дальнейшем ($t > T$), хотя бы и медленно (при малом трении), тело положительной плавучести, получив большее, чем жидкость, перемещение, возвратится назад настолько, что его перемещение сравняется с перемещением частиц жидкости. Также и тело отрицательной плавучести в конце концов достигает перемещения, равного перемещению частиц жидкости.

Сказанное можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть абсолютно твердое тело, масса которого M, перемещается в реальной несжимаемой (для простоты) жидкости в одном направлении, а функции, определяющие перемещение среды и взаимодействие тела со средой, имеют вид

$$F = m\delta_1(t) + \alpha, \qquad \dot{u}_*^\circ = \dot{u}^\circ = \delta_0(t) - \delta_0(t-1)$$

$$\delta_0(z) = 0 \quad \text{при } z < 0, \qquad \delta_0(z) = 1 \quad \text{при } z > 0$$

$$\dot{\delta}_0(z) = \delta_1(z), \qquad \int_0^a \delta_1(z)\,dz = 1 \quad \text{при } a > 0, \qquad \delta_1(z) = 0 \quad \text{при } z \neq 0$$

Здесь m — присоединенная масса, α — коэффициент трения. Окончательное перемещение частиц жидкости при этом

$$u_\infty^\circ = 1 \quad (u^\circ(t) = u_\infty^\circ = 1 \text{ при } t \geqslant 1)$$

Приведенные данные позволяют получить из системы (6) следующее уравнение движения тела

$$(M + m)\ddot{u} + \alpha\dot{u} = (M^\circ + m)[\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] + \alpha[\delta_0(t) - \delta_0(t-1)] \tag{19}$$

Решением этого уравнения будет ($t > 0$)

$$u = \frac{M^\circ + m}{\alpha}\left[1 - e^{-\nu t} - (1 - e^{-\nu(t-1)})\,\delta_0(t-1)\right] + t - \frac{1}{\nu}(1 - e^{-\nu t}) - \left[t - 1 - \frac{1}{\nu}(1 - e^{-\nu(t-1)})\right]\delta_0(t-1) \qquad \left(\nu = \frac{\alpha}{M + m}\right) \tag{20}$$

Эту зависимость можно представить в виде ряда ($t \geqslant 1$)

$$u = \frac{M^\circ + m}{M + m} + \frac{M - M^\circ}{M + m}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\nu^n\,\frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{21}$$

Видно, что при $\nu T \ll 1$, где T может быть достаточно большим при достаточно малом трении, перемещение тела в период $1 \leqslant t \leqslant T$ определяется первым членом выражения (21), т. е. формулой (18).

Однако при дальнейшем увеличении времени t, как видно из равенства (21), перемещение тела u уменьшается, если $M < M^\circ$ и увеличивается, если $M > M^\circ$ и, как это следует из выражения (20),

$$\lim u = u_\infty = 1 = u_\infty^\circ \quad \text{при } t \to \infty$$

Поступила 25 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
2. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехтеоретиздат, 1951.