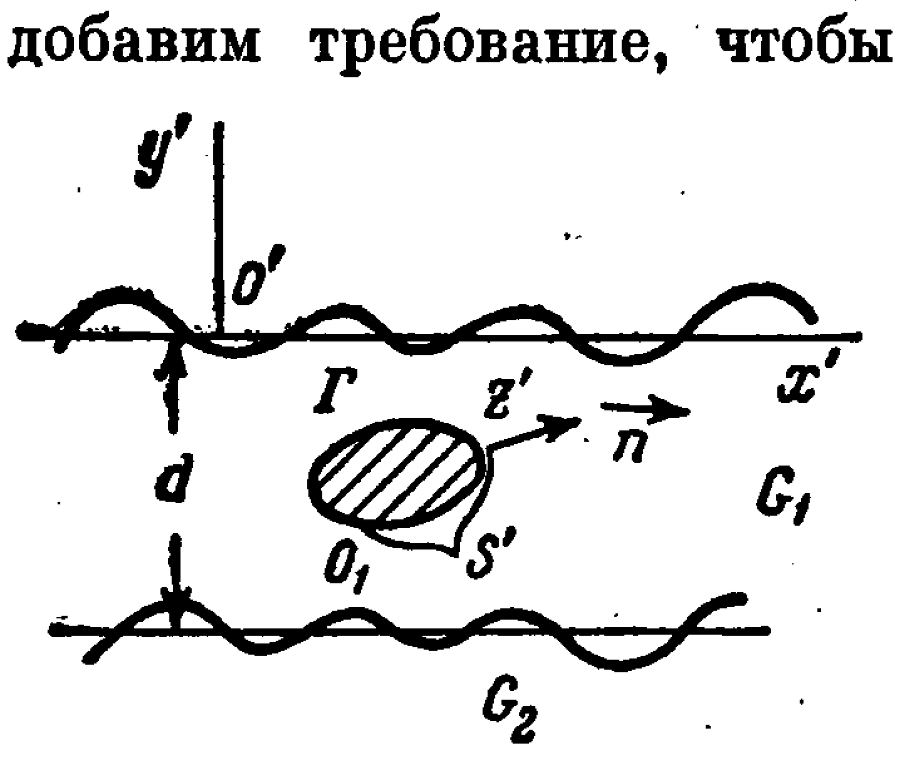
О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

В. С. Войценя (*Ейск*)

Н. Е. Кочиным [1] была решена плоская линейная задача о волнах на свободной поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины, вызываемых колебаниями погруженного в жидкость тела. М. Д. Хаскинд [2] методом Кочина [1] исследовал подобную же задачу для конечной глубины жидкости. В работе [3] методом Кочина изучался случай, когда над жидкостью бесконечной глубины, в которой колеблется тело, лежит слой другой, более легкой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью. Ниже изучается аналогичная задача для колебаний тела в верхнем слое жидкости.

§ 1. Постановка задачи. Пусть контур тела Г произвольной формы совершает периодические колебания в слое однородной несжимаемой жидкости плотности ρ_1 конечной толщины d, который лежит над другой жидкостью плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) бесконечной глубины (фиг. 1). К обычным предположениям линейной теории волн добавим требование, чтобы волны расходились от тела горизонтально в обе стороны.



Фиг. 1

В силу линейности задачи рассмотрим лишь гармонические колебания контура Г с заданной частотой k

$$v_n'(s', t') = u_1'(s') \cos kt' + u_2'(s') \sin kt' \tag{1.1}$$

где v_n' — нормальная составляющая скорости произвольной точки контура Г, которой соответствует дуга s', отсчитываемая от некоторой фиксированной точки O_1 на Г. Тогда, полагая колебания жидкостей установившимися и потенциальными, имеем комплексные потенциалы скоростей в виде $(z' = x' + iy')$

$$W_j'(z', t') = w_{j1}'(z') \cos kt' + w_{j2}'(z') \sin kt' \tag{1.2}$$

Здесь и дальше $j = 1$ и $j = 2$ для верхней и нижней жидкостей соответственно. Переходя к безразмерным величинам по формулам

$$z' = zd, \quad t' = \frac{t}{k}, \quad w_{jm}' = w_{jm} kd^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho_0, \quad \frac{k^2 d}{g} = \nu \tag{1.3}$$

получаем следующую задачу для функций $\bar{v}_{jm}(z) = dw_{jm}(z) / dz$.

Найти функции $\bar{v}_{1m}(z)$ и $\bar{v}_{2m}(z)$, аналитические в соответствующих областях G_1 и G_2 (G_1 — область в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 0$ вне контура Г, G_2 — полуплоскость $\operatorname{Im} z < -1$) и удовлетворяющие условиям:

1.1. $\operatorname{Im}\left[\dfrac{d\bar{v}_{1m}}{dz} + i\nu\bar{v}_{1m}\right] = 0$ при $y = 0$

1.2. $\operatorname{Im}[\bar{v}_{1m} - \bar{v}_{2m}] = 0$ при $y = -1$

1.3. $\operatorname{Im}\left[\left(\dfrac{d\bar{v}_{1m}}{dz} + i\nu\bar{v}_{1m}\right) - \rho_0\left(\dfrac{d\bar{v}_{2m}}{dz} + i\nu\bar{v}_{2m}\right)\right] = 0$ при $y = -1$

1.4. Функции $\bar{v}_{jm}(v)$ ограничены в G_j и $\bar{v}_{2m}(z) \to 0$ при $y \to -\infty$.

1.5. Волны на свободной границе и на границе раздела расходятся в обе стороны от контура тела Г.

1.6. $\operatorname{Re}[\bar{v}_{1m} e^{i\theta}] = u_m(s)$ на Г

Здесь θ — угол между внешней нормалью $\mathbf{n}$ к контуру Г и осью x.

На основании (1.2) и (1.3) имеем для комплексных скоростей жидкостей

$$\bar{v}_j(z, t) = dW_j/dz = \bar{v}_{j1}(z) \cos t + \bar{v}_{j2}(z) \sin t \tag{1.4}$$

Свободную границу и границу раздела найдем по формулам

$$\begin{aligned} \delta_1(x, t) &= -\operatorname{Im}[\bar{v}_{11}(z) \cos t - \bar{v}_{12}(z) \sin t]_{y=0} \\ \delta_2(x, t) &= -\operatorname{Im}\,]\bar{v}_{21}(z) \cos t - \bar{v}_{22}(z) \sin t]_{y=1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

§ 2. Построение решения. 1°. Представим искомые функции $\bar v_{jm}(z)$ в виде

$$\bar v_{jm}(z) = \Omega_{jm}(z) + F_{jm}(z) \tag{2.1}$$

где $\Omega_{jm}(z)$ — функции, аналитические в своих областях G_j и удовлетворяющие условиям 1.1 — 1.4, а функции $F_{1m}(z)$ и $F_{2m}(z)$ являются аналитическими соответственно в областях G_1' и G_2 (G_1' — полоса $-1 < \operatorname{Im} z < 0$) и также удовлетворяют условиям 1.1 — 1.4. Условиям же 1.5 и 1.6 должны удовлетворять не отдельно функции $\Omega_{jm}(z)$ и $F_{jm}(z)$, а их суммы $\bar v_{jm}(z)$ из равенства (2.1).

2°. Найдем функции $\omega_{jm}(z)$ со следующими свойствами. Функции $\omega_{1m}(z)$ — аналитические в области G_1' всюду, кроме точки $\zeta = \xi + i\eta$, где они имеют полярную особенность с вычетом $N_m = N_m' + iN_m''$; функции $\omega_{2m}(z)$ — аналитические в G_2; функции $\omega_{1m}(z)$ и $\omega_{2m}(z)$ удовлетворяют условиям 1.1 — 1.4.

Выделим особенность в точке ζ, положив

$$\omega_{1m}(z) = \tau_{1m}(z) + \varepsilon_m(z), \qquad \varepsilon_m(z) = \frac{N_m}{z-\zeta} + \frac{\bar N_m}{z-\bar\zeta} \tag{2.2}$$

Тогда функции $\tau_{1m}(z)$ и $\omega_{2m}(z)$ будут аналитическими в областях G_1' и G_2 соответственно, а их реальные части $\mu_{jm}(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\mu_{1m}}{\partial y} - \nu\mu_{1m} = f_{1m}(x) \quad \text{при } y = 0, \qquad \frac{\partial\mu_{1m}}{\partial y} - \frac{\partial\mu_{2m}}{\partial y} = f_{2m}(x) \quad \text{при } y = -1$$
$$\left(\frac{\partial\mu_{1m}}{\partial y} - \nu\mu_{1m}\right) - \rho_0\left(\frac{\partial\mu_{2m}}{\partial y} - \nu\mu_{2m}\right) = f_{3m}(x) \quad \text{при } y = -1 \tag{2.3}$$

причем функции μ_{1m} и μ_{2m} ограничены в своих областях G_1' и G_2 соответственно и $\mu_{2m} \to 0$ при $y \to -\infty$ (условие (1.4)).

Здесь

$$f_{2m}(x) = \operatorname{Im}\frac{d\varepsilon_m}{dz} \quad \text{при } y = -1, \qquad f_{lm}(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{d\varepsilon_m}{dz} + i\nu\varepsilon_m\right]$$

при $y = 0$ для $l = 1$, при $y = -1$ для $l = 3$.

Представив функции $f_{lm}(x)$ через интегралы Фурье, отыскивая функции $\tau_{1m}(z)$ и $\omega_{2m}(z)$ в виде интегралов Фурье и используя условия (2.3), получаем

$$\omega_{1m}(z) = \frac{N_m}{z-\zeta} + \frac{\bar N_m}{z-\bar\zeta} + i\int_0^\infty [2iN_m A \sin\lambda(z-\zeta) + \bar N_m B e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} +$$
$$+ \bar N_m C e^{i\lambda(z-\bar\zeta)}]\, d\lambda, \quad \omega_{2m}(z) = i\int_0^\infty [N_m D e^{-i\lambda(z-\zeta)} + \bar N_m E e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}]\, d\lambda \tag{2.4}$$

Здесь

$$A = \frac{r(\lambda+\nu)}{T(\lambda)} e^{-2\lambda}, \qquad B = \frac{4\nu^2 - r(\lambda-\nu)\,[2\nu + (\lambda+\nu)\,e^{-2\lambda}]}{(\lambda-\nu)\,T(\lambda)} \tag{2.5}$$
$$C = \frac{r(\lambda-\nu)}{T(\lambda)}\, e^{-2\lambda}, \qquad D = \frac{2\nu}{T(\lambda)}, \qquad E = \frac{2\nu(\lambda+\nu)}{(\lambda-\nu)\,T(\lambda)}$$
$$T(\lambda) = 2\nu + r\,[(\lambda+\nu)\,e^{-2\lambda} - \lambda + \nu)], \qquad r = \rho_0 - 1$$

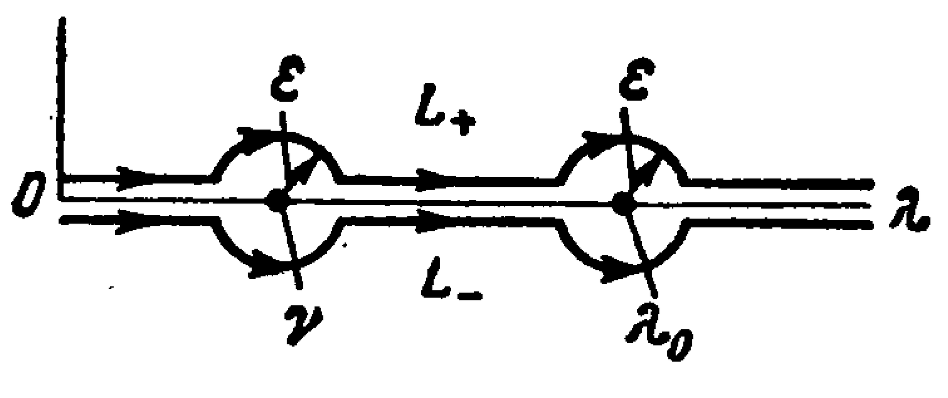
Для любого $\nu > 0$ уравнение $T(\lambda) = 0$ имеет один корень $\lambda = \lambda_0 > 0$. Следовательно, под интегралами в выражениях (2.4) следует понимать их главные значения в смысле Коши.

3°. Распределим вдоль контура Г полярные особенности с вычетами $N_m = \gamma_m(\sigma)\, d\sigma / 2\pi$, где σ — длина дуги контура Г, соответствующая точке $\zeta(\sigma)$ этого контура. Тогда, интегрируя выражения (2.4) по контуру Г, получаем функции

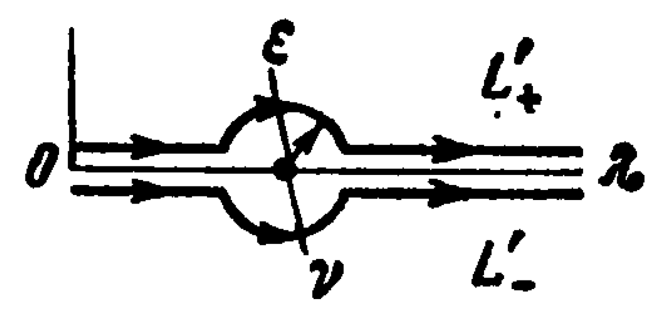
$$\Omega_{1m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\left\{\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}} + i\int_0^{\infty} [2iA\sin\lambda(z-\zeta) + Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})} + \right. \tag{2.6}$$

$$\left. + Ce^{i\lambda(z-\bar{\zeta})}]\, d\lambda\right\} d\sigma, \qquad \Omega_{2m}(z) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\left\{\int_0^{\infty} [De^{-i\lambda(z-\zeta)} + Ee^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}]\, d\lambda\right\} d\sigma$$

которые, в силу линейности задачи, являются аналитическими в соответствующих областях G_1 и G_2 и удовлетворяют условиям 1.1 — 1.4.



Фиг. 2



Фиг. 3

4°. Исходя из вида частного решения уравнения Лапласа и из условий 1.1 — 1.4, находим аналитические в областях G_1' и G_2 функции

$$F_{1m}(z) = A_m e^{-i\lambda_0 z} + B_m e^{-i\nu z} + C_m e^{i\lambda_0 z}, \qquad F_{2m}(z) = D_m e^{-i\lambda_0 z} + E_m e^{-i\nu z} \tag{2.7}$$

где $A_m, \ldots, E_m$ — некоторые постоянные. Тогда, из (2.1) получаем

$$\bar{v}_{1m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\left\{\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}} + i\int_0^{\infty} [2iA\sin\lambda(z-\zeta) + Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})} + \right.$$

$$\left. + Ce^{i\lambda(z-\bar{\zeta})}]\, d\lambda\right\} d\sigma + A_m e^{-i\lambda_0 z} + B_m e^{-i\nu z} + C_m e^{i\lambda_0 z} \tag{2.8}$$

$$\bar{v}_{2m}(z) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\left\{\int_0^{\infty} [De^{-i\lambda(z-\zeta)} + Ee^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}]\, d\lambda\right\} d\sigma + D_m^{-i\lambda_0 z} + E_m e^{-i\nu z}$$

Из линейности задачи следует, что функции $\bar{v}_{jm}(z)$ из (2.8) будут аналитическими в G_j и удовлетворяют условиям 1.1 — 1.4. Функции $\gamma_m(\sigma)$ и постоянные $A_m, \ldots, E_m$ найдем из условий 1.5 и 1.6.

§ 3. Определение коэффициентов $A_m, \ldots, E_m$. Используем условие 1.5 для отыскания величин $A_m, \ldots, E_m$. В выражениях (2.8) перейдем от интегралов в смысле главного значения к интегралам по контурам L_-, L_+, L_-' и L_+' в плоскости комплексного переменного λ (фиг. 2 и 3). Тогда, обозначив

$$i\int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\, e^{-i\lambda\zeta}\, d\sigma = H_m(\lambda) \tag{3.1}$$

получаем

$$\bar{v}_{1m}(z) = \int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right] + \frac{i}{2\pi}\left[\int_{L_{\mp}'} (Ae^{i\lambda(z-\zeta)} + Ce^{i\lambda(z-\bar{\zeta})})\, d\lambda - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{L_{\pm}'} Ae^{-i\lambda(z-\zeta)}\, d\lambda + \int_{L_{\pm}} Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\, d\lambda\right]\right\} d\sigma + R_m^{\mp}(z) \tag{3.2}$$

$$R_m^{\mp}(z) = \{A_m \mp i\,[A_0 H_m(-\lambda_0) + B_0\overline{H_m(\lambda_0)}]\}\, e^{-i\lambda_0 z} +$$

$$+ \{C_m \mp i\,[A_0 H_m(\lambda_0) - C_0\overline{H_m(-\lambda_0)}]\}\, e^{i\lambda_0 z} + \{B_m \mp iB_\nu\overline{H_m(\nu)}\}\, e^{-i\nu z} \tag{3.3}$$

$$A_0 = \frac{r(\lambda_0+\nu)}{2T'(\lambda_0)}\, e^{-2\lambda_0}, \qquad B_0 = -\frac{r(\lambda_0+\nu)^2}{2(\lambda_0-\nu)\,T'(\lambda_0)}\, e^{-2\lambda_0} \tag{3.4}$$

$$B_\nu = \frac{\nu}{1+re^{-2\nu}}, \qquad C_0 = \frac{r(\lambda_0-\nu)}{2T'(\lambda_0)}\, e^{-2\lambda_0}, \qquad T'(\lambda_0) = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}$$

Здесь верхний знак берется при $x < 0$, а нижний — при $x > 0$.

Легко проверить, что в формулах (3.2)

$$\bar{v}_{1m}(z) \to R_m^{\mp}(z) \quad \text{при } |x| \to \infty$$

По формулам (1.4) получаем асимптотические значения полной скорости

$$\bar{v}_1(z,t) \approx R_1^{\mp}(z)\cos t + R_2^{\mp}(z)\sin t \quad \text{при } x \to \mp\infty$$

Следовательно, условие (1.5) для верхней жидкости можно представить в виде

$$\bar{v}_1(z,t) \approx A_{\mp} e^{-i\lambda_0 z \mp it} + B_{\mp} e^{-i\nu z \mp it} + C_{\mp} e^{i\lambda_0 z \pm it} \quad \text{при } x \to \mp\infty \tag{3.5}$$

Из этого условия получаем

$$A_1 = A_0 H_2(-\lambda_0) + B_0 \overline{H_2(\lambda_0)}, \qquad A_2 = -A_0 H_1(-\lambda_0) - B_0 \overline{H_1(\lambda_0)}$$

$$B_1 = B_\nu \overline{H_2(\nu)}, \qquad B_2 = -B_\nu \overline{H_1(\nu)} \tag{3.6}$$

$$C_1 = -A_0 H_2(\lambda_0) + C_0 \overline{H_2(-\lambda_0)}, \qquad C_2 = A_0 H_1(\lambda_0) - C_0 \overline{H_1(-\lambda_0)}$$

$$A_- = -iA_0 h_1(-\lambda_0) - iB_0 \overline{h_2(\lambda_0)}, \qquad A_+ = iA_0 h_2(-\lambda_0) + iB_0 \overline{h_1(\lambda_0)}$$

$$B_- = -iB_\nu \overline{h_2(\nu)}, \qquad B_+ = iB_\nu \overline{h_1(\nu)}, \tag{3.7}$$

$$C_- = -iA_0 h_2(\lambda_0) + iC_0 \overline{h_1(-\lambda_0)}, \qquad C_+ = iA_0 h_1(\lambda_0) - iC_0 \overline{h_2(-\lambda_0)}$$

Здесь

$$h_1(\lambda) = H_1(\lambda) + iH_2(\lambda), \qquad h_2(\lambda) = H_1(\lambda) - iH_2(\lambda) \tag{3.8}$$

Для нижней жидкости совершенно аналогично находим

$$\bar{v}_2(z,t) \approx D_{\mp} e^{-i\lambda_0 z \mp it} + E_{\mp} e^{-i\nu z \mp it} \quad \text{при } x \to \mp\infty \tag{3.9}$$

$$D_1 = -D_0 H_2(-\lambda_0) + E_0 \overline{H_2(\lambda_0)} \qquad D_2 = D_0 H_1(-\lambda_0) - E_0 \overline{H_1(\lambda_0)}$$

$$E_1 = B_\nu \overline{H_2(\nu)}, \qquad E_2 = -B_\nu \overline{H_1(\nu)}, \qquad D_- = iD_0 h_1(-\lambda_0) - iE_0 \overline{h_2(\lambda_0)} \tag{3.10}$$

$$D_+ = -iD_0 h_2(-\lambda_0) + iE_0 \overline{h_1(\lambda_0)}, \qquad E_- = -iB_\nu \overline{h_2(\nu)}, \qquad E_+ = iB_\nu \overline{h_1(\nu)}$$

Здесь

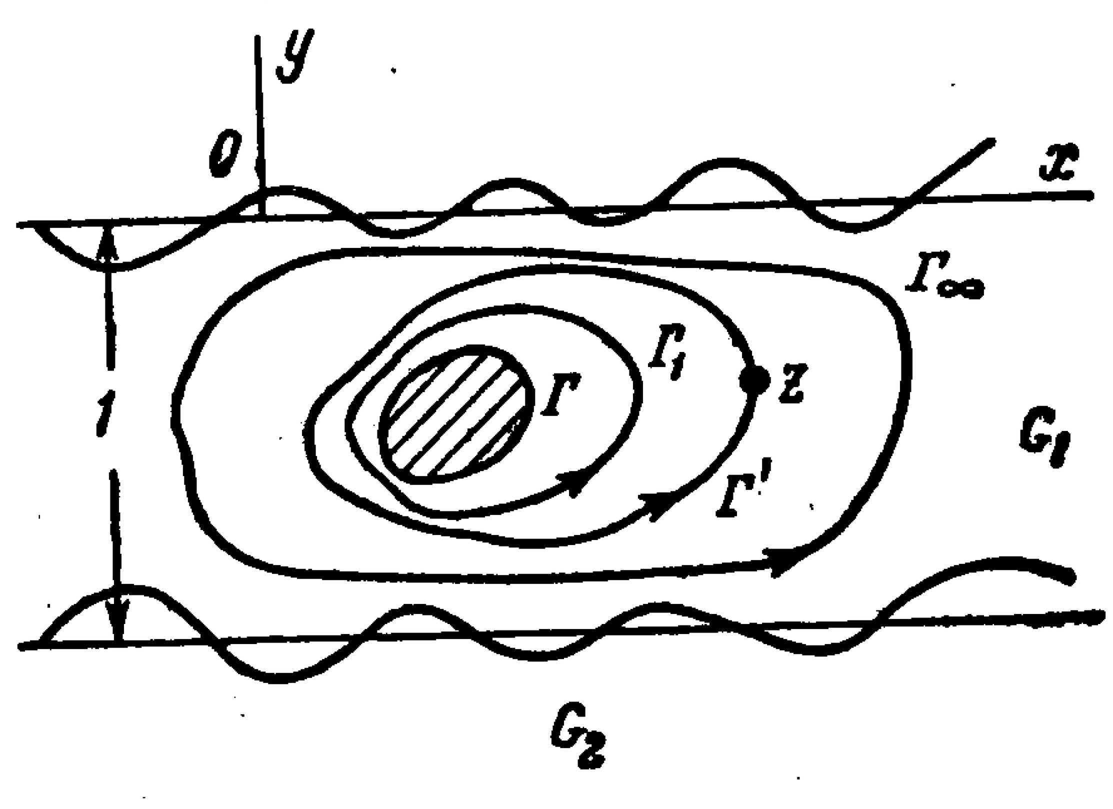
$$D_0 = \frac{\nu}{T'(\lambda_0)}, \qquad E_0 = \frac{\nu(\lambda_0+\nu)}{(\lambda_0-\nu)\,T'(\lambda_0)} \tag{3.11}$$

Выясним еще смысл функций $H_m(\lambda)$ из (3.1). Можно доказать равенство

$$\int_{\Gamma_1} \bar{v}_{1m}(z)\, e^{-i\lambda z}\, dz = i \int_{\Gamma} \gamma_m(\sigma)\, e^{-i\lambda\zeta} d\sigma$$

или

$$H_m(\lambda) = \int_{\Gamma_1} \bar{v}_{1m}(z)\, e^{-i\lambda z} dz \tag{3.12}$$



Фиг. 4

где Γ_1 — любой замкнутый контур в верхней жидкости, содержащий внутри себя контур Γ (фиг. 4). Для этого достаточно подставить значения функций $\bar{v}_{1m}(z)$ из (2.8) и использовать известные свойства аналитических функций и равенства (3.1). Следовательно, функции $H_m(\lambda)$ будут обобщенными циркуляциями для некоторых фиктивных течений жидкостей с комплексными потенциалами $w_{jm}(z)$, т. е. они являются функциями Н. Е. Кочина [1].

§ 4. Определение функций $\gamma_m(\sigma)$. 1°. Функции $\gamma_m(\sigma)$ найдем при помощи условия 1.6. Для определенности выберем начало координат 0 так, чтобы $\operatorname{Re} z > 0$ для точек z на контуре Г (фиг. 1 и 4). Тогда, используя (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7), получаем

$$\bar{v}_{1m}(z) = \int_\Gamma \gamma_m(\sigma) \left\{ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right] + \frac{i}{2\pi}\left[\int_{L_+'} (Ae^{i\lambda(z-\zeta)} + Ce^{i\lambda(z-\bar{\zeta})})\, d\lambda - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{L_-'} Ae^{-i\lambda(z-\zeta)}\, d\lambda + \int_{L_-} Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})}\, d\lambda\right]\right\} d\sigma + A_m' e^{i\lambda_0 z} + B_m' e^{-i\nu z} + C_m' e^{i\lambda_0 z} \tag{4.1}$$

Здесь

$$A_1' = A_+, \quad B_1' = B_+, \quad C_1' = C_+, \quad A_2' = iA_1', \quad B_2' = iB_1', \quad C_2' = -iC_1' \tag{4.2}$$

Пусть контур Г является простым и имеет непрерывную кривизну. Подставляя функции $\bar{v}_{1m}(z)$ из (4.1) в условие 1.6 и используя свойства интегралов типа Коши, получаем интегральные уравнения

$$\gamma_m(s) = -K\gamma_m + f_m(s) \tag{4.3}$$

где дуга s соответствует точке z на контуре Г и

$$K\gamma_m \equiv \int_\Gamma K(s,\sigma)\,\gamma_m(\sigma)\, d\sigma, \quad K(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{ie^{i\theta}\left[\int_{L_+'} (Ae^{i\lambda(z-\zeta)} + Ce^{i\lambda(z-\bar{\zeta})})\, d\lambda - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{L_-'} Ae^{-i\lambda(z-\zeta)} d\lambda + \int_{L_-} Be^{-i\lambda(z-\bar{\zeta})} d\lambda\right] + \frac{e^{i\theta}}{z-\zeta} + \frac{e^{i\theta}}{z-\bar{\zeta}}\right\} \tag{4.4}$$

$$f_m(s) = 2u_m(s) - 2\operatorname{Re}\left[e^{i\theta}(A_m' e^{-i\lambda_0 z} + B_m' e^{-i\nu z} + C_m' e^{i\lambda_0 z})\right] \tag{4.5}$$

Очевидно, получены линейные интегральные уравнения Фредгольма с непрерывным ядром.

Если контур Г колеблется не деформируясь, то

$$\int_\Gamma u_m(s)\, ds = 0, \qquad \int_\Gamma K(s,\sigma)\, ds = 1$$

Тогда, интегрируя обе части уравнения (4.3) по $s \in [0, b]$, где b — длина контура Г, получаем

$$\int_\Gamma \gamma_m(s)\, ds = 0 \tag{4.6}$$

На основании (4.6) уравнения (4.3) эквивалентны уравнениям

$$\gamma_m(s) = -K_0\gamma_m + f_m(s) \qquad (K_0 = K - 1/b) \tag{4.7}$$

Решения этих уравнений можно искать методом последовательных приближений

$$\gamma_m(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_{mk}(s), \qquad q_{mk}(s) = K_0 q_{m,\,k-1}, \quad q_{m0}(s) = f_m(s) \tag{4.8}$$

При помощи принципа сжатых отображений [4] установим условие сходимости процесса (4.8) к единственному решению. Будем искать решения уравнений (4.7) в классе M функций, ограниченных при $s \in [0, b]$. Легко показать, что если $\gamma_m^* \in M$, то и $F\gamma_m \in M$, где $F\gamma_m = -K_0\gamma_m + f_m(s)$. Кроме того, если $\gamma_{m1} \in M$ и $\gamma_{m2} \in M$, то

$$|F\gamma_{m1} - F\gamma_{m2}| \leqslant \|\gamma_{m1} - \gamma_{m2}\|_M \int_\Gamma |K_0(s,\sigma)|\, d\sigma \quad (\|\gamma_m\|_M = \sup|\gamma_m(s)| \text{ при } s \in [0, b])$$

Это означает, что если

$$\int_\Gamma |K_0(s,\sigma)|\, d\sigma \leqslant p < 1 \tag{4.9}$$

то оператор F будет оператором сближения.

Итак, для контуров Г, удовлетворяющих условию (4.9), существуют, и притом единственные, решения уравнений (4.7), а значит, и уравнений (4.3). Из (4.4) имеем

$$\int_\Gamma \left| K_\theta(s,\sigma) \right| d\sigma \leqslant \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \left| \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{z-\zeta}\right) - \frac{\pi}{b}\right| d\sigma + \frac{b}{\pi}\left\{\sup_{s,\sigma}\left|\int_{L_+'} [Ae^{i\lambda(z-\zeta)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + Ce^{i\lambda(z-\bar\zeta)}]\,d\lambda - \int_{L_-'} Ae^{-i\lambda(z-\zeta)}\,d\lambda + \int_{L_-} Be^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}\,d\lambda \right| + \frac{1}{2a}\right\} \qquad (s,\sigma \in [0,b]) \tag{4.10}$$

где a — наименьшее расстояние от оси x до точек на контуре Г. Если контур Г является окружностью, то для него

$$\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}}{z-\zeta} - \frac{\pi}{b} = 0$$

Итак, из неравенства (4.10) видим, что условие (4.9) заведомо выполняется для контуров Г, у которых длина b достаточно мала по сравнению с единицей и которые по своей форме достаточно близки к окружности радиуса $b/2\pi$.

2°. Найдем постоянные A_m', B_m' и C_m', входящие в выражения (4.5) для функций $f_m(s)$ и входящие, следовательно, в решения (4.8). Представим функции $\gamma_m(s)$ в виде

$$\gamma_m(s) = \gamma_m{}^\circ(s) + \operatorname{Re}\left[\gamma(s,\lambda_0)A_m' + \gamma(s,\nu)B_m' + \gamma(s,-\lambda_0)C_m'\right] \tag{4.11}$$

где функции $\gamma_m{}^\circ(s)$ и $\gamma(s,\lambda)$ — решения уравнений

$$\gamma_m{}^\circ(s) = -K\gamma_m{}^\circ + 2u_m(s), \qquad \gamma(s,\lambda) = -K\gamma - 2e^{i\theta - i\lambda z} \tag{4.12}$$

а λ принимает значения λ_0, ν и $-\lambda_0$. Очевидно, решения уравнений (4.12) существуют также при условии (4.9). Подставляя $\gamma_m(s)$ из (4.11) в формулы (3.8), получаем

$$h_1(\lambda) = H_1{}^\circ(\lambda) + iH_2{}^\circ(\lambda) + h(\lambda,\lambda_0)\overline{A_1'} + h(\lambda,\nu)\overline{B_1'} + H(\lambda,-\lambda_0)C_1' \tag{4.13}$$
$$h_2(\lambda) = H_1{}^\circ(\lambda) - iH_2{}^\circ(\lambda) + H(\lambda,\lambda_0)A_1' + H(\lambda,\nu)B_1' + h(\lambda,-\lambda_0)\overline{C_1'}$$

Здесь

$$H_m{}^\circ(\lambda) = i\int_\Gamma \gamma_m{}^\circ(\sigma)e^{-i\lambda\zeta}\,d\sigma, \qquad h(\lambda,\Lambda) = i\int_\Gamma \overline{\gamma(\sigma,\Lambda)}\,e^{-i\lambda\zeta}\,d\sigma$$
$$H(\lambda,\Lambda) = i\int_\Gamma \gamma(\sigma,\Lambda)\,e^{-i\lambda\zeta}\,d\sigma \tag{4.14}$$

а Λ принимает значения λ_0, ν и $-\lambda_0$. Подставив $h_1(\lambda)$ и $h_2(\lambda)$ из (4.13) в формулы (3.7) и учитывая (4.2), находим

$$A_1' = \Delta_A/\Delta, \qquad B_1' = \Delta_B/\Delta, \qquad C_1' = \overline{\Delta}_C/\overline{\Delta} \tag{4.15}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= p_1(b_2c_3 - b_3c_2) + p_2(b_3c_1 - b_1c_3) + p_3(b_1c_2 - b_2c_1)\\
\Delta_B &= p_1(a_3c_2 - a_2c_3) + p_2(a_1c_3 - a_3c_1) + p_3(a_2c_1 - a_1c_2)\\
\Delta_C &= p_1(a_2b_3 - a_3b_2) + p_2(a_3b_1 - a_1b_3) + p_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\
\Delta &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$a_1 = i[A_0H(-\lambda_0,\lambda) + B_0\overline{h(\lambda_0,\lambda_0)}] - 1, \qquad a_3 = i[D_0H(-\lambda_0,\lambda_0) - A_0\overline{h(\lambda_0,\lambda_0)}]$$
$$a_2 = iB_\nu\overline{h(\nu,\lambda_0)}, \qquad b_1 = i[A_0H(-\lambda_0,\nu) + B_0\overline{h(\lambda_0,\nu)}], \qquad b_2 = iB_\nu\overline{h(\nu,\nu)} - 1$$
$$b_3 = i[D_0H(-\lambda_0,\nu) - A_0\overline{h(\lambda_0,\nu)}], \qquad c_1 = i[A_0h(-\lambda_0,-\lambda_0) + B_0\overline{H(\lambda_0,-\lambda_0)}]$$
$$c_2 = iB_\nu\overline{H(\nu,-\lambda_0)}, \qquad c_3 = i[D_0h(-\lambda_0,-\lambda_0) - A_0\overline{H(\lambda_0,-\lambda_0)}] - 1 \tag{4.17}$$
$$p_1 = -i[A_0h_0 + B_0\overline{h(\lambda_0)}], \qquad p_2 = -iB_\nu\overline{h(\nu)}, \qquad p_3 = i[A_0\overline{h(\nu)} - D_0h_0]$$

Здесь

$$h_0 = H_1{}^\circ(-\lambda_0) - iH_2{}^\circ(-\lambda_0), \qquad h(\lambda) = H_1{}^\circ(\lambda) + iH_2{}^\circ(\lambda)$$

а λ принимает значения λ_0 и ν

§ 5. Вывод основных формул задачи. 1°. Сравнивая равенства (3.5) и (3.9) с равенствами (1.4), можно найти асимптотические значения функций $\bar{v}_{jm}(z)$ при $x \to \mp\infty$. Подставляя последние в формулы (1.5), получаем асимптотические выражения для волновых профилей свободной границы и границы раздела соответственно

$$\delta_1(x, t) \approx \mathrm{Im}\{\mp i\,[(A_\mp - \bar{C}_\mp)\, e^{-i\lambda_0 x \mp it} + B_\mp e^{-i\nu x \mp it}]\} \quad (x \to \mp\infty) \tag{5.1}$$
$$\delta_2(x, t) \approx \mathrm{Im}\{\mp i\,[e^{-\lambda_0} D_\mp e^{-i\lambda_0 x \mp it} + e^{-\nu} E_\mp e^{-i\nu x \mp it}]\} \quad (x \to \mp\infty)$$

Итак, на свободной границе и на границе раздела вдали от контура тела Г в обе стороны от него расходятся волны двух видов с длинами $2\pi / \lambda_0$ и $2\pi / \nu$ и с амплитудами $\alpha_{j\mp}$ и $\beta_{j\mp}$ соответственно, где

$$\alpha_{1\mp} = |A_\mp - \bar{C}_\mp|, \qquad \beta_{1\mp} = |B_\mp|, \qquad \alpha_{2\mp} = |D_\mp|\, e^{-\lambda_0}, \qquad \beta_{2\mp} = |E_\mp|\, e^{-\nu} \tag{5.2}$$

Сравнивая амплитуды, получаем зависимости

$$\alpha_{1\mp} = re^{-\lambda_0}\alpha_{2\mp}, \qquad \beta_{2\mp} = e^{-\nu}\beta_{1\mp} \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что волны длиной $2\pi / \lambda_0$ развиваются, в основном, на границе раздела, а волны длиной $2\pi / \nu$ — на свободной границе.

2°. Средние значения $\langle M\rangle$, $\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle$ за один период колебаний для главного момента M и для проекций X и Y главного вектора сил давлений жидкости на контур тела Г будем искать по формулам Кочина [1]

$$\langle Y\rangle + i\langle X\rangle = -\frac{1}{4}\int_{\Gamma'} \{[\bar{v}_{11}(z)]^2 + [\bar{v}_{12}(z)]^2\}\, dz$$
$$\langle M\rangle = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left(\int_{\Gamma'} \{[\bar{v}_{11}(z)]^2 + [\bar{v}_{12}(z)]^2\}\, z\, dz\right) \tag{5.4}$$

где Г′ — любой контур, лежащий в области G_1 и охватывающий контур Г.

Преобразуем формулы (5.5). Для этого проведем в области G_1 контуры Γ_1 и Γ_∞ так, как показано на фиг. 4. Тогда для функций $\bar{v}_{1m}(z)$, аналитических и однозначных в области G_1, по формуле Коши находим

$$\bar{v}_{1m}(z) = U_m(z) + V_m(z) \tag{5.5}$$

где точка z лежит на контуре Г′ и

$$U_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\bar{v}_{1m}(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}, \qquad V_m(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\infty} \frac{\bar{v}_{1m}(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta} \tag{5.6}$$

Очевидно, функции $U_m(z)$ являются аналитическими вне контура Γ_1 и имеют порядок z^{-1} при $z \to \infty$, а функции $V_m(z)$ — аналитические всюду внутри контура Γ_∞; при этом Γ_1 можно провести сколь угодно близко к контуру тела Г, а Γ_∞ — сколь угодно близко к прямым $y = 0$ и $y = -1$.

Используя свойства аналитических функций, получаем

$$\langle Y\rangle + i\langle X\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma'} [\bar{v}_{11}(z)\, V_1(z) + \bar{v}_{12}(z)\, V_2(z)]\, dz$$
$$\langle M\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma'} [\bar{v}_{11}(z)\, V_1(z) + \bar{v}_{12}(z)\, V_2(z)]\, z\, dz\right\} \tag{5.7}$$

На основании равенств (5.5) и (5.6) и свойств функций $U_m(z)$ можно считать, что вдоль контура Γ_1 распределены полярные особенности с плотностями $\bar{v}_{1m}(\zeta)$. Тогда, полагая $N_m = \bar{v}_{1m}(\zeta)\, d\zeta / 2\pi i$ в равенствах (2.4), интегрируя обе части их вдоль Γ_1 и используя формулы (3.12) и (5.6), вместо формул (2.6) для функций $\Omega_{1m}(z)$ можно получить другое представление

$$\Omega_{1m}(z) = U_m(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [(B+1)\overline{H_m(\lambda)}\, e^{-i\lambda z} +$$

$$+ C\overline{H_m(-\lambda)}\, e^{i\lambda z}]\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty A\, [H_m(\lambda)\, e^{i\lambda z} - H_m(-\lambda)\, e^{-i\lambda z}]\, d\lambda \qquad (5.8)$$

Сравнивая выражения $\bar v_{1m}(z) = \Omega_{1m}(z) + F_{1m}(z)$ и (5.5), получаем

$$V_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{A\,[H_m(\lambda)\, e^{i\lambda z} - H_m(-\lambda)\, e^{-i\lambda z}] - [(B+1)\overline{H_m(\lambda)}\, e^{-i\lambda z} +$$

$$+ C\overline{H_m(-\lambda)}\, e^{i\lambda z}]\}\, d\lambda + A_m e^{-i\lambda_0 z} + B_m^{\bullet} e^{-i\nu z} + C_m e^{i\lambda_0 z} \qquad (5.9)$$

Подставляя $V_m(z)$ из (5.9) в формулы (5.7), находим

$$\langle X\rangle = \operatorname{Im}\{A_0\alpha_0 + B_0\alpha_1(\lambda_0) + B_\nu\alpha_1(\nu) + C_0\alpha_1(-\lambda_0)\} \qquad (5.10)$$

$$\langle Y\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty [(B+1)\, k_1(\lambda) + Ck_1(-\lambda)]\, d\lambda + A_0 \operatorname{Re}[\alpha_0] \qquad (5.11)$$

$$\langle M\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[A\,\frac{dk_2(\lambda)}{d\lambda} + (B+1)\, k_3(\lambda) + Ck_3(-\lambda)\right] d\lambda +\right.$$

$$\left. + A_0[\alpha_2(\lambda_0) - \alpha_2(-\lambda_0)] + B_0\alpha_3(\lambda_0) + B_\nu\alpha_3(\nu) + C_0\alpha_3(-\lambda_0)\right\} \qquad (5.12)$$

где

$$k_1(\lambda) = |H_1(\lambda)|^2 + |H_2(\lambda)|^2, \qquad k_2(\lambda) = H_1(\lambda)\, H_1(-\lambda) + H_2(\lambda)\, H_2(-\lambda)$$

$$k_3(\lambda) = \overline{H_1(\lambda)}\, H_1'(\lambda) + \overline{H_2(\lambda)}\, H_2'(\lambda), \qquad \alpha_0 = H_1(-\lambda_0)\, H_2(\lambda_0) - H_1(\lambda_0)\, H_2(-\lambda_0)$$

$$\alpha_1(\lambda) = \overline{H_1(\lambda)}\, H_2(\lambda), \qquad \alpha_2(\lambda) = H_1(-\lambda)\, H_2'(\lambda) - H_2(-\lambda)\, H_1'(\lambda) \qquad (5.13)$$

$$\alpha_3(\lambda) = \overline{H_1(\lambda)}\, H_2'(\lambda) - \overline{H_2(\lambda)}\, H_1'(\lambda)$$

3°. В основные формулы задачи (5.3), (5.10), (5.11) и (5.12) входят функции Кочина $H_m(\lambda)$, которые можно найти следующим путем: решая уравнения (4.12) и подставляя найденные функции $\gamma_m{}^\circ(s)$ и $\gamma(s, \lambda)$ в формулы (4.14), определяем из них функции $H_m{}^\circ(\lambda)$, $h(\lambda, \Lambda)$ и $H(\lambda, \Lambda)$; подетавив последние в формулы (4.17) и используя формулы (4.16), получаем из формул (4.15) и (4.2) коэффициенты A_m', B_m' и C_m'; наконец, определяя из (4.11) функции $\gamma_m(s)$ и подставляя их в формулы (3.1), находим функции $H_m(\lambda)$.

Но для достаточо большой глубины погружения тела функции $H_m(\lambda)$ можно искать приближенно, подставляя в формулы (3.12) вместо $\bar v_{1m}(z)$ соответствующие функции $\bar v_{m\infty}(z)$ для колебаний тела в безграничной жидкости.

В заключение заметим, что при $\rho_1 = \rho_2$ получаем случай Кочина [1]; полагая всюду в наших формулах $r = 0$, приходим к соответствующим формулам Кочина [1]. Если же положим $\rho_2 = \infty$ ($r = \infty$), то придем к формулам М. Д. Хаскинда [2].

Поступила 14 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Собр. соч., т. II, 1949.
2. Хаскинд М. Д. Плоская задача о колебаниях тела под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 4.
3. Войценя В. С. Плоская задача о колебаниях тела под поверхностью раздела двух жидкостей. ПММ, 1958, т. XXII, вып 6.
4. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.