ИССЛЕДОВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

З. Н. Добровольская (Москва)

Решение задачи о движении жидкости со свободной поверхностью, как известно, представляет большие трудности: требуется удовлетворить нелинейному граничному условию на границе, которая должна быть найдена в процессе решения.

Задача несколько упрощается в случае автомодельных движений, когда гидродинамические величины зависят от отношений x/t, y/t, z/t. Примером может служить задача о погружении бесконечного клина в полупространство, занятое несжимаемой жидкостью. Приближенные методы решения этой задачи можно найти в работах [1-5] и др.; в нелинейной постановке задача о погружении клина рассматривалась в [6-8].

Ниже рассматривается задача о погружении с постоянной скоростью v_0 клина произвольного угла раствора 2α в полупространство, занятое идеальной несжимаемой и невесомой жидкостью. Эта задача для области с неизвестным участком границы сводится к задаче определения одной функции, аналитической в верхней полуплоскости, по нелинейному краевому условию, заданному уже на известной границе — на всей действительной оси.

В связи с тем, что полученная краевая задача сложна, рассматривается вспомогательная задача о распространении непрерывного давления по свободной поверхности несжимаемой жидкости. Заметим, что задачу о проникании клина можно рассматривать как задачу о неустановившемся движении жидкости, вызванном распространением некоторого непрерывного давления по свободной поверхности, ограничивающей жидкость. Рассматриваемая вспомогательная задача также приводится к нелинейной краевой задаче, причем некоторые ее частные решения могут быть получены обратным методом. В работе найдено одно точное частное решение.

1. Движение жидкости, возникшее в результате внедрения клина, потенциально. Потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2\varphi / \partial x^2 + \partial^2\varphi / \partial y^2 = 0 \qquad (1.1)$$

и следующим условиям на границе области $ABCD$ (фиг. 1) возмущенного движения жидкости (граница области меняется во времени):

а) условию постоянства давления на свободной поверхности

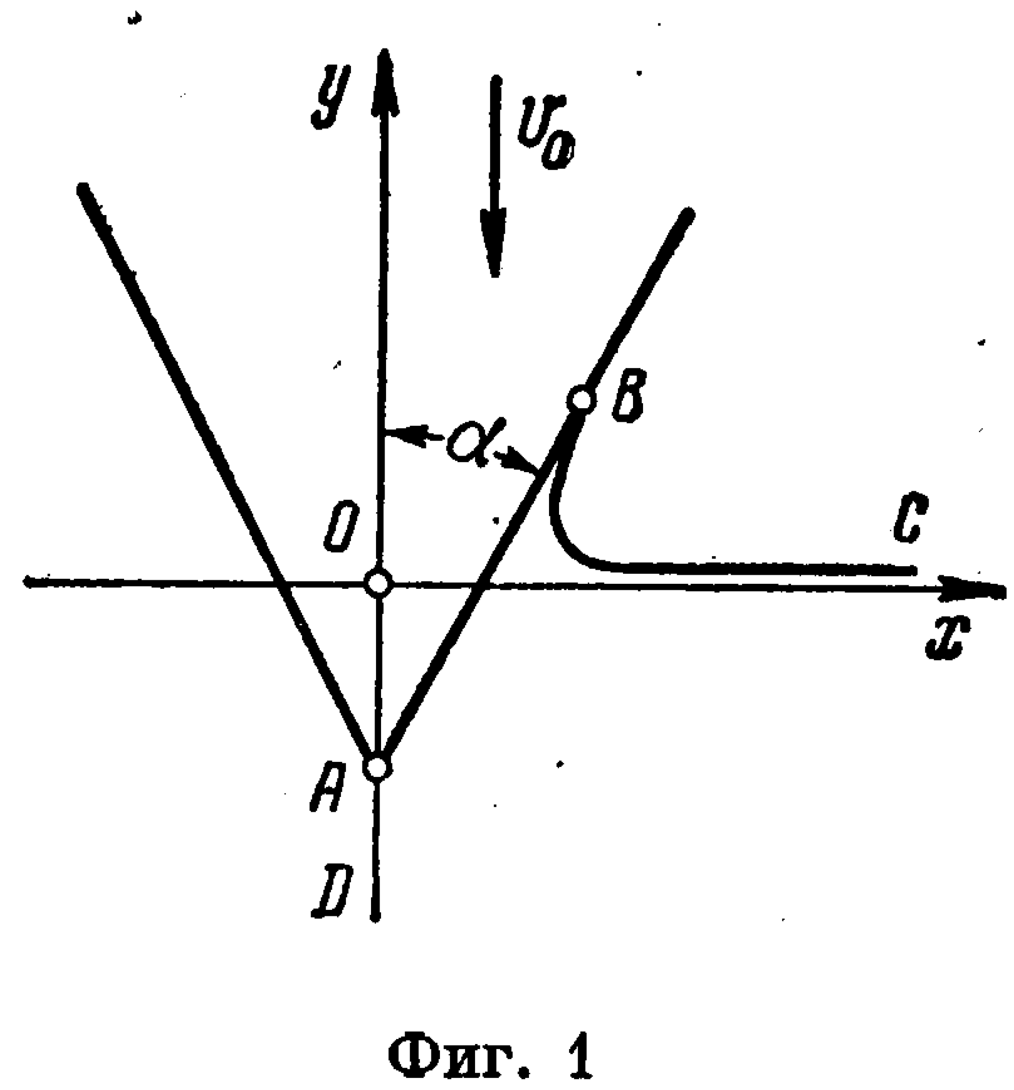
$$\partial\varphi / \partial t + (1/2) [(\partial\varphi / \partial x)^2 + (\partial\varphi / \partial y)^2] = 0 \text{ на } BC \qquad (1.2)$$

b) условию непроницаемости на твердой границе

$$\partial\varphi / \partial n = v_0 \sin \alpha \quad \text{на } AB \qquad (1.3)$$

с) условию симметрии

$$\partial\varphi / \partial x = 0 \text{ на } AD \qquad (1.4)$$



Фиг. 1

Кроме того, должно быть выполнено условие

$$\partial\varphi / \partial x = \partial\varphi/\partial y = 0 \qquad \text{при } |z| \to \infty$$

и начальное условие $\varphi(x, y, 0) = 0$

На свободной поверхности наряду с условием (1.2) имеется кинематическое условие, выражающее то обстоятельство, что частицы жидкости, находящиеся на свободной поверхности, остаются на ней во все время движения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0 \qquad (1.5)$$

Здесь $y = f_0(x, t)$ — уравнение неизвестной свободной границы жидкости.

2. Введем автомодельные переменные $\xi = x / v_0 t$ и $\eta = y / v_0 t$. Тогда

$$\varphi(x, y, t) = v_0^2 t \Phi(\xi, \eta)$$

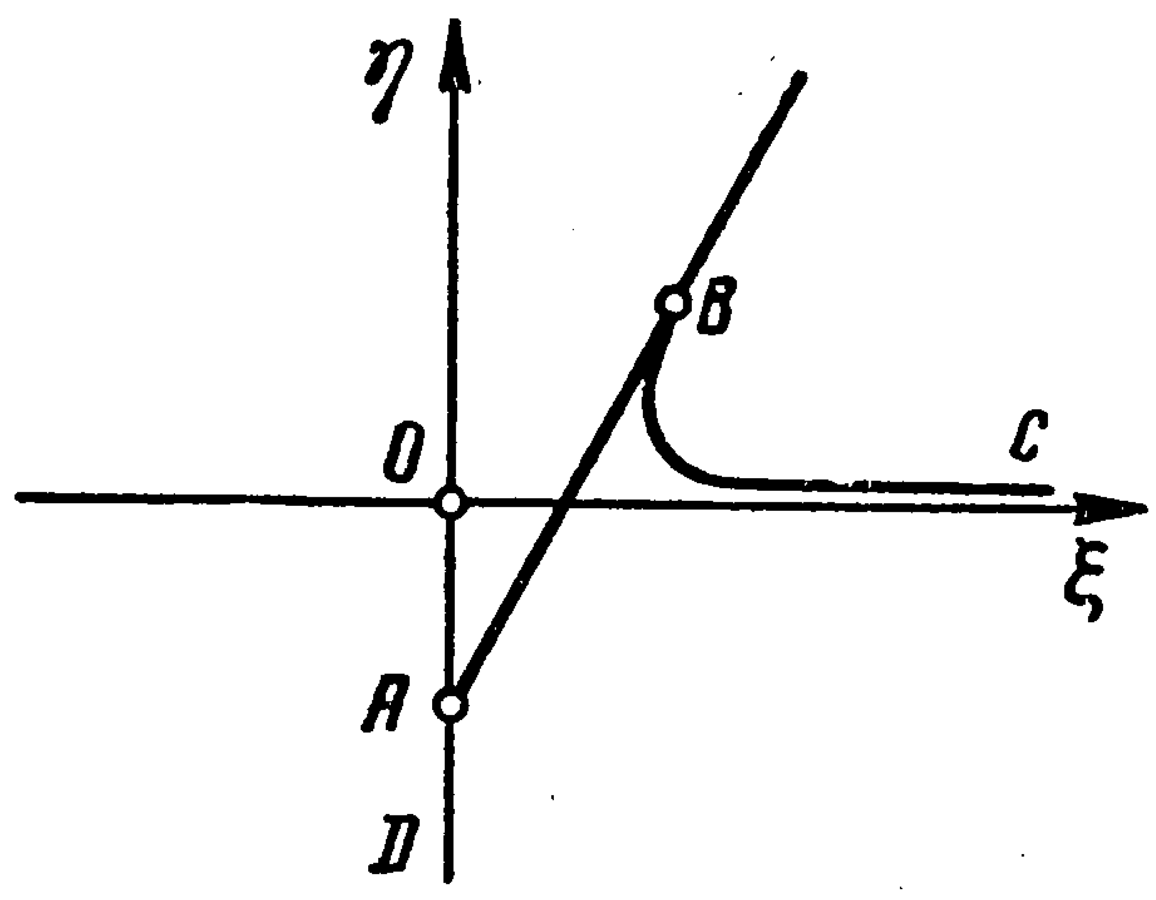
где $\Phi(\xi, \eta)$ — гармоническая функция переменных ξ, η. Область $ABCD$ в плоскости ξ, η фиксирована (фиг. 2); уравнение свободной границы имеет вид $\eta = \eta^*(\xi)$.

Условия (1.2) и (1.5) перейдут соответственно в условия

$$\Phi(\xi, \eta) - \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \eta(\xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \eta'(\xi) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \xi \eta'(\xi) - \eta(\xi) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь ξ, η — координаты точек неизвестной кривой $\eta = \eta(\xi)$.



Фиг. 2

Введем комплексный потенциал

$$V(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta), \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

Тогда интеграл Лагранжа (2.1) можно привести к виду (2.3)

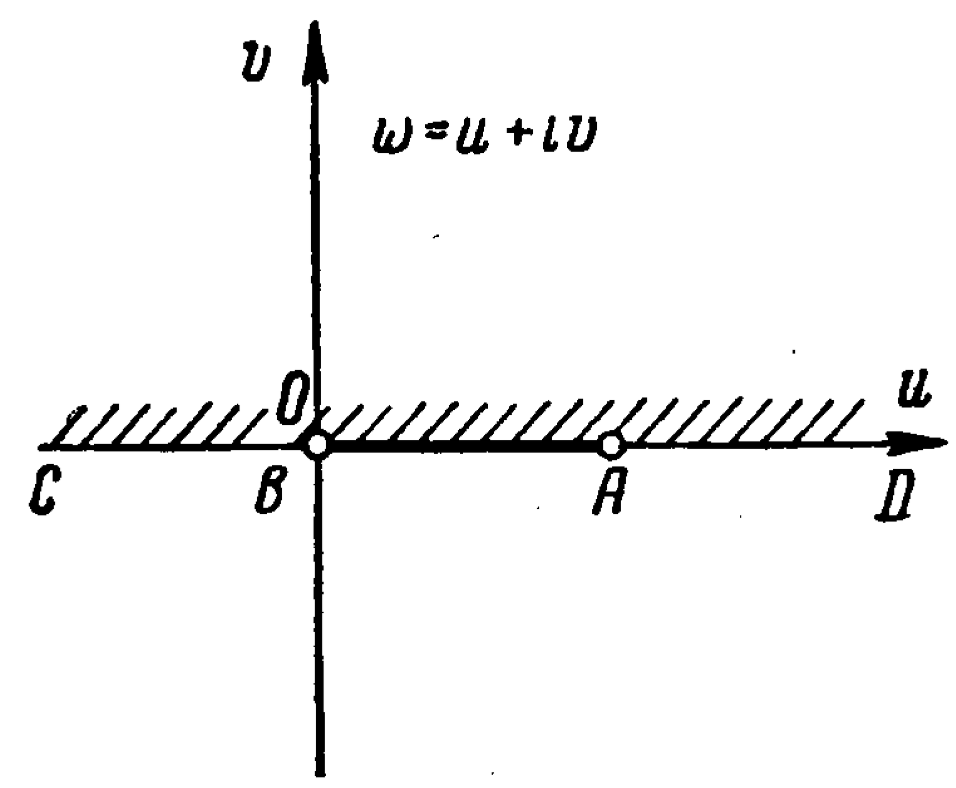
$$\operatorname{Re}\left[V(\zeta) - \zeta V'(\zeta)\right] + \frac{1}{2} V'(\zeta) \overline{V'(\zeta)} = 0$$

где комплексная переменная ζ — точка неизвестной кривой $\eta = \eta(\xi)$. Условия (1.3) и (1.4) в плоскости ζ могут быть записаны в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha} V'(\zeta)\right] = \sin \alpha \quad \text{на } AB \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Re} V'(\zeta) = 0 \quad \text{на } AD$$

Введем новую неизвестную функцию $\zeta = \zeta(w)$, которая конформно отображает верхнюю полуплоскость w (фиг. 3) на область $ABCD$ плоскости ζ. Точки A и B действительной оси u, в которые переходят точки A и B плоскости ζ, можно задать.



Фиг. 3

Так как параметрические уравнения кривой $\eta(\xi)$ имеют вид $\xi = \operatorname{Re} \xi(u)$, $\eta = \operatorname{Im} \zeta(u)$, то производная $\eta'(\xi)$, в условии (2.2), равна

$$\eta'(\xi) = \frac{\operatorname{Im} \zeta'(w)}{\operatorname{Re} \zeta'(w)}\bigg|_{w=u} \tag{2.5}$$

Комплексный потенциал $V(\zeta)$ перейдет в функцию $V(\zeta(w))$, которую обозначим той же буквой $V(\zeta(w)) = V(w)$. При этом

$$V'(\zeta)\,|_{\zeta=\zeta(w)} = V'(w) \frac{1}{\zeta'(w)} \tag{2.6}$$

Учитывая (2.5), (2.6), приведем условия (2.2), (2.3), (2.4) к виду

$$\frac{1}{\operatorname{Re} \zeta'(u)} \operatorname{Im}\left[\zeta'(u) \overline{\zeta(u)} - V'(u)\right] = 0 \qquad \text{на } BC \ (-\infty < u \leqslant 0, \ v = 0) \tag{2.7}$$

$$\operatorname{Re}\left[V(u) - \frac{\zeta(u)}{\zeta'(u)} V'(u)\right] + \frac{1}{2} \frac{V'(u) \overline{V'(u)}}{\zeta'(u) \overline{\zeta'(u)}} = 0 \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha} V'(u) \frac{1}{\zeta'(u)}\right] = \sin \alpha \qquad \text{на } BA \ (0 \leqslant u \leqslant u_A, \ v = 0) \tag{2.9}$$

$$\operatorname{Re} \frac{V'(u)}{\zeta'(u)} = 0 \qquad \text{на } AD \ (u_A \leqslant u < +\infty, \ v = 0) \tag{2.10}$$

Условия (2.7) — (2.10) заданы на действительной оси u. Для отображающей функции $\zeta(w)$, кроме того, имеем условия, что участки BA и AD оси u переходят в известные части границы области $ABCD$.

$$\operatorname{Re}\left[e^{+i\alpha} \zeta(u)\right] = \sin \alpha \quad \text{на } BA, \qquad \operatorname{Re} \zeta(u) = 0 \quad \text{на } AD \tag{2.11}$$

Аргумент функции $\zeta'(w)$ на BA и AD известен, в силу чего

$$\zeta'(w) = -ie^{-i\alpha}|\zeta'| \quad \text{на } BA, \qquad \zeta'(w) = -i|\zeta'| \quad \text{на } AD \tag{2.12}$$

Используя (2.12), преобразуем условия (2.7) — (2.11) к виду

$$\operatorname{Re}[iV'(u)] = \operatorname{Re}[i\zeta'(u)\overline{\zeta(u)}] \quad \text{на } CB\ (-\infty < u \leqslant 0,\ v = 0) \tag{2.13}$$

$$\operatorname{Re}[V(u)\zeta'(u)\overline{\zeta'(u)} - \zeta(u)\overline{\zeta'(u)}V'(u)] + {}^1\!/_2 V'(u)\overline{V'(u)} = 0 \tag{2.14}$$

$$\operatorname{Re}[iV'(u)] = \sin\alpha\,|\zeta'(u)|, \quad \operatorname{Re}[e^{i\alpha}\zeta(u)] = \sin\alpha \quad \text{на } BA\ (0 \leqslant u \leqslant u_A,\ v = 0)$$

$$\operatorname{Re}[iV'(u)] = 0, \quad \operatorname{Re}\zeta(u) = 0 \quad \text{на } AD\ (u_A \leqslant u < +\infty,\ v = 0) \tag{2.15}$$

Исходная задача свелась к задаче об определении двух аналитических в верхней полуплоскости функций $V(w)$ и $\zeta(w)$ по краевым условиям (2.13)—(2.15), заданным на действительной оси u плоскости w — к нелинейной краевой задаче типа задачи Пуанкаре для верхней полуплоскости.

Исключая из условий (2.13) — (2.15) одну из неизвестных функций, сведем рассматриваемую задачу к краевой задаче для одной функции.

3. Из условий (2.13) — (2.15) видно, что действительная часть функции $iV'(w)$ выражается через функцию $\zeta(w)$ на всей действительной оси (первое условие на каждом участке оси u)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[iV'(w)]_{w=u} &= \operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta}) && (-\infty < u \leqslant 0) \\ \operatorname{Re}[iV'(w)]_{w=u} &= \sin\alpha\,|\zeta'(u)| && (0 \leqslant u \leqslant u_A) \\ \operatorname{Re}[iV'(w)]_{w=u} &= 0 && (u_A \leqslant u < +\infty) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Используя эти условия, выразим при помощи интеграла Шварца для верхней полуплоскости комплексный потенциал через отображающую функцию $\zeta(w)$

$$V'(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u)\frac{du}{u - w} \tag{3.2}$$

Здесь $\mu(u)$ — действительная кусочно-непрерывная функция, имеющая в точках $u = 0$ и $u = u_A$ разрывы первого рода

$$\mu(u) = \begin{cases} \operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta}) & (-\infty < u \leqslant 0) \\ \sin\alpha\,|\zeta'(u)| & (0 \leqslant u \leqslant u_A) \\ 0 & (u_A \leqslant u < +\infty) \end{cases}$$

Интеграл Шварца определяет функцию $iV'(w)$ с точностью до мнимого слагаемого. Но на бесконечности интеграл в выражении (3.2) и функция $V'(w)$ обращаются в нуль, в силу чего постоянная должна быть нулем. Интегрируя выражение (3.2) по w (это возможно, пока точка w находится в верхней полуплоскости), получим

$$V(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(u - w)\,\mu(u)\,du + c \tag{3.3}$$

Здесь c — комплексная постоянная. Формула (3.3) выражает комплексный потенциал $V(w)$ в плоскости w через отображающую функцию $\zeta(w)$. Причем, если $V(w)$ и $\zeta(w)$ связаны выражением (3.3), то первые условия (2.13) — (2.15) выполнены. Исключим теперь функцию $V(u)$ из вторых условий (2.13) — (2.15), используя для этого выражения (3.2) и (3.3).

Найдем предельные значения функций $V(w)$ и $V'(w)$ при $w \to u_0$ (u_0 — точка действительной оси u). Значение $V(u_0)$ в точке u_0 действительной оси u получается непосредственной подстановкой u_0 вместо w в формулу (3.3), так что

$$V(u_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(u - u_0)\,\mu(u)\,du + c \tag{3.4}$$

Для граничного значения функции $V'(w)$ при $w \to u_0$ из верхней полуплоскости будем иметь по формулам Сохоцкого [9]

$$V'(u_0) = -i\mu(u_0) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\frac{du}{u-u_0} \tag{3.5}$$

Интеграл в выражении (3.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

одставляя предельные значения функций V и V' по формулам (3.4) и (3.5) во второе условие (2.13), после некоторых преобразований, получим

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\zeta'(u_0)\overline{\zeta'(u_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\ln|u-u_0|\,du + \frac{1}{\pi}\zeta(u_0)\overline{\zeta'(u_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\frac{du}{u-u_0}\right\} \tag{3.6}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\frac{du}{u-u_0}\right]^2 - \frac{1}{2}[\operatorname{Re} i\zeta'(u_0)\overline{\zeta(u_0)}]^2 + c_1\zeta'(u_0)\overline{\zeta'(u_0)} = 0, \qquad -\infty < u_0 \leqslant 0$$

Здесь c_1 — действительная постоянная ($c_1 = \pi^{-1}\operatorname{Re} c$).

Кроме условия (3.6) для функции $\zeta(w)$ на положительной части действительной оси u имеем вторые условия (2.14) и (2.15) (3.7)

$$\operatorname{Re}[e^{i\alpha}\zeta(u_0)] = \sin\alpha \quad (0 \leqslant u_0 \leqslant u_A), \qquad \operatorname{Re}\zeta(u_0) = 0 \quad (u_A \leqslant u_0 < +\infty)$$

Условие (3.6) является преобразованным выражением интеграла Лагранжа, и оно выполняется на отрицательном участке ($-\infty < u_0 \leqslant 0$) действительной оси u, которому в плоскости ζ соответствует неизвестная свободная граница жидкости. Условия (3.7) представляют собой геометрические условия для отображающей функции $\zeta(w)$.

Таким образом, задача для области с неизвестным участком границы свелась к краевой задаче об определении одной функции $\zeta(w)$, аналитической в верхней полуплоскости, по нелинейному условию (3.6) и (3.7), заданному на известной границе — на всей действительной оси.

4. Рассмотрим задачу о распространении непрерывного давления по свободной поверхности несжимаемой жидкости.

Пусть в момент $t = 0$ из точки 0 свободной поверхности начинает распространяться по поверхности некоторое непрерывное давление.

Начало декартовых координат x, y поместим в точке O, ось x направим горизонтально по невозмущенной свободной поверхности, ось y — вертикально вверх. Чтобы задача была автомодельной, будем считать, что функция $p(x, y, t)$, задающая распределение давления на свободной поверхности, зависит только от отношений x / v_0t, y / v_0t ($v_0 = \text{const}$). Поверхность жидкости под действием приложенного давления деформируется, форма ее не известна и должна быть определена в процессе решения.

Рассматриваемое движение жидкости потенциально. Задача об определении возмущенного движения жидкости сводится к нахождению потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$ — функции, гармонической по переменным x, y в области, занятой жидкостью, и удовлетворяющей следующим условиям:

условию на неизвестной деформированной поверхности жидкости

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{p(x, y, t)}{\rho} = 0 \tag{4.1}$$

условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |z| \to \infty$$

и начальному условию

$$\varphi(x, y, 0) = 0$$

Под p всюду понимается превышение давления над начальным постоянным давлением.

На свободной поверхности наряду с условием (4.1) имеется условие непроницаемости жидкой поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial f_0}{\partial t}=0 \tag{4.2}$$

Здесь $y=f_0(x,t)$ — уравнение неизвестной границы жидкости.

5. В автомодельных переменных функция $p(x,y,t)$ на поверхности жидкости будет иметь вид

$$p(x,y,t)\,|_S=\rho v_0^2\bar p(\xi,\eta)\,|_{\eta=\eta(\xi)}=\rho v_0^2 p(\xi)$$

Введем комплексный потенциал $V(\zeta)=\Phi(\xi,\eta)+i\Psi(\xi,\eta)$ $(\zeta=\xi+i\eta)$ и рассмотрим плоскость вспомогательной переменной w. Пусть функция $\zeta=\zeta(w)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость w на область движения жидкости в плоскости ζ так, что точка $\zeta=\infty$ переходит в точку $w=\infty$.

Из условия (4.2), так же как в предыдущей задаче, выразим функции $V'(w)$ и $V(w)$ через отображающую функцию $\zeta(w)$

$$V'(w)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\frac{du}{u-w} \tag{5.1}$$

$$V(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\ln(u-w)\,du+c \tag{5.2}$$

Здесь c — комплексная постоянная.

Находя предельные значения функций $V(w)$ и $V'(w)$ на действительной оси и исключая их из условия (4.1) (предварительно преобразованного, как в задаче о клине), получим

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\zeta'\bar\zeta'\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\ln|u-u_0|\,du+\frac{1}{\pi}\zeta\bar\zeta'\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\frac{du}{u-u_0}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\frac{du}{u-u_0}\right]^2-\frac{1}{2}[\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)]^2+\zeta'\bar\zeta'p(\operatorname{Re}\zeta)+c_1\zeta'\bar\zeta'=0 \tag{5.3}$$

Здесь c_1 — действительная постоянная.

Исходная задача свелась к краевой задаче для одной функции $\zeta(w)$, аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}w>0$ и удовлетворяющей на всей действительной оси условию (5.3).

6. Задавая форму свободной поверхности в плоскости ζ и подбирая аналитическую функцию $\zeta(w)$, отображающую верхнюю полуплоскость w на область плоскости ζ, ограниченную заданной кривой, из уравнения (5.3) можно получить давление, вызвавшее заданную деформацию поверхности, т. е. получить частное решение задачи обратным методом; при этом следует обратить внимание на следующее обстоятельство.

В выражение (5.3) входит интеграл типа Коши, а также интеграл с логарифмическим ядром и той же плотностью. Функция, представленная интегралом типа Коши, в бесконечно удаленной точке обращается в нуль, причем коэффициент при w^{-1} в разложении этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки с точностью до постоянного множителя равен интегралу

$$a_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar\zeta)\,du$$

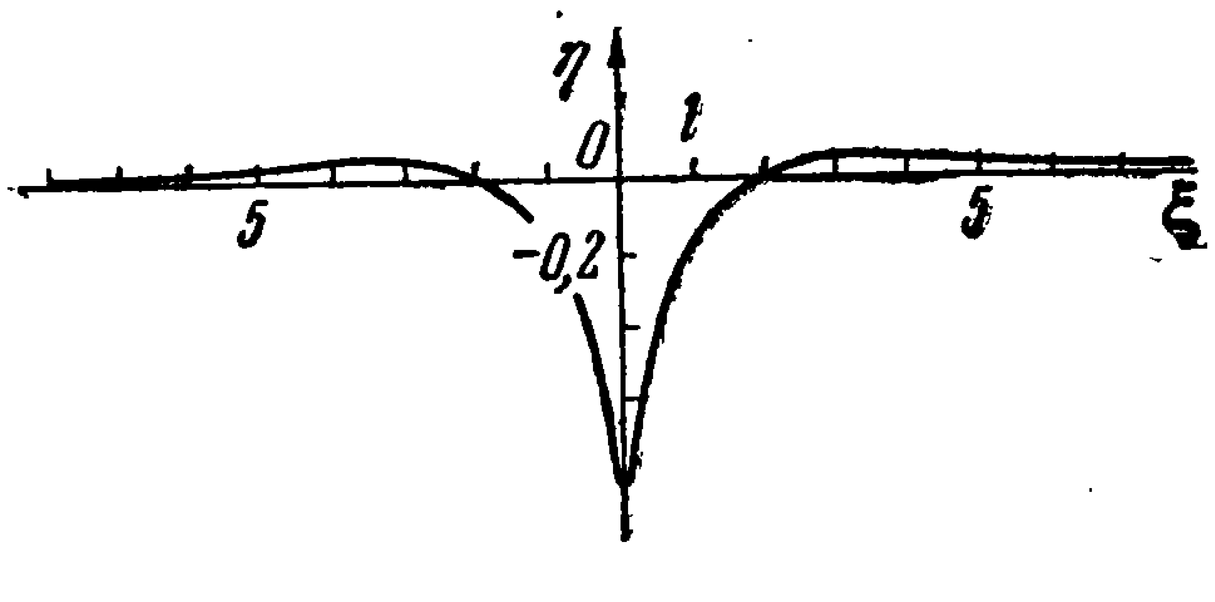
Если $a_1\neq 0$, наличие интеграла с логарифмическим ядром приведет к тому, что давление, полученное из уравнения (5.3), будет иметь на бесконечности логарифмическую особенность, т. е. будет бесконечно большим, вызывая при этом конечное перемещение частиц свободной поверхности. Чтобы этой особенности не было, функция

$\zeta(w)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})\,du = 0 \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1) является условием того, что положительная и отрицательная площади, ограниченные кривой свободной поверхности и действительной осью, равны, другими словами, (6.1) является следствием условия несжимаемости жидкости.

7. Пусть поверхность жидкости в плоскости ζ представлена кривой S, изображенной на фиг. 4.



Фиг. 4

Найдем давление, распространение которого по свободной поверхности вызывает заданную деформацию поверхности жидкости. Функция $\zeta(w)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость w на область, ограниченную заданной кривой S в плоскости ζ, имеет вид

$$\zeta(w) = -w + \frac{i\alpha}{(w+i\beta)^2} + \frac{\gamma}{w+i\delta} \tag{7.1}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные постоянные, причем $\beta > 0$, $\delta > 0$. Эти параметры нужно подобрать так, чтобы функция $\zeta(w)$ удовлетворяла условию (6.1), а также условию однолистности $|\zeta'(w) \neq 0|$ всюду в верхней полуплоскости

$$\left[1 + \frac{2i\alpha}{(w+i\beta)^3} + \frac{\gamma}{(w+i\delta)^2}\right] \neq 0 \qquad \text{при } \operatorname{Im} w > 0 \tag{7.2}$$

Вычисляя при помощи теории вычетов интеграл (6.1), получим из (6.1) уравнение

$$\frac{3\alpha^2}{8\beta^4} + \frac{4\alpha\gamma}{(\beta+\delta)^3} + \frac{\gamma^2}{4\delta^2} - \gamma = 0 \tag{7.3}$$

которому должны удовлетворять $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Параметрическое уравнение кривой S

$$\xi = -u + \frac{2\alpha\beta u}{(u^2+\beta^2)^2} + \frac{\gamma u}{u^2+\delta^2}, \qquad \eta = \frac{\alpha(u^2-\beta^2)}{(u^2+\beta^2)^2} - \frac{\gamma\delta}{u^2+\delta^2} \tag{7.4}$$

Давление, вызвавшее заданную деформацию поверхности, определится из уравнения (5.3)

$$p(u) + \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{Re}\zeta\bar{\zeta}'}{\zeta'\bar{\zeta}'}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})\frac{du_1}{u_1-u} + \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta'\bar{\zeta}'}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})\frac{du_1}{u_1-u}\right]^2 +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})\ln|u_1-u|\,du_1 - \frac{1}{2}\frac{[\operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})]^2}{\zeta'\bar{\zeta}'} + c_1 = 0 \tag{7.5}$$

Действительная постоянная c_1 находится из условия

$$p = 0 \qquad \text{при } |u| \to \infty \tag{7.6}$$

а сингулярный интеграл с ядром Коши и интеграл с логарифмическим ядром вычисляются при помощи теории вычетов и имеют вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta})\frac{du_1}{u_1-u} = 2\alpha\left[\frac{3\alpha}{8\beta^4} + \frac{2\gamma}{(\beta+\delta)^3}\right]\frac{u}{u^2+\beta^2} - 2\gamma\left[1 - \frac{2\alpha}{(\beta+\delta)^3} - \frac{\gamma}{4\delta^2}\right]\frac{u}{u^2+\delta^2} -$$
$$-4\alpha\beta\left[1 - \frac{\alpha}{4\beta^3} - \frac{\gamma}{(\beta+\delta)^2}\right]\frac{u}{(u^2+\beta^2)^2} + \gamma(\gamma+2\delta^2)\frac{u}{(u^2+\delta^2)^2} + \frac{4\alpha\beta u(\beta^2-u^2)+2\alpha^2 u}{(u^2+\beta^2)^3} +$$
$$+\frac{2\alpha\gamma u\,[\beta(u^2-\delta^2) - \delta(u^2-\beta^2)]}{(u^2+\delta^2)^2(u^2+\beta^2)^2} - \frac{2\alpha\gamma\delta u(u^2-3\beta^2) + 2\alpha\beta\gamma u(\beta^2-3u^2)}{(u^2+\beta^2)^3(u^2+\delta^2)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(i\zeta'\bar{\zeta}) \ln|u_1 - u|\, du_1 = \alpha\left[\frac{3\alpha}{8\beta^4} + \frac{2\gamma}{(\beta+\delta)^3}\right]\ln\frac{u^2+\beta^2}{u^2+\delta^2} +$$

$$+ 2^\alpha\beta\left[2 - \frac{\alpha}{4\beta^3} - \frac{\gamma}{(\beta+\delta)^2}\right]\frac{1}{u^2+\beta^2} - \frac{\gamma(\gamma+2\delta^2)}{2}\frac{1}{u^2+\delta^2} - \frac{\alpha(4\beta^3+\alpha)}{2}\frac{1}{(u^2+\beta^2)^2} +$$

$$+ \frac{2\alpha\gamma\beta\delta(\delta-\beta)}{(\beta^2-\delta^2)^2}\left[\frac{1}{u^2+\beta^2} + \frac{1}{u^2+\delta^2}\right] + \frac{\alpha\gamma\delta}{(\beta^2-\delta^2)^2}\frac{u^2+\beta^2}{u^2+\delta^2} -$$

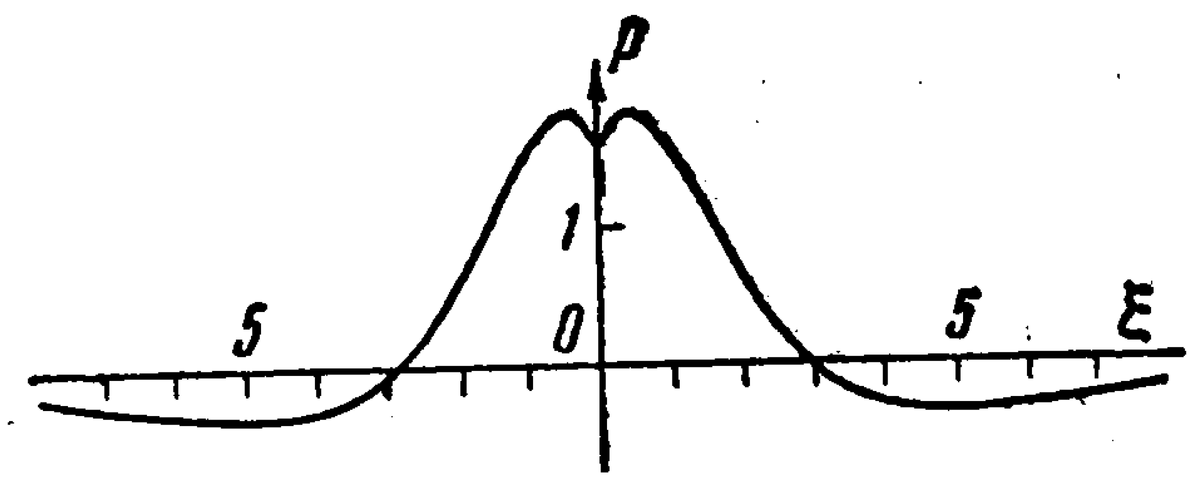
$$- \frac{\alpha\gamma(7\beta^2\delta + \delta^3 - 4\beta^3 - 4\beta\delta^2)}{(\beta^2-\delta^2)^3}\frac{u^2+\delta^2}{u^2+\beta^2} + \frac{2\alpha\gamma\beta^2(\delta-\beta)}{(\beta^2-\delta^2)^3}\left(\frac{u^2+\delta^2}{u^2+\beta^2}\right)^2$$

Уравнению (7.3) удовлетворяет, например, следующая комбинация параметров

$$\alpha = 3.2003, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 0.25, \qquad \delta = 5 \tag{7.7}$$

При этом неравенство (7.2) также выполняется, так как для заданных параметров α, β, γ, δ модуль функции, представленной суммой второго и третьего слагаемого в выражении (7.2), не может быть больше 0.801 всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$.

Для заданных параметров α, β, γ, δ из условия (7.6) получим, что $c_1 = -0.00829$. Кривая давления в безразмерном виде для параметров (7.7) вычислена по формуле (7.5) и представлена на фиг. 5.



Фиг. 5

Таким образом, если к свободной поверхности жидкости приложено давление, представленное кривой, изображенной на фиг. 5, точное решение задачи о возникшем движении жидкости дается формулами (5.2), (7.1) и (7.4).

Формулы (5.2) и (7.1) определяют комплексный потенциал скорости во всей области движения жидкости (в плоскости w), формулы (7.4) задают параметрическое уравнение кривой деформированной поверхности жидкости в плоскости ζ (фиг. 4). Функция $\zeta(w)$, задаваемая формулой (7.1), отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на область, близкую области, занятой жидкостью при внедрении в нее клина. Это обстоятельство дает возможность использовать полученную функцию (7.1) в качестве нулевого приближения при отыскании решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения в случае задачи о проникании клина.

Поступила 18 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner H. Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flussigkeiten ZAMM, 1932, Nr. 4, S. 194—215.
2. Седов Л. И. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1934, вып. 187.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
4. Mackie A. G. A linearized theory of the water entry problem. Quart. J. Mech. Appl. Math., may 1962, v. XV, part. 2.
5. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1962.
6. Garabedian P. R. Oblique water Entry of a wedge. Commun. Pure Appl. Math., 1953, vol. VI.
7. Borg S. F. Some contributions to the wedge water entry problem. J. Engr. Mech. Division Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 1957, apr. v. 83, No. 2.
8. Борисова Э. П., Корявов П. П., Моисеев Н. Н. Плоские и осесимметричные автомодельные задачи погружения и соударения струй. ПММ, 1959, XXIII, вып. 2.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.