

ВИХРЬ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. И. Гуревич

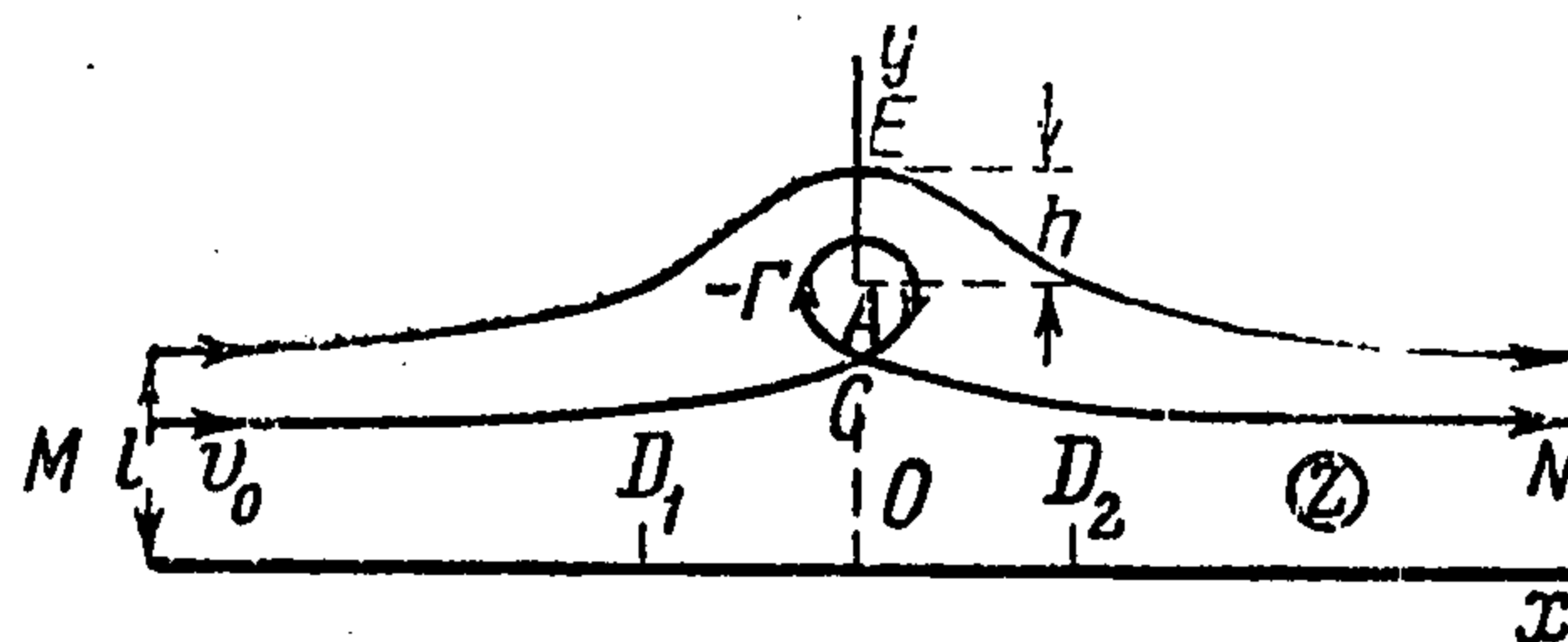
(Москва)

В основных работах по теории подводного крыла принимается, что свободная поверхность мало отличается от горизонтального уровня невозмущенной жидкости [1,2]. Такой подход заранее исключает применение теории к случаю малых погружений крыла. Поэтому полезно произвести исследование особенностей случая малых погружений с помощью точного решения, хотя бы упрощенной, задачи.

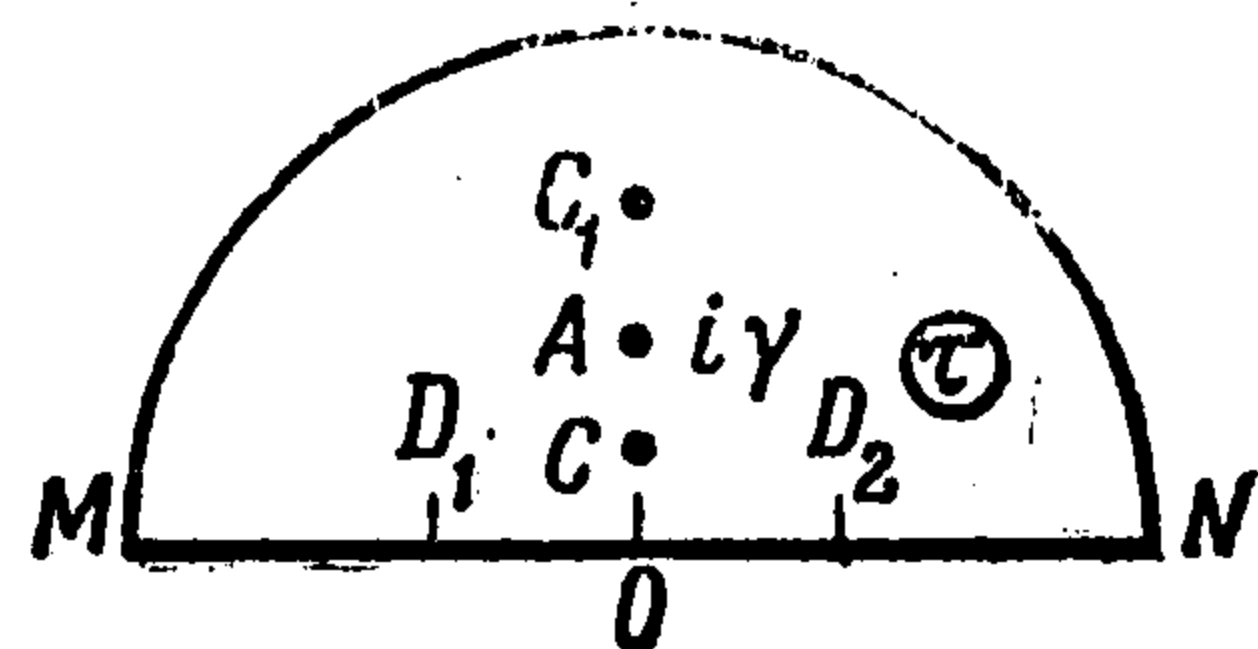
Ниже решена плоская задача об обтекании вихря потоком идеальной, несжимаемой, невесомой жидкости, имеющей свободную поверхность. Снизу поток ограничен твердой горизонтальной стенкой.

Теорией струйных течений, внутри которых имеются особенности, занимался впервые Гопкинсон [3]. Наиболее близкие к рассматриваемой задаче были решены Н. Симмонсом [4] и А. А. Никольским [5].

§ 1. Общее решение задачи. Пусть w — комплексный потенциал, $\zeta = dw / v_0 dz$ — безразмерная комплексная скорость обтекания вихря, расположенного на глубине h под свободной поверхностью (фиг. 1). Расход жидкости обозначим через $q / 2 = lv_0$,



Фиг. 1



Фиг. 2

где v_0 — скорость и l — глубина потока в бесконечности. Можно будет считать, что общее решение задачи получено, если будут найдены конформные отображения областей изменения w и ζ на некоторую каноническую область изменения параметрического переменного τ . Выберем в качестве этой области верхний полукруг единичного радиуса с центром в начале координат (фиг. 2).

Если особые точки и нули функций $w(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ в единичном полукруге известны, то, продолжая с помощью зеркального отображения $w(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ на всю плоскость τ , можно найти все их особые точки и нули. После этого функции $w(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ легко могут быть построены [6].

Начнем с функции $w(\tau)$. Эта функция имеет логарифмические особенности в точке $A(\tau = i\gamma)$, где помещается вихрь с циркуляцией $-\Gamma$ и в точках $M(\tau = -1)$ и $N(\tau = 1)$, в которых находятся источник и сток. После продолжения функции $w(\tau)$ на всю плоскость переменного τ легко убеждаемся в том, что логарифмические особенности будут иметь еще место в точках $\tau = -i\gamma^{-1}$ (циркуляция $-\Gamma$) и $\tau = -i\gamma$, $\tau = i\gamma^{-1}$ (циркуляция Γ). Функция $w(\tau)$ имеет вид

$$w = \frac{q}{\pi} \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(\tau - i\gamma)(\tau + i\gamma^{-1})}{(\tau + i\gamma)(\tau - i\gamma^{-1})} \tag{1.1}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что: 1) в точке $\tau = i\gamma$ имеется вихрь с циркуляцией $-\Gamma$; 2) вдоль единичной полуокружности (свободная поверхность) $\psi = 1/2q$ и вдоль действительного диаметра (дно) $\psi = 0$. Из (1.1) получаем

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{[2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)](\tau^4 + 2\kappa\tau^2 + 1)}{\pi(1 - \tau^2)(\tau^2 + \gamma^2)(\tau^2 + \gamma^{-2})} \tag{1.2}$$

где

$$2\kappa = \frac{\gamma^{-2} + \gamma^2 + \Gamma q^{-1}(\gamma^{-1} - \gamma)}{1 - 1/2\Gamma q^{-1}(\gamma^{-1} - \gamma)}$$

Так как отображение области течения z на внутренность единичного полукруга конформно, то внутри этого полукруга dz/dt не равно ни нулю, ни бесконечности, поэтому в критических точках $dw/d\tau = 0$. Найдем значения τ в критических точках. Они получаются из решения уравнения

$$\tau^4 + 2\kappa\tau^2 + 1 = 0$$

имеем

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}^2 &= -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1} + \kappa} \\ \tau_{3,4}^2 &= -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Прежде всего заметим, что $\kappa^2 > 1$, так как в противном случае $|\tau_k| = 1$, и мы имели бы критические точки на свободной поверхности, что невозможно.

Рассмотрим случай $\kappa > 0$. При этом $|\tau_{1,2}| < 1$, а $|\tau_{3,4}| > 1$. Внутри потока будет существовать только одна критическая точка C , которой в области τ будет соответствовать точка (фиг. 1, 2)

$$\tau_1 = \delta = i \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}} = \frac{i}{\sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}} \quad (1.4)$$

Сопряженная точке C точка в плоскости τ имеет аффикс $\tau_2 = \bar{\delta} = -\delta$. Очевидно также, что $\tau_3 = \delta^{-1} = -\tau_4$.

В случае $\kappa < 0$, наоборот, $|\tau_{3,4}| < 1$, а $|\tau_{1,2}| > 1$. При этом, на границе потока — на твердой стенке будут существовать две критические точки

$$\tau_3 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa}} = \delta, \quad \tau_4 = -\delta \quad (1.5)$$

Кроме того, заметим, что $\tau_1 = -\tau_2 = \delta^{-1}$.

Переходному случаю $\kappa = \infty$ соответствует одна критическая точка O при $\tau = 0$. После сделанных замечаний легко построить функцию ζ . Функция $\zeta = dw/v_0 dz$ будет помимо нулей в критических точках иметь полюс в точке A ($\tau = i\gamma$). После продолжения через действительную ось τ , вдоль которой $\text{Im } \zeta = 0$, нулям функции ζ в сопряженных точках соответствуют нули, а полюсам — полюсы. При продолжении через окружность $|\tau| = 1$, вдоль которой $|\zeta| = 1$, нули функции ζ переходят в полюсы, а полюсы в нули. В результате получим

$$\zeta = \frac{dw}{v_0 dz} = \frac{(\tau^2 - \delta^2)(\gamma^2 \tau^2 + 1)}{(1 - \tau^2 \delta^2)(\tau^2 + \gamma^2)} \quad (1.6)$$

Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что $\zeta(\tau)$ имеет в области течения надлежащие особенности, вдоль дна $\text{Im } \zeta = 0$, на свободной поверхности $|\zeta| = 1$ и $\zeta = 1$ при $\tau = \pm 1$. Что же касается величины δ , то она при $\kappa > 0$ определяется из (1.4), а при $\kappa < 0$ — из (1.5).

Формулы (1.6) и (1.1) или (1.2) дают общее решение задачи.

§ 2. Глубина погружения вихря. Функция $z(\tau)$ легко находится из (1.6) и (1.2)

$$z(\tau) = \frac{1}{v_0} \int \frac{v_0 dz}{dw} \frac{dw}{d\tau} d\tau = \frac{[2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)] \delta^2}{\pi v_0 \gamma^2} \int \frac{(\tau^2 - \gamma^{-2})^2 d\tau}{(\tau^2 + \gamma^{-2})^2 (1 - \tau^2)} \quad (2.1)$$

Интеграл, входящий в (2.1), вычисляется в элементарных функциях

$$z = -\frac{[2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)] \delta^2}{v_0 \pi \gamma^2} \left[\frac{B\gamma^2}{2} \frac{\tau}{\tau^2 + \gamma^{-2}} + \frac{C\gamma}{2i} \ln \frac{i\gamma^{-1} - \tau}{i\gamma^{-1} + \tau} + \frac{A}{2} \ln \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right] \quad (2.2)$$

где

$$A = \frac{(1 - \delta^{-2})^2}{(1 + \gamma^{-2})^2}, \quad B = \frac{(\gamma^{-2} + \delta^{-2})^2}{1 + \gamma^{-2}}, \quad C = \frac{(\gamma^{-2} + \delta^{-2})}{2(1 + \gamma^{-2})^2}, \quad \left[3 \left(\frac{1}{\delta^2} - 1 \right) - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\delta^2} \right]$$

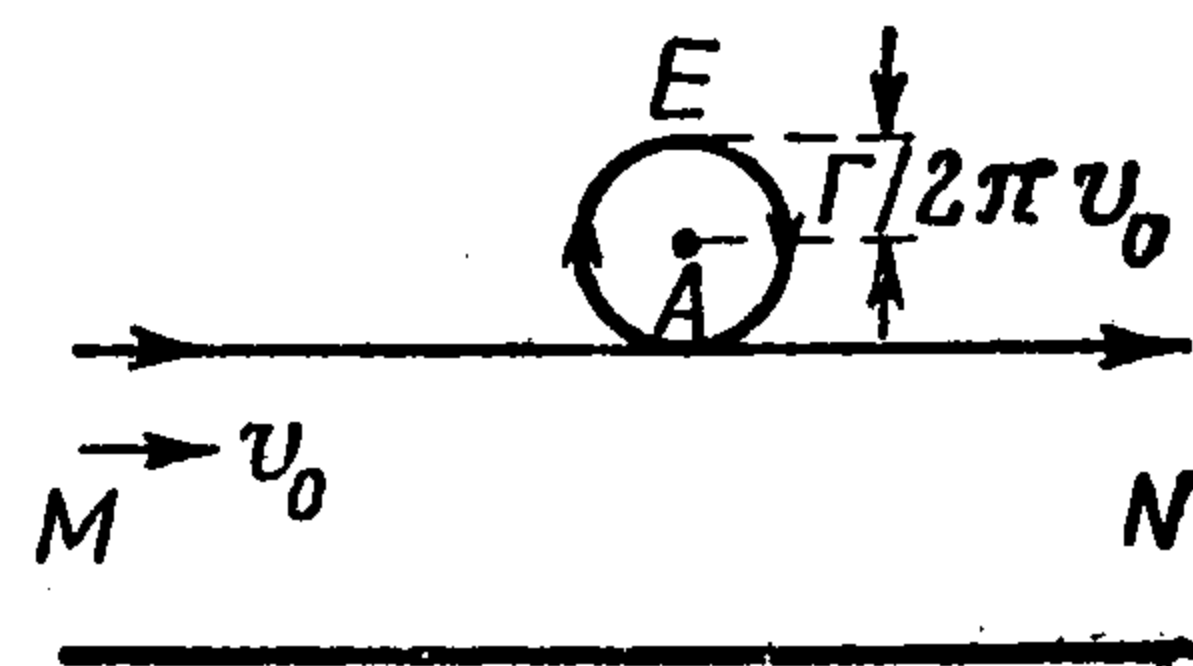
и постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы $z = 0$ при $\tau = 0$ (фиг. 1,2). Глубина погружения h вихря под свободной поверхностью равна

$$h = \frac{z(i) - z(i\gamma)}{i} = - \frac{[2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)] \delta^2}{v_0 \pi \gamma^2} \left[\frac{B\gamma^4}{2} \frac{1 + \gamma^2 - \gamma}{1 - \gamma^4} - \frac{C\gamma}{2} \ln \frac{1 + \gamma^2}{(1 + \gamma)^2} + A \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \gamma \right) \right] \quad (2.3)$$

С первого взгляда на фиг. 1 и 2 может показаться, что при $\gamma \rightarrow 1$ глубина погружения вихря $h \rightarrow 0$. Однако это не так. Существует наименьшая возможная глубина погружения вихря h_{\min} . Выше подняться вихрь без нарушения схемы обтекания не может. В реальном случае подводного крыла этому обстоятельству соответствует засасывание воздуха, т. е. появление кавитации при подходе крыла слишком близко к свободной поверхности. Положим $\gamma = 1 - \epsilon$, где ϵ — бесконечно малая положительная величина. Тогда получим асимптотические формулы

$$\delta \approx i \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma \epsilon}{q}} \right), \quad - \frac{[2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)] \delta^2}{v_0 \pi \gamma^2} \approx \frac{2q}{v_0 \pi}$$

$$B \approx 2\Gamma \epsilon / q, \quad A \approx 1, \quad C \approx 2 \sqrt{\Gamma \epsilon / q}$$



Фиг. 3

После подстановки этих величин в (2.3) и перехода к пределу найдем, что

$$h_{\min} = \frac{\Gamma}{2\pi v_0} \quad (2.4)$$

Отметим, что величина h_{\min} не зависит от расхода $q/2$.

§ 3. Подъемная сила вихря. При помощи теоремы о проекциях производной количества движения легко убедиться в том, что вихрь в невесомой жидкости имеет только подъемную силу Y и не имеет сопротивления $X = 0$. Подъемную силу вихря нетрудно подсчитать различными способами. В частности, так как при неограниченном приближении к вихрю линии тока превращаются в бесконечно малые замкнутые контуры, охватывающие вихрь, то силу, действующую на вихрь, можно подсчитать с помощью интеграла по бесконечно малому контуру

$$X + iY = \frac{i\rho}{2} \oint \left(v_0^2 - \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} \right) dz = - \frac{i\rho}{2} \oint \frac{dw}{dz} dw \quad (3.1)$$

В результате вычислений находим

$$Y = \frac{\rho v_0 [2q - \Gamma(\gamma^{-1} - \gamma)] (\gamma^2 + \delta^2)}{4\delta^2 \gamma (1 + \gamma^2)^2} [\delta^2 (1 + 3\gamma^2) - \gamma^2 (3 + \gamma^2)] \quad (3.2)$$

Нетрудно убедиться, что при минимальном погружении ($\gamma \rightarrow 1$) подъемная сила равна нулю, так как $\lim (\gamma^2 + \delta^2) = 0$, при $\gamma \rightarrow 1$, а остальные множители конечны

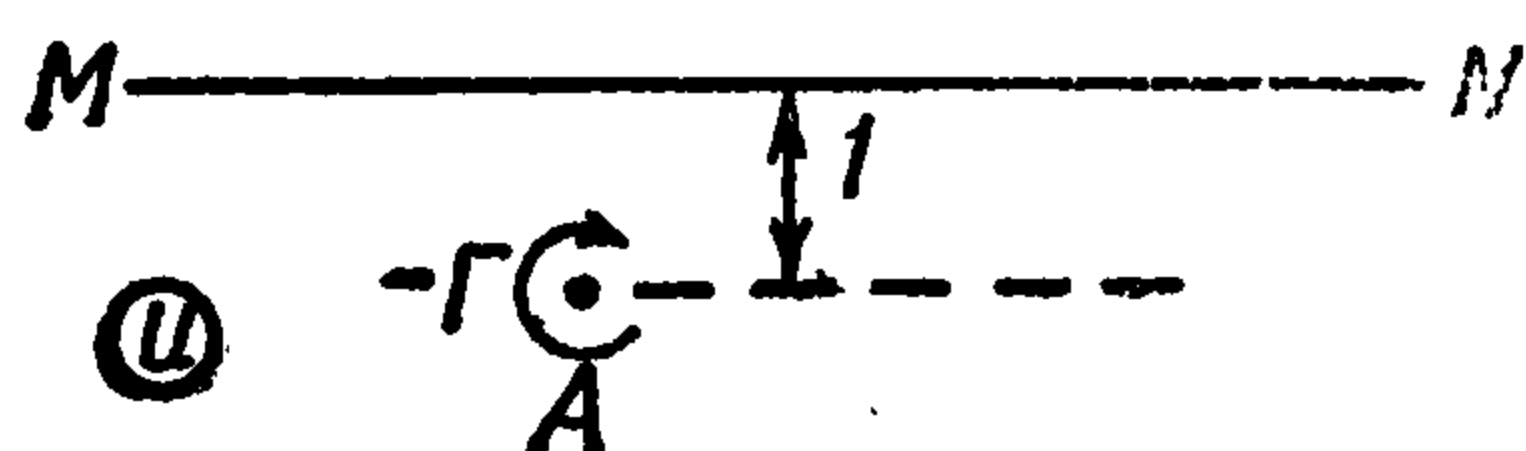
По интересному замечанию С. С. Григоряна в предельном случае $\gamma = 1$ мы имеем схему течения, изображенную на фиг. 3.

§ 4. Предельный случай бесконечно большой глубины. Переход в общих формулах § 1 к случаю бесконечной глубины связан с известными неудобствами, так как при бесконечно большой глубине в потоке имеется только одна бесконечно удаленная точка, а в области переменного τ бесконечно удаленные точки M и N разделены конечным отрезком. Предельный переход к случаю бесконечной глубины довольно просто совершить, заменив параметрическое переменное τ новым параметрическим переменным u , изменяющимся в нижней полуплоскости. Окончательное решение для случая бесконечной глубины будет иметь вид

$$\frac{dw}{v_0 dz} = \frac{i - u}{i + u} \frac{i \sqrt{1 + \Gamma/Q} + u}{i \sqrt{1 + \Gamma/Q} - u}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{Q}{\pi} \frac{u^2 + 1 + \Gamma/Q}{u^2 + 1} \quad (4.1)$$

Отображение на нижнюю полуплоскость выбрано таким образом, чтобы вихрю соответствовала точка $u = -i$ (фиг. 4), а точки M и N удалились в бесконечность.

Решение в случае бесконечной глубины при помощи отображения на внутренности круга может быть легко получено из решения А. А. Никольского [5] задачи о вихре в свободной струе конечной толщины.



Фиг. 4

Подъемная сила вихря в бесконечно глубокой невесомой жидкости определяется так:

$$Y = \rho v_0 \Gamma \frac{2}{\sqrt{1 + \Gamma/Q + 1 + \Gamma/Q + 1}}$$

При бесконечной глубине погружения вихря $\Gamma/Q = 0$ и $Y = \rho v_0 \Gamma$.

При минимальной глубине ($\Gamma/Q \rightarrow \infty$) подъемная сила равна нулю.

§ 5. Случай углубляющей силы. Рассмотрим еще случай, когда циркуляция вихря направлена против часовой стрелки, т. е. обратно тому, как это изображено на фиг. 4. Схема получающегося при этом течения изображена на фиг. 5. Заметим, что критическая точка C_1 будет выше точки A и в области параметрического переменного τ (см. фиг. 2). Комплексная скорость будет по-прежнему выражаться формулой (1.6), а в формулах (1.1) и (1.2) следует заменить Γ на $-\Gamma$. Для того чтобы течение существовало, нужно, как это было отмечено выше, чтобы $\kappa^2 > 1$. Заменяя в выражении для κ циркуляцию Γ через $-\Gamma$ и преобразуя его, находим

$$\kappa = \frac{(\gamma + \gamma^{-1})^2}{2 + \Gamma q^{-1} (\gamma^{-1} - \gamma)} - 1 \quad (5.1)$$

Так как $0 < \gamma < 1$, то очевидно, что κ не может быть меньше -1 , и поэтому решение задачи возможно только при $\kappa > 1$. Подставляя в это неравенство κ из (5.1), приходим к неравенству

$$\gamma^{-1} - \gamma > 2\Gamma/q \quad (5.2)$$

В предельном случае неравенство (5.2) превращается в равенство, в результате получим

$$\gamma = \sqrt{\Gamma^2/q^2 + 1} - \Gamma/q, \quad \delta = i$$

Этот предельный случай недостижим, так как критическая точка не может выйти и свободную поверхность.

Пользуясь (2.3), можно получить наименьшую возможную величину погружения вихря. В рассматриваемом случае сила Y (см. (3.2)), действующая на вихрь, будет не подъемной, а углубляющей. При приближении вихря к дну $Y \rightarrow -\infty$. Значение Y , при стремлении точки A к максимально высокому положению, стремится к величине

$$-\rho v_0 \Gamma (2 + \Gamma^2/q^2)$$

Поступила 27 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. К е л д ы ш М. В. и Л а в р е н т ь е в М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Тр. Конф. по теории волнового сопротивления. ЦАГИ, М., 1937.
2. К о ч и н Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Тр. Конф. по теории волнового сопротивления. ЦАГИ, М., 1937.
3. Н о р к и н с о н В. Free streamline flows with singularities. Proc. London Math. Soc., 1898, vol. 29.
4. S i m m o n s N. Free stream-line flow past vortices and Aerofoils. Quart. J. Math Oxford, Dec. 1939.
5. Н и к о л ь с к и й А. А. Обтекание вихря плоскопараллельным потоком со свободными границами. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 6.
6. Г у р е в и ч М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.