О ПЕРМАНЕНТНЫХ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ Д. Н. ГОРЯЧЕВА

Н. Г. Апыхтин

(Москва)

Перманентные оси вращения твердого тела с одной неподвижной точкой, находящегося в однородном поле сил, были открыты Б. К. Млодзеевским [1] и О. Штауде [2] в 1894 г. Конус перманентных вращений тяжелого твердого тела рассмотрен В. В. Румянцевым [3], который исследовал их устойчивость.

В работах Д. Н. Горячева [4,5] указаны интегралы движения и те силы, под действием которых находится тело с закрепленной точкой.

Ниже определяются перманентные оси вращения твердого тела, находящегося под действием сил, допускающих интегралы Д. Н. Горячева.

Уравнение движения. Как обычно, положение твердого тела с закрепленной точкой O будем определять положением прямоугольных осей $Ox_1x_2x_3$ неизменно связанных с телом и направленных по главным осям инерции, соответствующим этой точке, относительно неподвижной в пространстве прямоугольной системы $O\xi\eta\zeta$. Положение осей x_i в неподвижной системе определим девятью косинусами α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$, между которыми существуют зависимости

$$\alpha_i = \beta_{i+1}\gamma_{i+2} - \beta_{i+2}\gamma_{i+1} \qquad (\beta_i, \gamma_i)$$

где каждый индекс не должен превышать *3*, что достигается, в противном случае, вычитанием 3. Уравнения для направляющих косинусов подвижных осей есть

$$d\alpha_i / dt = \alpha_{i+1}p_{i+2} - \alpha_{i+2}p_{i+1} \tag{0.1}$$

Здесь p_i проекции мгновенной угловой скорости вращения тела на подвижные оси. К девяти уравнениям (0.1) добавим три динамических уравнения Эйлера

$$A_i dp_i / dt = (A_{i+1} - A_{i+2})\, p_{i+1}p_{i+2} + L_i \tag{0.2}$$

Здесь L_i есть моменты внешних сил относительно осей x_i, A_i — главные моменты инерции относительно тех же осей.

Если внешние силы зависят только от положения твердого тела и, кроме того, допускают силовую функцию U, то величины L_i в зависимости от нее и указанных косинусов будут таковы:

$$L_i = f(\alpha_i) + f(\beta_i) + f(\gamma_i), \qquad f(x_i) = x_{i+2}\, \partial U / \partial x_{i+1} - x_{i+1}\, \partial U / \partial x_{i+2} \tag{0.3}$$

1. Притяжение нескольких точек твердого тела неподвижной плоскостью. Четвертый алгебраический интеграл уравнений (0.1) и (0.2) существует [5], если моменты инерции $A_1 = A_2 = 2A_3$, внешние силы допускают силовую функцию

$$U = A_1 \left[a (n-1)^{-1}\gamma_3^{1-n} + {}^1/_2 b (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2\right] \; (n = 3) \tag{1.1}$$

Здесь, не меняя рассуждений, будем полагать $a > b > 0$, $c_k > 0$, n — целое положительное. Если в (1.1) положить $a = b = 0$, то получим случай С. В. Ковалевской: постоянная сила действует вдоль оси ζ на точку, лежащую в экваториальной плоскости эллипсоида инерции тела. При a и b, отличных от нуля, имеем расширенный случай С. В. Ковалевской в смысле добавления внешних сил. Член с a отражает действие силы, приложенной к одной из точек оси x_3 и имеющей направление оси ζ; величина этой силы обратно пропорциональна n —степени расстояния точки ее приложения от неподвижной плоскости $\xi\eta$. Член с b соответствует силам R_1 и R_2, параллельным оси ζ, сила R_1 приложена к точке оси x_1, сила R_2 — к точке оси x_2, на расстояниях d_1 и d_2 от неподвижной плоскости $\xi\eta$; $R_1 = -md_1$, $R_2 = md_2$, где m — постоянная.

Посмотрим, при каких условиях рассматриваемое тело будет иметь неизменную (перманентную) ось вращения. Известно, что если ось вращения неподвижна в пространстве, то она неподвижна и в теле. Поэтому, обозначая угловую скорость через ω, а косинусы углов перманентной оси с осями инерции тела через l_i, будем иметь $p_i = l_i\omega$; l_i от времени не зависят и удовлетворяют условию

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{1.2}$$

Вычисляя внешние моменты по формулам (0.3), имеем уравнения движения твердого тела

$$\begin{aligned} l_1 d\omega / dt &= {}^1/_2 l_2 l_3 \omega^2 + b\gamma_2\gamma_3 + a\gamma_2\gamma_3^{-n} - c_2\gamma_3 \\ l_2 d\omega / dt &= -{}^1/_2 l_1 l_3 \omega^2 + b\gamma_1\gamma_3 - a\gamma_1\gamma_3^{-n} + c_1\gamma_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$${}^1/_2\, l_3 d\omega \,/\, dt = c_2\gamma_1 - c_1\gamma_2 - 2b\gamma_1\gamma_2, \qquad d\gamma_i \,/\, dt = \omega\,(l_{i+2}\gamma_{i+1} - l_{i+1}\gamma_{i+2}) \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) допускают интегралы площадей и живых сил

$$(l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + {}^1/_2\, l_3\gamma_3)\,\omega = k_1 \tag{1.5}$$

$$(l_1^2 + l_2^2 + {}^1/_2\, l_3^2)\,\omega^2 = 2\,[a\,(n-1)^{-1}\gamma_3^{1-n} + {}^1/_2\, b\,(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 + h] = 2n$$

Отсюда, исключая угловую скорость, имеем

$$l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + {}^1/_2\, l_3\gamma_3 = k_1\,(2n)^{-1/2}\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + {}^1/_2\, l_3^2} \tag{1.6}$$

Уравнения (1.4) допускают интегралы

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + l_3\gamma_3 = k_2 \tag{1.7}$$

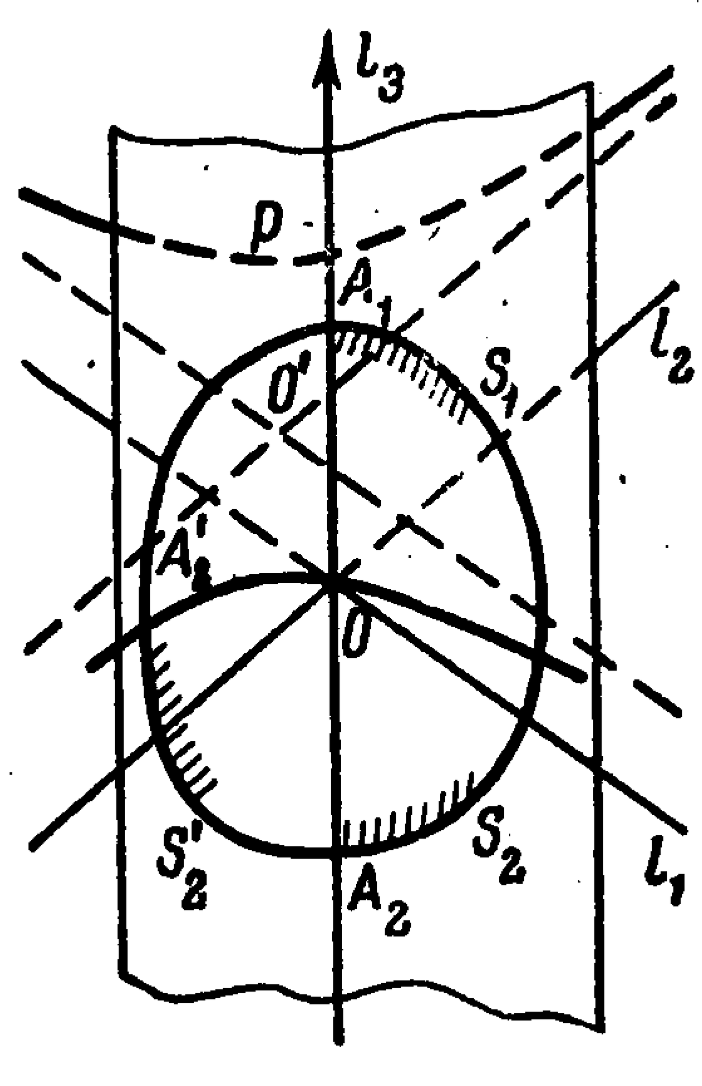
1) Если соотношение (1.6) не есть следствие второго соотношения (1.7), то система уравнений (1.6) и (1.7) может быть принята для определения γ_i. В случае разрешимости указанной системы относительно γ_i эти величины определятся через постоянные k_1, k_2, l_i, a, b, c_k, h и будут, следовательно. постоянными. А тогда уравнения (1.4) дают

$$\gamma_1 \,/\, l_1 = \gamma_2 \,/\, l_2 = \gamma_3 \,/\, l_3 \tag{1.8}$$

Откуда следует на основании (1.3) и (1.7), что

$$l_1 = \gamma_1, \qquad l_2 = \gamma_2, \qquad l_3 = \gamma_3 \tag{1.9}$$

т. е. перманентной осью будет ось ζ. Угловая скорость, определяемая из интеграла живых сил, будет при этом также постоянная. Уравнения, определяющие перманентные оси в твердом теле, имеют вид



$$[(-1)^i b - {}^1/_2\, \omega^2]\, l_{i+1} l_{i+2} - a l_{3-i}\, l_3^{-n} + c_{3-i}\, l_3 = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.10}$$

$$c_2 l_1 - c_1 l_2 - 2b l_1 l_2 = 0 \tag{1.11}$$

Уравнения (1.10) исключением ω^2 приводятся к уравнению (1.11). Последнее в пространстве $Ol_1l_2l_3$ определяет гиперболический цилиндр с образующими, параллельными Ol_3 и проходящими через равнобочную гиперболу, лежащую (фиг. 1) в плоскости l_1l_2, вершина которой находится в точке O' $(-c_1 \,/\, 2b,\ c_2 \,/\, 2b)$, полуось равна $1 \,/\, b\, \sqrt{{}^1/_2 c_1 c_2}$, а действительная ось параллельна биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

Значения направляющих косинусов l_i удовлетворяют, кроме того, условию (1.2). Следовательно, если из неподвижной точки, как из центра, провести сферу единичного радиуса, то геометрическое место точек пересечения гиперболического цилиндра (1.11) с этой сферой представится в виде двух замкнутых ветвей некоторой сферической кривой, каждой точке которой соответствует одна из перманентных осей, и, наоборот каждой перманентной оси соответствует одна точка сферической кривой. Одна из ветвей цилиндра (1.11) проходит через ось l_3, поэтому одна ветвь сферической кривой существует всегда. Она проходит по цилиндру (фиг. 1) и сфере через точки A_1 (0, 0, 1) и A_2 (0, 0, — 1). Вторая ветвь сферической кривой может существовать в том случае, когда координаты ближайшей до начала координат точки P $(x_1, x_2, 0)$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, где x_i находятся из (1.11), а также из условия прохождения нормали к гиперболе (1.11)

$$(l_1 - x_1)(c_1 + 2bx_1) + (l_2 - x_2)(c_2 - 2bx_2) = 0$$

через начало координат, которое эквивалентно равенству

$$c_1x_1 + c_2x_2 + 2b(x_1^2 - x_2^2) = 0 \qquad (1.12)$$

Следует отметить, что перманентными осями могут быть лишь те, для которых уравнения (1.10) дают положительную величину для ω^2. Следуя Штауде, все такие линии, а также им соответствующие точки сферической кривой будем называть допускаемыми в задаче, а остальные — недопускаемыми.

Допускаемыми в данном случае будут точки сферической кривой, координаты которых удовлетворяют условиям

$$c_i / l_i \geqslant a l_3^{-n-1} + (-1)^i b \qquad (i = 1, 2) \qquad (1.13)$$

Рассмотрим цилиндрические поверхности

$$l_i = \frac{c_i l_3^{n+1}}{a + (-1)^i b l_3^{n+1}} \qquad (i = 1, 2) \qquad (1.14)$$

Если n нечетно, то поверхности (1.14) делят первую сферическую кривую (фиг. 1) в точках S_1 и S_2, симметрично расположенных относительно плоскости l_1l_2. Допускаемыми будут точки на дугах A_1S_1 и A_2S_2. Если n четно, то поверхности (1.14) делят первую сферическую кривую в точках S_1 и S_2'. Условиям (1.13) удовлетворяют точки, лежащие на дугах A_1S_1 и $A_2'S_2'$.

Точки на второй сферической кривой допускаемыми не будут.

2) Если соотношение (1.6) представляют собой следствия (1.7), то γ_i и ω могут быть и непостоянными. В этом случае перманентные оси будут иного рода, чем разобранные выше. Эквивалентность (1.6) и второго равенства (1.7) состоит в пропорциональности коэффициентов при γ_i в этих равенствах

$$\frac{l_1}{l_1} = \frac{l_2}{l_2} = \frac{l_3}{2l_3} = \frac{k_1 \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}\,{}^{1/2}}{\sqrt{2n}k_2} \qquad (1.15)$$

Соотношения (1.15) выполнены, если $l_3 = 1$, $k_1 = k_2 = l_1 = l_2 = 0$. Тогда из интеграла площадей имеем $\gamma_3 = 0$. Таким свойством обладает твердое тело, вращающееся вокруг оси x_3, расположенной в плоскости, притягивающей тело. Не нарушая общности, расположим x_3 по ξ. В ортогональной к оси вращения плоскости x_1x_2 лежат три силы постоянного направления, одна из которых постоянна и по величине (сила тяжести), а величины двух остальных пропорциональны расстояниям точек их приложения до оси η. Имеем физический маятник с двумя дополнительными силами. Вторая возможность существования (1.15) заключена, во-первых, в том, что $l_1 = l_2$, $l_3 = 0$. Но при двух равных моментах инерции можно изменить направление осей таким образом, чтобы один из косинусов, соответствующий равным осям, обратился в нуль. Поэтому, не нарушая общности, положим $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$. Кроме того, должны выполняться условия $k_1 = k_2 = 0$. Из интеграла площадей следует при этом, что $\gamma_1 = 0$, т. е. 0ζ лежит в плоскости x_2x_3. Это соответствует вращению тела вокруг оси x_1, расположенной в плоскости, притягивающей тело (на оси ξ), под действием трех сил постоянного направления, одна из которых постоянна и по величине, а величины двух остальных равны $m_1\delta_1^{-n}$ и $m_2\delta_2$, где m_i — постоянные, а δ_i — расстояние точек приложения сил до оси η. Этот случай также аналогичный физическому маятнику с двумя новыми силами.

2. Притяжение точки на оси симметрии тела неподвижной плоскостью. Новый алгебраический интеграл получен Д. Н. Горячевым [5] и в случае движения твердого тела, у которого $A_1 = A_2$, а внешние силы допускают силовую функцию

$$U = aA_1(n-1)^{-1}\gamma_3^{1-n} \qquad (2.1)$$

где $a > 0$ — постоянная и $n = 3$. Мы будем рассматривать случай любого n. Функцию (2.1) имеет сила, приложенная к точке оси x_3 и направленная вдоль оси ζ, а ее величина обратно пропорциональна n — степени расстояния точки приложения силы до плоскости $\xi\eta$. Динамические уравнения движения (0.2) имеют вид

$$(-1)^i l_i\, d\omega / dt = (\varepsilon - 1)\, l_{i+1}\, l_{i+2} - a\gamma_{3-i}\gamma_3^{-n} \quad (i = 1, 2), \qquad l_3 d\omega / dt = 0$$

$$(\varepsilon = A_3 / A_1) \tag{2.2}$$

к которым следует добавить уравнения (1.4). Из (2.2) следует, что перманентной осью с переменной угловой скоростью может быть только прямая, лежащая в экваториальной плоскости эллипсоида инерции $l_3 = 0$. Отсюда же имеем $l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 = 0$. Не нарушая общности, можно положить $l_2 = 0$. Тогда необходимо, чтобы $\gamma_1 = 0$. Это соответствует вращению тела вокруг оси x_1, совпадающей с ξ; действующая сила при этом расположена в плоскости x_2x_3.

Перманентные оси с постоянной угловой скоростью определяются из уравнений

$$\gamma_3^{n-1} = \frac{2a}{(n-1)\,[h - (l_1^2 + l_2^2 + \varepsilon l_3^2)]}, \qquad l_1\gamma_2 - l_2\gamma_1 = 0 \tag{2.3}$$

Первое из них—интеграл живых сил, второе есть следствие уравнений (2.2). Из (1.4) и (2.3) следует, что перманентная ось совпадает с осью ζ, т. е. имеют место равенства (1.9). Допускаемые точки сферы (1.2) определяются соотношением

$$\omega^2 = \frac{a}{(\varepsilon - 1)\, l_3^{n+1}} > 0$$

которое удовлетворяется при n — четном на полусфере $l_3 < 0$, если $\varepsilon < 1$, и на полусфере $l_3 > 0$, если $\varepsilon > 1$, а при n нечетном — на обеих полусферах, если $\varepsilon > 1$, и не удовлетворяется, если $\varepsilon < 1$.

3. Действие постоянной относительно тела силы. Интеграл $p_3 = \mathrm{const}$ существует, кроме рассмотренных случаев, когда симметричное тело $A_1 = A_2$ находится под действием постоянной по величине силы FA_1, параллельной оси x_3 и приложенной к произвольной точке x_{i0} тела. Динамические уравнения

$$(-1)^i\, l_i d\omega / dt = (\varepsilon - 1)\, l_{i+1} l_{i+2}\omega^2 - Fx_{3-i,0} \quad l_3\, d\omega / dt = 0 \qquad (\varepsilon = A_3 / A_1) \tag{3.1}$$

показывают, что перманентные оси с переменной угловой скоростью существуют в случае, когда

$$l_3 = l_1x_{10} + l_2x_{20} = 0 \tag{3.2}$$

т. е. перманентная ось ортогональна прямой, проходящей через точку приложения силы и начало координат, и лежит в плоскости x_1x_2. Таким свойством обладает ось x_1. Если же угловая скорость постоянная, уравнения (3.1) дают

$$x_{10} / l_1 = x_{20} / l_2 = k \tag{3.3}$$

т. е. перманентная ось лежит в одной плоскости с прямой, проходящей через точку приложения силы и начало координат. В этой же плоскости находится действующая сила. Угловая скорость при этом есть

$$\omega^2 = \frac{kF}{l_3\,(\varepsilon - 1)} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, если считать $k > 0$, что допускаемыми точками сферы (1.2) будут точки полусферы $l_3 < 0$, если $\varepsilon < 1$, и полусферы $l_3 > 0$, если $\varepsilon > 1$.

4. Притяжение тела неподвижной плоскостью. Метод Д. Н. Горячева отыскания интегралов движения дает положительный результат и в случае существования силовой функции

$$U = -\alpha\,(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2) \tag{4.1}$$

что при $\alpha > 0$ соответствует притяжению тела плоскостью $\xi\eta$ силами, пропорциональными расстояниям точек тела до этой плоскости. Раньше эта задача решена Бруном[6]. Исследуя устойчивость тела в поле сил (4.1), В. В. Белецкий [7] указал на одну перманентную ось: постоянное вращение вокруг оси инерции, расположенной ортогонально плоскости, притягивающей тело. Укажем все возможные перманентные оси вращения Добавляя к уравнениям (1.4) динамические уравнения

$$A_i l_i \, d\omega \,/\, dt = (A_{i+1} - A_{i+2})\,(l_{i+1} l_{i+2}\omega^2 - 2\alpha\gamma_{i+1}\gamma_{i+2}) \tag{4.2}$$

имеем интегралы

$$(A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2)\,\omega^2 = h - 2\alpha\,(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2)$$

$$(A_1 l_1 \gamma_1 + A_2 l_2 \gamma_2 + A_3 l_3 \gamma_3)\,\omega = k_1$$

из которых получаем

$$A_1 l_1 \gamma_1 + A_2 l_2 \gamma_2 + A_3 l_3 \gamma_3 = k_1 \left(\frac{A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2}{h - 2\alpha\,(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2)} \right)^{1/2} \tag{4.3}$$

1) Если (4.3) и (1.7) независимы, то система уравнений (1.7) и (4.3) в случае разрешимости определяет γ_i как постоянные. А тогда, как и раньше, имеем соотношения (1.9), т. е. перманентной осью может быть только вертикаль к плоскости притяжения тела. Из приведенных интегралов следует, что $\omega = \text{const}$. Тогда уравнения (4.2) примут вид

$$(A_{i+1} - A_{i+2})\,(\omega^2 - 2\alpha)\, l_{i+1} l_{i+2} = 0 \tag{4.4}$$

Отсюда следует:

а) при $\omega^2 \neq 2\alpha$ и $A_1 \neq A_2 \neq A_3$ (либо $A_1 = A_2 \neq A_3$) перманентными осями могут быть только главные оси эллипсоида инерции тела;

б) если эллипсоид инерции вырождается в шар $A_1 = A_2 = A_3$, либо $\omega^2 = 2\alpha$, то при любом положении тела относительно вертикали к плоскости $\xi\eta$ возможно вращение вокруг нее.

2) Уравнение (4.3) будет следствием (1.7), если $k_1 = k_2 = 0$.

Тогда величины γ_i и ω не обязательно должны быть постоянными. Зависимость соотношений (4.3) и (1.7) состоит в следующем:

$$\frac{A_1 l_1}{l_1} = \frac{A_2 l_2}{l_2} = \frac{A_3 l_3}{l_3} \tag{4.5}$$

Условиям (4.5) можно удовлетворить, если приравнять между собой все три момента инерции, либо приравнять два момента инерции и положить нулем косинус, соответствующий неравному моменту; либо положить два из косинусов l_i равным нулю. При двух или трех равных моментах инерции можно изменить направление осей таким образом, чтобы один из косинусов, соответствующий равным осям, обращался в нуль. Не нарушая общности, положим $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 0$; тогда из второго равенства (1.7) или (4.3) имеем $\gamma_1 = 0$. Это соответствует вращению тела около одной из осей инерции (x_1), расположенной в плоскости $\xi\eta$, притягивающей тело. Аналогичный результат получен Белецким [8] при рассмотрении движения тела в центральном поле сил.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 10 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении твердого тела около неподвижной точки. Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естеств. т. 7, 1894.
2. Staude O. Über permanente Ratationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, J. für die reine und angew. Math. 1894, Bd. 113, S. 318—334
3. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
4. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела, Варшава, 1910.
5. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера, Харьков, 1916.
6. de Brun F. Ratation kringen fix punkt Öfversigt of Kongl. Svenska vetenskaps — Akademiens Vorhandlingar. Stockholm, 1893.
7. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
8. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. Докл. АН СССР, 1957. т. 113, № 2.