ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ РАУСА

Ван Чжао-лин (Москва)

В работе применением метода Четаева рассматривается вопрос об обращении теоремы Рауса [1,2]. Прибегая к уравнениям движения в нормальных координатах, можно доказать теорему о неустойчивости для гироскопически связанной системы [3,4,5].

1. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ обозначают независимые лагранжевы координаты некоторой голономной консервативной механической системы со связями, не зависящими явно от времени. Для этой системы T есть живая сила, а U — силовая функция. Предположим, что $q_{m+1}, \ldots, q_n$ $(m < n)$ являются циклическими в том смысле, что для них

$$\partial L / \partial q_\alpha = 0 \qquad (\alpha = m+1, \ldots, n)$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа. Уравнения движения такой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j'} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

имеют $n - m$ первых интегралов

$$\partial L / \partial q_\alpha' = \beta_\alpha$$

где β_α — постоянные интегрирования. В рассматриваемом случае уравнения Лагранжа для нециклических координат примут вид [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_i'} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad R = L - \sum_\alpha q_\alpha' \beta_\alpha \tag{1.1}$$

Функция R не зависит от циклических координат и их скоростей, она имеет вид

$$R = R_2 + R_1 + R_0$$

Здесь R_0 — измененная силовая функция, не зависящая от нециклических скоростей, R_1 — линейная форма нециклических скоростей, R_2 — определенно-положительная квадратичная форма нециклических скоростей.

Представим себе, что при некоторых значениях β_α уравнения движения (1.1) допускают частное решение $q_i = 0$. Этому решению отвечает стационарное движение, в котором будут изменяться одни циклические координаты q_α.

Предполагаем, не нарушая общности, что при значениях переменных $q_i = 0$ функция R_0 равна нулю. Таким образом, при фиксированных значениях β_α уравнениями возмущенного движения будут уравнения (1.1).

По теореме Рауса [1] стационарное движение, отвечающее частному решению $q_i = 0$, устойчиво, если измененная силовая функция R_0 есть строго максимум.

При некотором условии эта теорема допускает обращение. Уравнения движения (1.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial q_i'} - \frac{\partial R_2}{\partial q_i} = \frac{\partial R_0}{\partial q_i} + \Gamma_i \tag{1.2}$$

Здесь Γ_i — гироскопические силы

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{m} a_{sr}(q_1, \ldots q_m)\, q_s' q_r' \qquad (a_{sr} = a_{rs})$$

$$\Gamma_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial q_i'} + \frac{\partial R_1}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(q_1, \ldots, q_m)\, q_j' \qquad (g_{ji} = -g_{ij};\ g_{ii} = 0)$$

1°. Рассмотрим гироскопически несвязанную систему, когда все $g_{ij} = 0$ $(i, j = 1, \ldots m)$, т. е. $\Gamma_i = 0$; в частности, это имеет место в случае $R_1 \equiv 0$. Тогда уравнения возмущенного движения примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial q_i'} - \frac{\partial R^*}{\partial q_i} = 0$$

Здесь $R^* = R_2 + R_0$, т. е. имеют такой же вид, как и уравнения возмущенного движения вблизи положения равновесия. Если допустим, что

$$p_i = \partial R^* / \partial q_i', \qquad H^* = -R^* + \sum_i \frac{\partial R^*}{\partial q_i'} q_i'$$

то получим канонические уравнения Гамильтона для нециклических координат

$$dq_i / dt = \partial H^* / \partial p_i, \qquad dp_i / dt = -\partial H^* / \partial q_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

Рассмотрим отвечающее уравнениям (1.3) уравнение Гамильтона — Якоби

$$H^* \left(q_1, \ldots, q_m; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = h \tag{1.4}$$

Если полный интеграл уравнения (1.4) есть

$$W = W(q_1, \ldots, q_m; \alpha_2, \ldots, \alpha_m, h)$$

то импульсы p_i в возмущенных движениях согласно теореме Якоби будут иметь вид

$$p_i = \partial W / \partial q_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где α_s, h — произвольные постоянные ($s = 2, \ldots, m$).

Для случая равновесия имеет место теорема Четаева [2], которая применительно к рассматриваемой задаче может быть формулирована так:

Теорема 1. Если для изолированного стационарного движения функция R_0, предполагаемая аналитической функцией, не есть максимум, то стационарное движение гироскопически несвязанной системы $q_i = 0$ неустойчиво.

2°. Рассмотрим уравнения возмущенного движения (1.1). Допустим, что

$$R_1 = \sum_i c_i(q_1, \ldots, q_m) q_i' = \sum_i c_i^{(0)} q_i' + \sum_i c_i^{(1)} q_i' + \sum_i c_i^{(2)} q_i' + Q_1$$

$$c_i^{(0)} = c_i(0, \ldots, 0), \quad c_i^{(1)} = \sum_k \left(\frac{\partial c_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k, \qquad c_i^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{s, r} \left(\frac{\partial^2 c_i}{\partial q_s \partial q_r}\right)_0 q_s q_r$$

Здесь Q_1 — члены не ниже четвертого порядка. Уравнения (1.1) можно записать в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R^*}{\partial q_i'} - \frac{\partial R^*}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

$$R^* = R_2 + R_1^* + R_0$$

$$R_1^* = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial q_j} - \frac{\partial c_j^{(1)}}{\partial q_i}\right) q_i' q_j + \sum_i c_i^{(2)} q_i' + Q_1 = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}^{(0)} q_i' q_j + \sum_i c_i^{(2)} q_i' + Q_1$$

Следовательно, методом Четаева [2] для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных q_i, q_i' ($i = 1, \ldots, m$) можно доказать для гироскопически связанной системы следующее предложение:

Теорема 2. Если для изолированного стационарного движения функция R_0, предполагаемая аналитической функцией, не есть максимум и если в разложении функции R_1^* коэффициенты $g_{ij}^{(0)}$ равны нулю, то стационарное движение неустойчиво.

В самом деле, согласно условиям теоремы в произвольной области $R_0 > R_0^* > 0$ для любого R_0^*, отвечающего произвольной точке полы C, определенной неравенствами $R_0 > 0$ и $q_1^2 + \ldots + q_m^2 < l$, нет неподвижных особенностей полного интеграла W; далее, подходящим выбором начальных условий получим

$$dW / dt = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} q_i' = \sum_i p_i q_i' = \sum_i \frac{\partial R^*}{\partial q_i'} q_i' = 2R_2 + Q_2 > 0$$

где Q_2 — члены не ниже третьего порядка малости, зависящие от скоростей q_i'.

Следовательно, функция W в области $R_0 > R_0^* > 0$ внутри полы C удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева о неустойчивости. Предложение доказано.

2. Рассмотрим гироскопически связанную систему в нормальных координатах. Введем обозначения

$$a_{sr}^0 = a_{sr}(0, \ldots, 0), \qquad g_{ij}^0 = g_{ij}(0, \ldots, 0) \qquad (g_{ij}^0 = -\overset{\circ}{g}_{ji};\ \overset{\circ}{g}_{ii} = 0)$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \qquad (b_{ij} = b_{ji})$$

Уравнения возмущенного движения (1.2) приведем к виду [4, 6]

$$\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij}^0 \frac{dq_j'}{dt} + g_{ij}^0 q_j' + b_{ij} q_j\right) + Q_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

Здесь Q_i — голоморфная функция, содержащая члены не ниже второго порядка.

Известно [4], что существует неособенное линейное преобразование с постоянными коэффициентами, приводящее уравнения возмущенного движения первого приближения для уравнений (2.1) к форме

$$x_i'' + \sum_j g_{ij}^* x_j' + \lambda_i x_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

Здесь x_i — нормальные координаты, λ_i — коэффициенты устойчивости Пуанкаре, не зависящие от гироскопических сил, g_{ij}^* — постоянные, обладающие свойствами $\overset{\circ}{g}_{ij}$.

Рассмотрим случай, когда некоторые из коэффициентов устойчивости Пуанкаре λ_i равны нулю.

Пусть кососимметрическая матрица, определитель которой составлен из гироскопических коэффициентов $g_{\nu\mu}^*$ $(\nu, \mu = 1, \ldots, s)$, имеет вид $\| g_{\nu\mu}^* \|_1^s$

Теорема 3. Если для уравнений (2.2) $\lambda_k = 0$ $(k = 1, \ldots, s < m)$, а определитель кососимметрической матрицы $\| g_{\nu\mu}^* \|_1^s$ отличен от нуля, причем степень неустойчивости нечетна, то стационарное движение неустойчиво.

Доказательство. Так как для уравнений (2.2) среди корней характеристического уравнения $\lambda_k = 0$, то можно вынести общий множитель λ

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^s) \begin{vmatrix} \lambda & g_{12}^* & \ldots & g_{1s}^* & \lambda g_{1,\,s+1}^* & \ldots & \lambda g_{1m}^* \\ g_{21}^* & \lambda & \ldots & g_{2s}^* & \lambda g_{2,\,s+1}^* & \ldots & \lambda g_{2m}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{s1}^* & g_{s2}^* & \ldots & \lambda & \lambda g_{s,\,s+1}^* & \ldots & \lambda g_{sm}^* \\ g_{s+1,1}^* & g_{s+1,2}^* & \ldots & g_{s+1,s}^* & \lambda^2 + \lambda_{s+1} & \ldots & \lambda g_{s+1,m}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{m1}^* & g_{m2}^* & \ldots & g_{ms}^* & \lambda g_{m,\,s+1}^* & \ldots & \lambda^2 + \lambda m \end{vmatrix}$$

Таким образом, разложение уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ можно записать в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^s)(\lambda^{2m-s} - a_1 \lambda^{2m-s-1} + \ldots + (-1)^{2m-s} a_m) = 0$$

Здесь свободный член разложения примет вид

$$(-1)^{2m-s} a_m = (\lambda_{s+1} \ldots \lambda_m) \begin{vmatrix} 0 & g_{12}^* & \ldots & g_{1s}^* \\ g_{21}^* & 0 & \ldots & g_{2s}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{s1}^* & g_{s2}^* & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Известно [4], что когда определитель кососимметрической матрицы $\| g_{\nu\mu}^* \|_1^s$ не равняется нулю, он должен быть положительным; при этом число s будет четным.

Таким образом, согласно условиям теоремы видно, что произведение $2m - s$ характеристических корней a_m будет отрицательным. Тем самым по меньшей мере один из характеристических корней λ будет положительным.

Следовательно, в рассматриваемом случае в силу теоремы Ляпунова по первому приближению невозмущенное движение для уравнений (2.1) будет неустойчивым.

Теорема доказана.

Замечание 1. Для изолированного положения равновесия Н. Г. Четаев [3] доказал теорему о неустойчивости механической системы, подверженной действию потенциальных и гироскопических сил. Эту теорему можно рассматривать как некоторое обращение теоремы Рауса и формулировать следующим образом:

Если для уравнений (2.2) все λ_i отличны от нуля и степень неустойчивости нечетна, то стационарное движение неустойчиво.

Замечание 2. В работе [7] (n° 5) для стационарного движения теорема о неустойчивости доказана на основе предположений, что

$$\left(\frac{\partial^r H}{\partial p_i \partial q_1^{m_1} \ldots \partial q_m^{m_k}}\right)^\circ = 0 \qquad (*)$$

при любых $m_1 + m_2 + \ldots + m_k > 0$ и $i \leqslant k$ и что функция W_1, зависящая только от вариации координат, есть однородная функция.

При выполнении условия (*) уравнения возмущенного движения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ + \delta_{ij}\right]\eta_j, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}\sum_{l,j=1}^{k} \delta_{lj}\eta_l\eta_j - \frac{\partial W_1}{\partial \xi_i}$$

где $\delta_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ уничтожаются, когда все $\xi_1, \ldots, \xi_k$ равны нулю; нетрудно видеть, что данный случай соответствует случаю, когда $R_1 = 0$, тем самым система уравнений возмущенного движения является гироскопически несвязанной системой.

Однако теоремы о неустойчивости стационарного движения нами рассмотрены при более общих предположениях (см. теоремы 1, 2).

Замечание 3. Можем заметить, что в работе [8] для гироскопически связанной системы сделана попытка доказательства теоремы на основе предположений, что

(1°) $$\partial(R_0 + U)\, q_i \,/\, \partial q_i > 0$$

(2°) скорости $\eta_1, \ldots, \eta_s$ связаны соотношениями

$$P_{ik}\eta_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2p;\ k = 1, \ldots, s)$$

Но автор не доказал неравенство (1°). Кроме того, он тоже не доказал, что при добавлении условия связей (2°) дифференциальные уравнения движения не будут изменяться. Без доказательства этих двух пунктов теорему [8] нельзя считать установленной.

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 26 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Routh. The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies, 4-е изд., 1884.
2. Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанского ун-та, 1938, т. 98, книга 9.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. Гостехтеоретиздат, 1956.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости равномерных вращений механических систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
6. Матросов В. М. К вопросу устойчивости гироскопических систем. Тр. КАИ, т. 49, серия Механика и математика, Казань, 1959.
7. Пожарицкий Г. К. О неустановившемся движении консервативных голономных систем. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
8. Харламов С. А. Об обращении одной теоремы Рауса. Вестн. МГУ, 1961, № 6.