и неравенства (2.7) принимают простой вид

$$mlv\left[1+\frac{(C-A)}{mlR}\right]>0, \qquad Fl\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]>0, \qquad F-m\frac{v^2}{R}-mR\Omega^2>0$$

$$p^2\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]\left[\cos 2\delta^*+\frac{mlv^2}{sR}(1+\chi)\right]-\Omega^2>0 \tag{2.12}$$

3. Достаточные условия устойчивости (2.12) допускают вырождение на случай прецессионной теории. Пренебрегая в (2.12) членами, содержащими в качестве множителей величины A, B, C и полагая $\cos 2\delta^*$ равным единице вследствие малости угла δ^*, получаем следующие неравенства:

$$F-m\frac{v^2}{R}-mR\Omega^2>0, \qquad p_1^2-\Omega^2>0 \qquad \left(p_1^2=p^2\left(1+\frac{mlv^2}{sR}\right)\right) \tag{3.1}$$

Так как всегда, к тому же, $sR \gg mlv^2$, то можно принять $p_1 = p$. Полагая далее $F - mv^2 / R \approx mg$, из (3.1) получаем неравенства

$$\Omega^2-p^2<0, \qquad \Omega^2-\nu^2<0 \qquad (\nu=\sqrt{g/R}) \tag{3.2}$$

установленные ранее в работе [4]. Эти же неравенства получаются и при полной кинетической симметрии, когда $A = B = C$.

Для получения необходимых условий устойчивости можно рассмотреть соответствующие уравнения в вариациях.

В прецессионной постановке этот вопрос рассматривался в [4]. Там же было показано, что если

$$(\Omega^2-p^2)(\Omega^2-\nu^2)<0 \tag{3.3}$$

то невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 23 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Ляшенко В. Ф. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
4. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРЕМЫ НЕЗАВИСИМОСТИ ГИЛЬБЕРТА

И. М. Беленький
(Москва)

1. Д. Гильберт развил метод [1], который позволяет получить наряду с критерием необходимого и достаточного условия экстремума функционала в вариационном исчислении также основные положения теории Гамильтона — Якоби.

В основе метода Гильберта лежит «теорема независимости», при помощи которой вариационная задача о минимизации некоторого функционала

$$J=\int_{(a)}^{(b)} F(x, y, y')\,dx=\operatorname{extr} \qquad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right) \tag{1.1}$$

сводится к рассмотрению другого функционала

$$J^*=\int_{(a)}^{(b)} (F(x, y, p)+(y'-p)F_p)\,dx \qquad \left(F_p=\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}\right) \tag{1.2}$$

значение которого уже не зависит от выбора кривой, проходящей через закрепленные концы (a) и (b).

Исходя из условия независимости интеграла (1.2) от пути интегрирования, можно показать, что неизвестная функция $p = p\,(x, y)$ переменных x и y должна удовлетворять уравнению в частных производных первого порядка

$$F_{pp}\,(p_x + pp_y) + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0 \tag{1.3}$$

которое Гильберт назвал «присоединенным уравнением» для первоначальной задачи (1.1). При таком выборе функции $p\,(x, y)$ задача о минимизации функционала (1.2) должна рассматриваться как эквивалентная задаче (1.1).

Для n-мерного пространства, когда на искомые функции, минимизирующие рассматриваемый функционал, наложено некоторое число (меньшее, чем n) дифференциальных уравнений, теорема независимости и ее связь с теоремой Якоби — Гамильтона были рассмотрены Майером [2].

2. Применим теорему независимости Гильберта к нахождению траекторий точки единичной массы ($m = 1$), движущейся в консервативном поле с потенциалом $V\,(x, y)$. Следовательно, на основании принципа стационарного действия в форме Якоби [3] здесь будет идти речь о минимизации функционала вида (1.1), где

$$F\,(x, y, p) = \sqrt{2\,(E - V\,(x,y))}\,\sqrt{1 + p^2\,(x, y)} \tag{2.1}$$

Составляя присоединенное уравнение Гильберта (1.3) для рассматриваемой вариационной задачи, получим уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция $p\,(x, y)$

$$p_x + pp_y = (1 + p^2)\,(-\,p\Phi_x + \Phi_y) \qquad (\Phi = \ln \sqrt{2\,(E - V\,(x, y))}) \tag{2.2}$$

Таким образом, задача нахождения траекторий при движении точки в консервативном поле сводится к нахождению характеристик присоединенного уравнения Гильберта (2.2), или, что то же, к интегрированию системы

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{(1 + p^2)\,(-\,p\Phi_x + \Phi_y)} \tag{2.3}$$

Если рассматривать в (1.1) верхний предел как переменный, то значение интеграла (1.1), взятого вдоль экстремали, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x, y), будет совпадать со значением функционала (1.2) для любой кривой, проходящей через те же точки (x_0, y_0) и (x, y), если только $p\,(x, y)$ будет решением присоединенного уравнения Гильберта (1.3). Отсюда, принимая $F\,(x, y, p)$, согласно (2.1) легко получить:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\sqrt{2\,(E - V)}}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{p\sqrt{2\,(E - V)}}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Замечая, что, согласно (2.3), $p = dy\,/\,dx$, при помощи интеграла энергии получим

$$\frac{\partial J}{\partial x} = v_x, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = v_y \qquad (v = v_x + iv_y) \tag{2.4}$$

и, следовательно, уравнение траекторий можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial J}{\partial y}\,dx - \frac{\partial J}{\partial x}\,dy = 0 \tag{2.5}$$

3. Рассмотрим один класс движений, когда функция $F\,(x, y, y')$ имеет вид

$$\sqrt{2\,(E - V\,(x, y))}\,\sqrt{1 + y'^2} = A\,(x, y) + B\,(x, y)\,y' \tag{3.1}$$

а интеграл (1.1) не зависит от вида кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), что на основании условия о независимости интеграла от пути интегрирования дает [4]

$$\frac{\partial A\,(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial B\,(x, y)}{\partial x} = 0$$

Так как

$$A\,(x, y) = \partial J\,/\,\partial x, \qquad B\,(x, y) = \partial J\,/\,\partial y \tag{3.2}$$

то рассматриваемому классу движений мы удовлетворим, если потребуем, чтобы комплексная скорость точки $\zeta = v \exp(-i\psi)$ (v — величина скорости, а ψ — угол, образованный вектором скорости с осью x) была аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Это, в свою очередь, на основании (2.4) приводит к условию, что

$$\zeta(z) = \frac{\partial J}{\partial x} - i\frac{\partial J}{\partial y} \qquad (\zeta = v \exp(-i\psi)) \tag{3.3}$$

будет также функцией аналитической. Отсюда, пользуясь (2.5), нетрудно получить уравнение траекторий в таком виде

$$\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} \zeta(z)\,dz = 0 \tag{3.4}$$

4. Необходимое условие, которому должен удовлетворять потенциал силового поля $V(x, y)$, чтобы комплексная скорость $\zeta(z)$ была аналитической функцией, получим, полагая

$$\triangle \ln v = 0 \qquad (v = \sqrt{2(E - V(x, y))}) \tag{4.1}$$

Таким образом, потенциал $V(x, y)$ должен удовлетворять уравнению вида

$$V \triangle V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \qquad (E = 0) \tag{4.2}$$

Этому уравнению удовлетворяет всякая функция вида

$$V(x, y) = A \exp(\varphi(x, y)) \tag{4.3}$$

где A — постоянная, а $\varphi(x, y)$ — гармоническая функция.

Известно, что если $f(z)$ — аналитическая функция в некоторой области G, то $|f(z)|$ будет логарифмически-субгармонической функцией (т. е. субгармонической будет не только сама функция, но и ее логарифм) в той же области, так как известно, что логарифм от модуля аналитической функции, т. е. выражение вида $\ln|f(z)|$, есть функция субгармоническая [5].

Отсюда следует, что V при $A > 0$ будет принадлежать к классу логарифмически-субгармонических функций, поскольку решение (4.3) всегда можно представить в следующей форме:

$$V = A\,|\exp(f(z))| \qquad (\varphi(x, y) = \operatorname{Re} f(z))$$

где $f(z)$ — аналитическая функция.

Заметим, что если $A < 0$, то V будет супергармонической функцией, так как для этого случая на основании (4.2) и (4.3) будет следовать, что $\triangle V < 0$. Из формы решения (4.3), а также на основании свойств гармонических функций следует, что если функции $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — решения уравнения, то и их произведение $V = V_1 \ldots V_n$ будет также решением уравнения (4.2); аналогично, если V_1 и V_2 — решения, то и их отношение $V = V_1 / V_2$ также есть решение; далее, если V — решение, то функция $f(V) = BV^\alpha$ при произвольных значениях B и α также есть решение уравнения (4.2).

В частности, если рассмотреть гармоническую функцию вида

$$\varphi = n \ln r \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2},\ n = \text{const})$$

то для потенциала силового поля V получим $V = Ar^n$, что соответствует, в зависимости от знаков A и n, притягивающему или отталкивающему центру.

Поступила 20 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D. Zur Variationsrechnungen. Math. Ann., 1906, Bd. 62.
2. Mayer A. Über den Hilbertschen Unabhängikeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Math. Ann., 1904, Bd. 58.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
4. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Гостехтеоретиздат, 1933.
5. Привалов И. И. Субгармонические функции. ОНТИ СССР, 1937