ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОКОМПАСОВ

В. Н. Кошляков, В. Ф. Ляшенко

(Москва)

В настоящей работе, являющейся развитием статьи [1], рассматривается в строгой постановке (для нелинейного случая и без перехода к прецессионной теории) устойчивость движения двухроторных гирокомпасов, не обладающих свойствами пространственного гирокомпаса Геккелера — Аншютца.

Приводится первый интеграл уравнений движения, который используется для получения достаточных условий устойчивости невозмущенного движения системы.

1. Пусть $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ и $Oxyz$ — правые системы координат, начала которых совпадают с точкой подвеса [2].

Положение трехгранника $Oxyz$ относительно трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ определим посредством углов α, β, γ. Направляющие косинусы θ_s, ϑ_s и ψ_s между указанными трехгранниками определяются выражениями (1.1) работы [1].

Движение двухроторного гирокомпаса описывается системой четырех уравнений (1.2), приведенной в работе [1].

В данной работе будем предполагать, что восстанавливающий момент, создаваемый пружинной связью между гироскопами, удовлетворяет условию

$$N = s \sin \delta \cos \delta \tag{1.1}$$

где s — крутизна характеристики названного момента; δ — угол отклонения осей гироскопов от конструктивно выбираемого значения, соответствующего $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Таким образом

$$\delta = \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{1.2}$$

В отличие от работы [1], исследование проводится с учетом члена $-2Id^2\varepsilon / dt^2$ в уравнении, описывающем движение гироскопов внутри гиросферы.

В тех же предположениях, что и в работе [1], указанная система допускает первый интеграл, получаемый совершенно аналогично тому, как это сделано в [1].

Последний имеет вид

$$\begin{gathered}
V \equiv {}^1/_2 Ap^2 + {}^1/_2 Bq^2 + {}^1/_2 Cr^2 + I\dot{\delta}^2 + {}^1/_2 s \sin^2\delta - (F - mv^2 / R)\, l\psi_3 - mvl\Omega\vartheta_3 - \\
- [Ap\psi_1 + (Bq + \mathrm{H})\psi_2 + Cr\psi_3]\,\Omega - [Ap\vartheta_1 + (Bq + \mathrm{H})\vartheta_2 + Cr\vartheta_3]\, v / R = C_1
\end{gathered} \tag{1.3}$$

2. Интеграл (1.3) можно использовать для получения достаточных условий устойчивости. Положениям равновесия системы отвечают следующие значения координат

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \beta^*, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = \delta^* \tag{2.1}$$

причем β^* и δ^* удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
(C - B)\,\{{}^1/_2\,[\Omega^2 - \omega^2] \sin 2\beta^* + \omega\,\Omega \cos 2\beta^*\} - \\
-2B' \cos(\varepsilon_0 + \delta^*)\,(\Omega \cos \beta^* - \omega \sin \beta^*) = -(F - mv\omega)\, l \sin \beta^* - mvl\Omega \cos \beta^* \\
-(\omega \cos \beta^* + \Omega \sin \beta^*)\, 2B' \sin(\varepsilon_0 + \delta^*) = s \sin \delta^* \cos \delta^* \qquad (\omega = v/R)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Движение, определяемое равенствами (2.1), примем в качестве невозмущенного. Положим теперь в возмущенном движении

$$\alpha = x_1, \qquad \beta = \beta^* + x_2, \qquad \gamma = x_3, \qquad \delta = \delta^* + x_4 \tag{2.3}$$

Обозначив через V_0 значение V при $x_s = 0$ и $\dot{x}_s = 0$ $(s = 1, 2, 3, 4)$, составим разность $V - V_0$. Имеем

$$V - V_0 = \sum_{i,\, j=1}^{4} b_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{k,\, l=1}^{4} c_{kl} x_k x_l + \ldots \tag{2.4}$$

где точками обозначены члены высшего порядка относительно x_s и $\dot{x}_s$.

Здесь

$$
\begin{gathered}
b_{11} = {}^1/_2 (B \sin^2 \beta^* + C \cos^2 \beta^*), \quad b_{22} = {}^1/_2 A, \quad b_{33} = {}^1/_2 B, \quad b_{44} = I \\
b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{13} = b_{31} = {}^1/_2 B \sin \beta^*, \quad b_{14} = b_{41} = 0 \\
b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{24} = b_{42} = 0, \quad b_{34} = b_{43} = 0
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11} = {}^1/_2\, \omega \{&- mlR\, \Omega \sin \beta^* - A\omega + [B (\cos \beta^* \omega + \Omega \sin \beta^*) + \\
&+ 2B' \cos (\varepsilon_0 + \delta^*)] \cos \beta^* + C (\sin \beta^* \omega - \Omega \cos \beta^*) \sin \beta^*\} \\
c_{22} = {}^1/_2 \{&(C - B) [(\Omega \cos \beta^* - \sin \beta^* \omega)^2 - (\Omega \sin \beta^* + \cos \beta^* \omega)^2] + \\
&+ [(F - mv\omega)\, l + 2B' \cos (\varepsilon_0 + \delta^*)\, \omega] \cos \beta^* - \Omega\, [mvl - 2B' \cos (\varepsilon_0 + \delta^*)] \sin \beta^*\} \\
c_{33} = {}^1/_2\, &[(C - A) (\Omega \cos \beta^* - \sin \beta^* \omega)^2 + (F - mv\omega)\, l \cos \beta^* - mvl\Omega \sin \beta^*] \\
c_{44} = {}^1/_2\, &[s \cos 2\delta^* + 2B' \cos (\varepsilon_0 + \delta^*) (\Omega \sin \beta^* + \cos \beta^* \omega)] \\
c_{12} = c_{21} &= 0, \quad c_{14} = c_{41} = 0, \quad c_{23} = c_{32} = 0, \quad c_{34} = c_{43} = 0 \\
c_{13} = c_{31} &= {}^1/_2\, \omega [(C - A) (\sin \beta^* \omega - \Omega \cos \beta^*) - mlR\, \Omega] \\
c_{24} = c_{42} &= {}^1/_2 2B' \sin (\varepsilon_0 + \delta^*) (\Omega \cos \beta^* - \sin \beta^* \omega)
\end{aligned}
$$

Применяя к первой квадратичной форме выражения (2.4) критерий Сильвестра, получаем всегда выполняющиеся неравенства

$$
B \sin^2 \beta^* + C \cos^2 \beta^* > 0, \qquad A > 0, \qquad BC \cos^2 \beta^* > 0, \qquad I > 0 \tag{2.6}
$$

Применяя далее критерий Сильвестра ко второй форме выражения (2.4), получаем, что она будет определенно-положительной для достаточно малых значений x_s при выполнении следующих неравенств:

$$
c_{11} > 0, \qquad c_{22} > 0, \qquad c_{11}c_{33} - c_{13}^2 > 0, \qquad c_{22}c_{44} - c_{24}^2 > 0 \tag{2.7}
$$

При соблюдении условий (2.7) форма $V - V_0$ также будет определенно-положительной.

Так как ее полная производная в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, то невозмущенное движение (2.1) будет устойчивым по Ляпунову. Отметим, что уравнения (2.2) имеют решение $\beta^* = 0$, если ε_0 удовлетворяет соотношению

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_0 = \arccos \left[\frac{mlv}{2B'} (1 + \chi)\right] + \frac{1}{2} \arcsin \frac{4B'v}{sR} \left[1 - \left(\frac{mlv}{2B'} (1 + \chi)\right)^2\right]^{1/2} \\
\left(\chi = \frac{(C - B)}{mlR}\right)
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

При этом значение δ^* определяется уравнением [3]

$$
2B' \cos (\varepsilon_0 + \delta^*) = mlv\, (1 + \chi) \tag{2.9}
$$

Вводя обозначение

$$
p^2 = \frac{Fls}{[2B' \sin (\varepsilon_0 + \delta^*)]^2} \tag{2.10}
$$

будем иметь для коэффициентов c_{kl} следующие явные выражения

$$
\begin{gathered}
c_{11} = \frac{1}{2} ml \frac{v^2}{R} \left[1 + \frac{(C - A)}{mlR}\right], \qquad c_{33} = \frac{1}{2} \left(F - m\frac{v^2}{R}\right) l \left[1 + \frac{(C - A)\, \Omega^2}{(F - m v^2/R) l}\right] \\
c_{22} = \frac{1}{2} Fl \left[1 + \chi \left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right], \qquad c_{44} = \frac{1}{2} \left[s \cos 2\delta^* + ml \frac{v^2}{R} (1 + \chi)\right]
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

$$
c_{13} = c_{31} = -\frac{1}{2} mlv\Omega \left[1 + \frac{(C - A)}{mlR}\right], \qquad c_{24} = c_{42} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{Fls}\,\Omega}{p}
$$

и неравенства (2.7) принимают простой вид

$$mlv\left[1+\frac{(C-A)}{mlR}\right]>0, \qquad Fl\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]>0, \qquad F-m\frac{v^2}{R}-mR\Omega^2>0$$

$$p^2\left[1+\chi\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\right]\left[\cos 2\delta^* + \frac{mlv^2}{sR}(1+\chi)\right]-\Omega^2>0 \qquad (2.12)$$

3. Достаточные условия устойчивости (2.12) допускают вырождение на случай прецессионной теории. Пренебрегая в (2.12) членами, содержащими в качестве множителей величины A, B, C и полагая $\cos 2\delta^*$ равным единице вследствие малости угла δ^*, получаем следующие неравенства:

$$F-m\frac{v^2}{R}-mR\Omega^2>0, \qquad p_1^2-\Omega^2>0 \qquad \left(p_1^2=p^2\left(1+\frac{mlv^2}{sR}\right)\right) \qquad (3.1)$$

Так как всегда, к тому же, $sR \gg mlv^2$, то можно принять $p_1 = p$. Полагая далее $F - mv^2 / R \approx mg$, из (3.1) получаем неравенства

$$\Omega^2 - p^2 < 0, \qquad \Omega^2 - \nu^2 < 0 \qquad (\nu = \sqrt{g/R}) \qquad (3.2)$$

установленные ранее в работе [4]. Эти же неравенства получаются и при полной кинетической симметрии, когда $A = B = C$.

Для получения необходимых условий устойчивости можно рассмотреть соответствующие уравнения в вариациях.

В прецессионной постановке этот вопрос рассматривался в [4]. Там же было показано, что если

$$(\Omega^2 - p^2)(\Omega^2 - \nu^2) < 0 \qquad (3.3)$$

то невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила 23 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н., Ляшенко В. Ф. Об одном интеграле в теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
3. Ляшенко В. Ф. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.
4. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРЕМЫ НЕЗАВИСИМОСТИ ГИЛЬБЕРТА

И. М. Беленький
(Москва)

1. Д. Гильберт развил метод [1], который позволяет получить наряду с критерием необходимого и достаточного условия экстремума функционала в вариационном исчислении также основные положения теории Гамильтона — Якоби.

В основе метода Гильберта лежит «теорема независимости», при помощи которой вариационная задача о минимизации некоторого функционала

$$J = \int_{(a)}^{(b)} F(x, y, y')\,dx = \text{extr} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \qquad (1.1)$$

сводится к рассмотрению другого функционала

$$J^* = \int_{(a)}^{(b)} (F(x, y, p) + (y' - p)F_p)\,dx \qquad \left(F_p = \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}\right) \qquad (1.2)$$