Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

О ДВИЖЕНИИ ПРИВЕДЕННОГО В БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

Как известно, движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, которому сообщена большая начальная угловая скорость, исследовано (не касаясь случая Лагранжа) в случае Горячева — Чаплыгина в работах [1,2] и при определенных ограничениях на расположение центра тяжести, на моменты инерции и на начальные условия — в работах [3,4].

Ниже методом малого параметра исследуются периодические решения уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, приведенного в быстрое вращение относительно одной из главных осей эллипсоида инерции и находятся соответствующие движения твердого тела. Показывается, в частности, что любое твердое тело, кроме указанных особых случаев, при $z_0 \neq 0$ будет совершать уже в первом приближении псевдорегулярную прецессию вокруг вертикальной оси, причем из шести начальных условий, по крайней мере, четыре — произвольные.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой, с произвольным эллипсоидом инерции и с произвольным расположением центра тяжести, не совпадающим с закрепленной точкой. Общие уравнения движения этого тела и их первые интегралы будут

$$\frac{dp}{dt} + A_1 qr = \frac{Mg}{A}(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \begin{pmatrix} ABC, \; pqr, \\ \gamma\gamma'\gamma'', \; x_0y_0z_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\left(A_1 = \frac{C-B}{A}, \; B_1 = \frac{A-C}{B}, \; C_1 = \frac{B-A}{C}\right).$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg\,(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') =$$
$$= Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 - 2Mg\,(x_0\gamma_0 + y_0\gamma_0' + z_0\gamma_0'')$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = Ap_0\gamma_0 + Bq_0\gamma_0' + Cr_0\gamma_0''$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{1.2}$$

Здесь $p_0, q_0, r_0, \gamma_0, \gamma_0', \gamma_0''$ обозначают начальные значения соответствующих переменных; каждый символ типа (abc) — циклическую перестановку для получения невыписанных равенств.

Будем предполагать, что в начальный момент времени главная ось z эллипсоида инерции наклонена к вертикали под некоторым углом θ_0 ($\theta_0 \neq {}^1/_2 k\pi$, $k = 0, 1, 2$) и вокруг этой оси телу сообщена большая угловая скорость r_0. Не нарушая общности, в качестве подвижной системы координат выберем систему, у которой положительные направления осей z и x в начальный момент времени не составляют тупой угол с направлением ускорения силы тяжести.

Тогда в этой системе координат $r_0 \gtrless 0$, а начальные значения γ_0 и γ_0'' в силу ограничения на угол θ_0 будут удовлетворять условиям

$$\gamma_0 \geqslant 0, \qquad 0 < \gamma_0'' < 1 \tag{1.3}$$

Введем обозначения

$$a = \frac{A}{C}, \qquad b = \frac{B}{C}, \qquad c^2 = \frac{Mgl}{C}, \qquad \mu = \frac{c\sqrt{\gamma_0''}}{r_0} \tag{1.4}$$
$$x_0 = lx_0', \qquad y_0 = ly_0', \qquad z_0 = lz_0', \qquad l^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Величина μ при принятых предположениях относительно r_0 будет малым параметром. Введем новые переменные $p_1, q_1, r_1, \gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'', \tau$ по формулам

$$p = c\sqrt{\gamma_0''}\, p_1, \qquad q = c\sqrt{\gamma_0''}\, q_1, \qquad r = r_0 r_1 \tag{1.5}$$
$$\gamma = \gamma_0''\gamma_1, \qquad \gamma' = \gamma_0''\gamma_1, \qquad \gamma'' = \gamma_0''\gamma_1'', \qquad t = \tau / r_0$$

Уравнения (1.1) и их интегралы (1.2) в этих переменных примут вид

$$\dot p_1 + A_1 q_1 r_1 = \mu a^{-1} (y_0'\gamma''_1 - z_0'\gamma_1'), \qquad \dot\gamma_1 = r_1\gamma_1' - \mu q_1 \gamma_1''$$
$$\dot q_1 + B_1 p_1 r_1 = \mu b^{-1} (z_0'\gamma_1 - x_0'\gamma_1''), \qquad \dot\gamma_1' = \mu p_1 \gamma_1'' - r_1\gamma_1 \tag{1.6}$$
$$\dot r_1 = \mu^2 (-C_1 p_1 q_1 + x_0'\gamma_1' - y_0'\gamma_1), \qquad \dot\gamma_1'' = \mu (q_1\gamma_1 - p_1\gamma_1') \qquad (\dot u = du / d\tau)$$

$$r_1^2 = 1 + \mu^2 S_1 \quad \{S_1 = a(p_{10}^2 - p_1^2) + b(q_{10}^2 - q_1^2) -$$
$$- 2[x_0'(\gamma_{10} - \gamma_1) + y_0'(\gamma_{10}' - \gamma_1') + z_0'(1 - \gamma_1'')]\} \tag{1.7}$$
$$r_1\gamma_1'' = 1 + \mu S_2 \qquad \{S_2 = a(p_{10}\gamma_{10} - p_1\gamma_1) + b(q_{10}\gamma_{10}' - q_1\gamma_1)\} \tag{1.8}$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 = (\gamma_0'')^{-2} \tag{1.9}$$

Выразив при помощи первых интегралов (1.7) и (1.8) переменные r_1 и γ_1'' через остальные переменные $p_1, q_1, \gamma_1, \gamma_1''$, их начальные значения $p_{10}, q_{10}, \gamma_{10}, \gamma_{10}'$ и малый параметр μ

$$r_1 = 1 + {}^1\!/_2\mu^2 [S_1 + 2z_0'(1 - \gamma_1'')] + \ldots$$
$$\gamma_1'' = 1 + \mu S_2 - {}^1\!/_2\mu^2 [S_1 + 2z_0'(1 - \gamma_1'')] + \ldots \tag{1.10}$$

приведем оставшиеся четыре уравнения системы (1.6) к двум уравнениям второго порядка

$$\ddot p_1 + \omega^2 p_1 = \mu\, [z_0'(a^{-1} + A_1 b^{-1})\gamma_1 + A_1 b^{-1} x_0'] + \mu^2 \{-\omega^2 p_1 [S_1 +$$
$$+ 2z_0'(1 - \gamma_1'')] + A_1 b^{-1} x_0' S_2 + A_1 C_1 p_1 q_1^2 - A_1 x_0' q_1 \gamma_1' - y_0' a^{-1} p_1 \gamma_1' +$$
$$+ y_0'(A_1 + a^{-1}) q_1\gamma_1 - z_0' a^{-1} p_1\} + \mu^3 z_0' \{{}^1\!/_2 (a^{-1} - b^{-1}A_1) [S_1 +$$
$$+ 2z_0'(1 - \gamma_1'')]\gamma_1 - (2\omega^2 + a^{-1}) p_1 S_2\} + \ldots \tag{1.11}$$

$$\ddot\gamma_1 + \gamma_1 = \mu (1 + B_1) p_1 + \mu^2 \{-\gamma_1 [S_1 + 2z_0'(1 - \gamma_1'')] + (1 + B_1) p_1 S_2 +$$
$$+ (1 + C_1) p_1 q_1 \gamma_1' + x_0'\gamma_1'^2 - y_0'\gamma_1\gamma_1' - b^{-1} z_0'\gamma_1 + b^{-1} x_0' - q_1^2\gamma_1\} +$$
$$+ \mu^3 [-z_0'(2 + b^{-1})\gamma_1 S_2 + 2b^{-1} x_0' S_2] + \ldots \tag{1.12}$$

$$\omega^2 = -A_1 B_1 = (a - 1)(b - 1) / ab = (A - C)(B - C) / AB \tag{1.13}$$

Разрешая относительно переменных q_1 и γ_1' соотношения, получающиеся из первого и четвертого уравнений системы (1.6) (1.14)

$$q_1 = (A_1 r_1)^{-1} [-\dot p_1 + \mu a^{-1}(y_0'\gamma_1'' - z_0'\gamma_1')], \qquad \gamma_1' = (r_1)^{-1} [\dot\gamma_1 + \mu q_1 \gamma_1'']$$

в которых величины r_1 и γ_1'' заменены их выражениями (1.10) и подставляя выражения (1.14) в правые части уравнений (1.11) и (1.12), получим квазилинейную автономную систему с двумя степенями свободы, правые части которой зависят от $p_1, \dot p_1, \gamma_1, \dot\gamma_1, p_{10}, \dot p_{10}, \gamma_{10}, \dot\gamma_{10}$.

Будем искать периодические решения этой системы при условиях $A > B > C$, или $A < B < C$ (ω^2 — положительное число). В первом случае $\omega < 1$ и ось z должна совпадать с большей осью эллипсоида инерции. Во втором случае $\omega \geqslant 1$ и ось z должна совпадать с меньшей осью эллипсоида инерции, причем случай $\omega = 1$ соответствует диску

$$A + B = C \qquad (a + b = 1), \qquad z_0 = 0 \tag{1.15}$$

Введем новые переменные p_2 и γ_2 соотношениями

$$p_1 = p_2 + \mu\varkappa + \mu\varkappa_1\gamma_2, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 + \mu\nu p_2 \tag{1.16}$$

$$\varkappa = \frac{x_0' A_1}{b\omega^2}, \qquad \varkappa_1 = -\frac{z_0'}{1-\omega^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{A_1}{b}\right), \qquad \nu = \frac{1+B_1}{1-\omega^2} \tag{1.17}$$

Пользуясь формулами (1.16), (1.10) и (1.14), можно получить следующие разложения по степеням μ

$$S_i = S_{i1} + 2^{2-i}\mu S_{i2} + \ldots \qquad (i = 1,\ 2)$$

$$r_1 = 1 + {}^1/_2\mu^2 S_{11} + \ldots, \quad \gamma_1'' = 1 + \mu S_{21} + \mu^2 (S_{22} - {}^1/_2 S_{11}) + \ldots \tag{1.18}$$

$$q_1 = -A^{-1}\dot p_2 + \mu A_1^{-1}(y_0' a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2) + \ldots, \qquad \gamma_1' = \dot\gamma_2 + \mu\nu_2\dot p_2 + \ldots$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 + a^{-1} z_0, \qquad \nu_2 = \nu - A_1^{-1} \tag{1.19}$$

где

$$S_{11} = a(p_{20}^2 - p_2^2) + b(\dot p_{20}^2 - \dot p_2^2)\,/\,A_1^2 - \tag{1.20}$$
$$-2[x_0'(\gamma_{20} - \gamma_2) + y_0'(\dot\gamma_{20} - \dot\gamma_2)]$$
$$S_{12} = a[\varkappa(p_{20} - p_2) + \varkappa_1(p_{20}\gamma_{20} - p_2\gamma_2)] - bA_1^{-2}[y_0' a^{-1}(\dot p_{20} - \dot p_2) -$$
$$-\varkappa_2(\dot\gamma_{20}\dot p_{20} - \dot\gamma_2\dot p_2)] - x_0'\nu(p_{20} - p_2) - y_0'\nu_2(\dot p_{20} - \dot p_2) + z_0' S_{21}$$
$$S_{21} = a(p_{20}\gamma_{20} - p_2\gamma_2) - bA_1^{-1}(\dot p_{20}\dot\gamma_{20} - \dot p_2\dot\gamma_2)$$
$$S_{22} = a[\nu(p_{20}^2 - p_2^2) + \varkappa(\gamma_{20} - \gamma_2) + \varkappa_1(\gamma_{20}^2 - \gamma_2^2)] +$$
$$+ bA_1^{-1}[-\nu_2(\dot p_{20}^2 - \dot p_2^2) + a^{-1} y_0'(\dot\gamma_{20} - \dot\gamma_2) - \varkappa_2(\dot\gamma_{20}^2 - \dot\gamma_2^2)]$$

Подставляя (1.16) и (1.18) в уравнения (1.11) и (1.12), получим

$$\ddot p_2 + \omega^2 p_2 = \mu^2 F(p_2, \dot p_2, \gamma_2, \dot\gamma_2, \mu), \quad F = F_2 + \mu F_3 + \ldots \tag{1.21}$$
$$\ddot\gamma_2 + \gamma_2 = \mu^2\Phi(p_2, \dot p_2, \gamma_2, \dot\gamma_2, \mu) \quad \Phi = \Phi_2 + \mu\Phi_3 + \ldots$$

$$F_2 = f_2 - \nu\varkappa_1(1 - \omega^2)\,p_2$$

$$F_3 = f_3 - \varkappa_1\varphi_2 - \nu\varkappa_1\varkappa(1 - \omega^2) - \nu\varkappa_1^2(1 - \omega^2)\,\gamma_2 \tag{1.22}$$

$$\Phi_2 = \varphi_2 + \nu\varkappa(1 - \omega^2) + \nu\varkappa_1(1 - \omega^2)\,\gamma_2, \quad \Phi_3 = \varphi_3 - \nu f_2 + \gamma^2\varkappa_1(1 - \omega^2)\,p_2$$

где (1.23)

$$f_2 = -\omega^2 p_2 S_{11} + A_1 b^{-1} x_0' S_{21} + C_1 A_1^{-1} p_2\dot p_2^2 + x_0'\dot p_2\gamma_2 - y_0' a^{-1} p_2\dot\gamma_2 -$$
$$-y_0' A_1^{-1}(A_1 + a^{-1})\,\gamma_2\dot p_2 - z_0' a^{-1} p_2$$

$$f_3 = -\omega^2(\varkappa S_{11} + \varkappa_1\gamma_2 S_{11} + 2p_2S_{12}) + A_1 b^{-1} x_0' S_{22} + C_1A_1^{-1}[\varkappa\dot p_2^2 + \varkappa_1\gamma_2\dot p_2^2 - 2p_2\dot p_2(y_0'a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2)] - x_0'[-\nu_2\dot p_2^2 + \dot\gamma_2(y_0'a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2)] - y_0'a^{-1}[\dot\gamma_2(\varkappa+\varkappa_1\gamma_2) + \nu_2 p_2\dot p_2] + y_0'A_1^{-1}(A_1 + a^{-1})[\gamma_2(y_0'a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2) - \nu p_2\dot p_2] - z_0'a^{-1}(\varkappa+\varkappa_1\gamma_2) + {}^1/_2 z_0'(a^{-1}+A_1b^{-1})\gamma_2S_{11} + z_0'a^{-1}p_2S_{21}$$

$$\varphi_2 = -\gamma_2 S_{11} + (1+B_1)p_2S_{21} - (1-C_1)A_1^{-1}p_2\dot p_2\dot\gamma_2 + x_0'\dot\gamma_2^2 - y_0'\gamma_2\dot\gamma_2 - z_0'b^{-1}\gamma_2 + x_0'b^{-1} - A_1^{-2}\gamma_2\dot p_2^2$$

$$\varphi_3 = -\nu p_2S_{11} - 2\gamma_2S_{21} + (1+B_1)p_2S_{22} + (1+B_1)(\varkappa+\varkappa_1\gamma_2)S_{21} + (1-C_1)A_1^{-1}[-(\varkappa+\varkappa_1\gamma_2)\dot p_2\dot\gamma_2 - \nu_2p_2\dot p_2^2 + p_2\dot\gamma_2(y_0'a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2)] + 2x_0'\nu_2\dot p_2\dot\gamma_2 - y_0'(\nu p_2\dot\gamma_2 + \nu_2\gamma_2\dot p_2) - z_0'b^{-1}\nu p_2 - z_0'b^{-1}\gamma_2S_{21} + 2x_0'b^{-1}S_{21} - A_1^{-2}[-2\gamma_2\dot p_2(y_0'a^{-1} - \varkappa_2\dot\gamma_2) + \nu p_2\dot p_2^2]$$

Эта система будет обладать первым интегралом, получающимся из интеграла (1.9)

$$\gamma_2^2 + \dot\gamma_2^2 + 2\mu(\nu p_2\gamma_2 + \nu_2\dot p_2\dot\gamma_2 + S_{21}) + \mu^2(\ldots) = (\gamma_0'')^{-2} - 1 \qquad (1.24)$$

Будем искать периодические решения $p_2(\tau, \mu)$, $\dot p_2(\tau, \mu)$, $\gamma_2(\tau, \mu)$, $\dot\gamma_2(\tau, \mu)$ системы (1.21), ограничиваясь исследованием только тех из них, которые удовлетворяют условиям

$$p_2(0, 0) = 0, \qquad \dot p_2(0, 0) = 0, \qquad \dot\gamma_2(0, \mu) = 0 \qquad (1.25)$$

Последнее в силу автономности системы (1.21) не нарушает общности получаемого решения.

Так как частотами порождающей системы

$$\ddot p_2 + \omega^2 p_2 = 0, \qquad \ddot\gamma_2 + \gamma_2 = 0 \qquad (1.26)$$

будут величины ω и 1, то возможны три случая [5] построения периодических решений системы (1.21):

1°. Когда частоты различные и соизмеримые ($\omega = m / n$, где m и n — не равные между собой взаимопростые целые числа);

2°. Когда частоты равны ($\omega = 1$);

3°. Когда частоты несоизмеримы (ω — иррациональное число).

2. Рассмотрим первый случай $\omega = m / n$. В этом случае существуют периодические решения порождающей системы (1.26) с периодом $T_0 = 2\pi n$

$$p_2^{(0)} = M_1 \cos\omega\tau + M_2 \sin\omega\tau, \qquad \gamma_2^{(0)} = M_3 \cos\tau \qquad (2.1)$$

Будем предполагать, что исходная автономная система (1.21) имеет периодические решения с периодом $T_0 + \alpha$, обращающиеся в порождающее решение (2.1) при $\mu = 0$. Запишем начальные условия при помощи соотношений

$$p_2(0, \mu) = M_1 + \beta_1, \qquad \dot p_2(0, \mu) = \omega(M_2 + \beta_2)$$
$$\gamma_2(0, \mu) = M_3 + \beta_3, \qquad \dot\gamma_2(0, \mu) = 0 \qquad (2.2)$$

Введем для дальнейшего оператор

$$U = u + \frac{\partial u}{\partial M_1}\beta_1 + \frac{\partial u}{\partial M_2}\beta_2 + \frac{\partial u}{\partial M_3}\beta_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial M_1^2}\beta_1^2 + \ldots \qquad \left(\begin{array}{c} U = G_k,\ H_k \\ u = g_k,\ h_k \end{array}\right)$$

представим [5] искомое периодическое решение в виде

$$p_2(\tau, \mu) = (M_1 + \beta_1)\cos\omega\tau + (M_2 + \beta_2)\sin\omega\tau + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\tau)\mu^k$$

$$\gamma_2(\tau, \mu) = (M_3 + \beta_3)\cos\tau + \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\tau)\mu^k \qquad (2.3)$$

$$g_k(\tau) = \frac{1}{\omega}\int_0^\tau F_k'(t_1)\sin\omega(\tau - t_1)\,dt_1, \qquad h_k(\tau) = \int_0^\tau \Phi_k'(t_1)\sin(\tau - t_1)\,dt_1$$

$$F_k'(\tau) = \frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{d^{k-2}F}{d\mu^{k-2}}\right)_{\beta=\mu=0}, \qquad \Phi_k'(\tau) = \frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{d^{k-2}\Phi}{d\mu^{k-2}}\right)_{\beta=\mu=0} \qquad (2.4)$$

Здесь через β_1, $\omega\beta_2$, β_3 обозначены отклонения начальных значений величин p_2, $\dot{p}_2$, γ_2 в искомом периодическом решении уравнений (1.21) от начальных значений тех же величин в порождающем решении (2.1); эти отклонения являются функциями μ, уничтожающимися при $\mu = 0$.

В силу того, что правые части системы (1.21) начинаются с члена порядка μ^2, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} F_k'(\tau) &= F_k(p_2^{(0)}, \dot{p}_2^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dot{\gamma}_2^{(0)}) \equiv F_k^{(0)} \\ \Phi_k'(\tau) &= \Phi_k(p_2^{(0)}, \dot{p}_2^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dot{\gamma}_2^{(0)}) \equiv \Phi_k^{(0)} \end{aligned} \qquad (k = 2,\ 3) \qquad (2.5)$$

Найдем выражения функций $F_2^{(0)}$ и $\Phi_2^{(0)}$. Вводя обозначения

$$E = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \qquad \cos\varepsilon = M_1/E, \qquad \sin\varepsilon = M_2/E \qquad (2.6)$$

формулы (2.1) представим в виде

$$p_2^{(0)}(\tau) = E\cos(\omega\tau - \varepsilon), \qquad \gamma_2^{(0)}(\tau) = M_3\cos\tau \qquad (2.7)$$

При помощи (2.7) формулы

$$S_{11}^{(0)} = S_{11}(p_2^{(0)}, \dot{p}_2^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dot{\gamma}_2^{(0)}), \qquad S_{21}^{(0)} = S_{21}(p_2^{(0)}, \dot{p}_2^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dot{\gamma}_2^{(0)})$$

на основании (1.20) будут

$$\begin{aligned} S_{11}^{(0)} = E^2\{[a(\cos^2\varepsilon - {}^1/_2) + b\omega^2A_1^{-2}(\sin^2\varepsilon - {}^1/_2) + \\ + {}^1/_2(b\omega^2A_1^{-2} - a)\cos 2(\omega\tau - \varepsilon)\} - 2M_3[x_0'(1 - \cos\tau) + y_0'\sin\tau] \end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$\begin{aligned} S_{21}^{(0)} = M_3E\{a\cos\varepsilon + {}^1/_2(b\omega A_1^{-1} - a)\cos[(\omega - 1)\tau - \varepsilon] - \\ - {}^1/_2(b\omega A_1^{-1} + a)\cos[(\omega + 1)\tau - \varepsilon]\} \end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.7) и (2.8) в соответствующие формулы (1.22) и (1.23), получим для всех рассматриваемых значений ω (за исключением случая $\omega = {}^1/_2$, который разобран ниже) выражения: (2.9)

$$F_2^{(0)} = M_1L(\omega)\cos\omega\tau + M_2L(\omega)\sin\omega\tau + \ldots, \qquad \Phi_2^{(0)} = M_3N(\omega)\cos\tau + \ldots$$

где

$$\begin{aligned} L(\omega) = \omega^2[-(aM_1^2 + b\omega^2A_1^{-2}M_2^2) + {}^1/_4(M_1^2 + M_2^2)(C_1A_1^{-1} + \\ + 3a + b\omega^2A_1^{-2})] + 2M_3\omega^2x_0' - [z_0'a^{-1} + \varkappa_1\nu(1 - \omega^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\omega) = -(aM_1^2 + b\omega^2A_1^{-2}M_2^2) - {}^1/_2(M_1^2 + M_2^2)[aB_1 + \\ + \omega^2A_1^{-2}(1 - b)] + 2M_3x_0' - [z_0'b^{-1} - \varkappa_1\nu(1 - \omega^2)] \end{aligned} \qquad (2.10)$$

По формулам (2.4) и (2.5) получим (2.11)

$$g_k(T_0) = -\frac{1}{\omega}\int_0^{T_0} F_k^{(0)}(t_1)\sin\omega t_1\,dt_1, \quad \dot{g}_k(T_0) = \int_0^{T_0} F_k^{(0)}(t_1)\cos\omega t_1\,dt_1$$

$$h_k(T_0) = -\int_0^{T_0} \Phi_k^{(0)}(t_1)\sin t_1\,dt_1, \qquad \dot{h}_k(T_0) = \int_0^{T_0} \Phi_k^{(0)}(t_1)\cos t_1 dt_1 \quad \begin{pmatrix} T_0 = 2\pi n \\ k = 2, 3 \end{pmatrix}$$

Отсюда, используя (2.9), будем иметь

$$g_2(T_0) = -\pi n\omega^{-1}M_2L(\omega), \qquad \dot{g}_2(T_0) = \pi n M_1 L(\omega)$$
$$h_2(T_0) = 0, \qquad \dot{h}_2(T_0) = \pi n M_3 N(\omega) \tag{2.12}$$

Постоянные величины $M_1, \omega M_2, M_3$, которые представляют собой начальные значения порождающего решения (2.1), а также отклонения $\beta_1(\mu), \omega\beta_2(\mu), \beta_3(\mu)$ и поправку периода α нужно искать из условий периодичности решений $p_2(\tau, \mu)$, $\gamma_2(\tau, \mu)$ и их первых производных; эти условия имеют вид (2.13)

$$\Psi_1 = p_2(T_0 + \alpha, \mu) - p_2(0, \mu) = 0, \qquad \Psi_2 = \dot{p}_2(T_0 + \alpha, \mu) - \dot{p}_2(0, \mu) = 0$$
$$\Psi_3 = \gamma_2(T_0 + \alpha, \mu) - \gamma_2(0, \mu) = 0, \qquad \Psi_4 = \dot{\gamma}_2(T_0 + \alpha, \mu) - \dot{\gamma}_2(0, \mu) = 0$$

Однако в силу существования первого интеграла (1.24) системы (1.21) условие периодичности $\Psi_3 = 0$ не является независимым [6]. Действительно, переписывая интеграл (1.24) в виде

$$\gamma_2^2(T_0 + \alpha, \mu) + \dot{\gamma}_2^2(T_0 + \alpha, \mu) + \mu(\ldots) = \gamma_2^2(0, \mu) + \dot{\gamma}_2^2(0, \mu) + \mu(\ldots)$$

и подставляя формулы (2.13), получим, в соответствии с условием (2.2),

$$2(M_3 + \beta_3)\Psi_3 + \Psi_3^2 + \mu\varphi_1(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \mu) = 0 \tag{2.14}$$

в котором φ_1 является целой функцией всех своих аргументов, причем $\varphi_1(0, 0, 0, 0, \mu) = 0$. При условии $M_3 \neq 0$, которое, как покажем ниже, всегда имеет место, из формулы (2.14) следует, что $\Psi_3 = f(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_4, \mu)$, где f — целая функция всех своих аргументов, причем $f(0, 0, 0, \mu) = 0$. Отсюда вытекает, что условие $\Psi_3 = 0$ из (2.13) выполняется автоматически при выполнении остальных условий

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0 \tag{2.15}$$

Подставляя в интеграл (1.24), взятый при $\tau = 0$, начальные значения (2.2), будем иметь уравнения для определения M_3 и β_3

$$M_3^2 + 2M_3\beta_3 + \beta_3^2 + 2\mu\nu M_3(M_1 + \beta_1) + \ldots = (\gamma_0'')^{-2} - 1$$

Полагая, что величина γ_0'' не зависит от μ, получим

$$M_3^2 = (\gamma_0'')^{-2} - 1, \qquad \beta_3^2 + 2M_3\beta_3 + 2\mu\nu M_3(M_1 + \beta_1) + \ldots = 0 \tag{2.16}$$

Из уравнений (2.16) и из условия (1.3) следует, что (2.17)

$$0 < M_3 = (1 - \gamma_0''^2)^{1/2}(\gamma_0'')^{-1} < \infty, \qquad \beta_3 = -\mu\nu(M_1 + \beta_1) + \ldots$$

и ввиду того, что γ_0'' является произвольным параметром, M_3 — положительная произвольная постоянная.

Таким образом периодическое решение (2.3) будет зависеть от одной произвольной постоянной M_3 и некоторой функции $\beta_3(\mu)$, исчезающей при $\mu = 0$. Заметим, что это свойство не зависит от вида ω и будет иметь место для всех рассматриваемых случаев.

Разлагая правые части уравнений (2.13) в ряды по степеням α и выписывая члены не выше первого порядка (пренебрегая также членами $\mu^2\alpha$), получим независимые условия периодичности (2.15) в виде

$$\begin{gathered} p_2(T_0, \mu) - M_1 - \beta_1 + \alpha\omega(M_2 + \beta_2) = 0 \\ \dot{p}_2(T_0, \mu) - \omega(M_2 + \beta_2) - \alpha\omega^2(M_1 + \beta_1) = 0 \\ \dot{\gamma}_2(T_0, \mu) - \alpha(M_3 + \beta_3) = 0 \end{gathered} \tag{2.18}$$

Из последнего соотношения (2.18), на основании (2.17) и (2.3) определим функцию

$$\alpha = \mu^2 [\dot{H}_2(T_0) + \mu\dot{H}_3(T_0) + \ldots] / (M_3 + \beta_3) \qquad (T_0 = 2\pi n) \tag{2.19}$$

Отсюда вытекает, что, пренебрегая в системе (2.18) членами порядка α^2 и $\mu^2\alpha$, мы пренебрегаем членами порядка μ^4.

В силу условий (1.25) и соотношений (2.2) будем исследовать периодические решения, соответствующие нулевым значениям основных амплитуд

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = 0 \tag{2.20}$$

Подставляя соотношения (2.19), а также (2.20) и (2.3) в первые два уравнения (2.18) и сокращая на μ^2, получим систему для β_1 и β_2:

$$\begin{gathered} G_2(T_0) + \mu G_3(T_0) + \omega\beta_2 [\dot{H}_2(T_0) + \mu\dot{H}_3(T_0) + \ldots] / (M_3 + \beta_3) + \\ + \mu^2(\ldots) = 0 \\ \dot{G}_2(T_0) + \mu\dot{G}_3(T_0) - \omega^2\beta_1 [\dot{H}_2(T_0) + \mu\dot{H}_3(T_0) + \ldots] / (M_3 + \beta_3) + \\ + \mu^2(\ldots) = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

Эту систему при помощи (2.12) можно представить так

$$\begin{gathered} -[L_1(\omega) - \omega^2 N_1(\omega)]\pi n\beta_2/\omega + \mu[G_3(T_0) + \ldots] = 0 \\ [L_1(\omega) - \omega^2 N_1(\omega)]\pi n\beta_1 + \mu[\dot{G}_3(T_0) + \ldots] = 0 \end{gathered} \tag{2.22}$$

Здесь $L_1(\omega)$ и $N_1(\omega)$ получаются из (2.10) заменой M_1, M_2 и M_3 на β_1, β_2 и $M_3 + \beta_3$. На основании (1.13), (1.17) и (1.19) получим

$$L_1(\omega) - \omega^2 N_1(\omega) = W(\omega)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - z_0' W_1(\omega) \tag{2.23}$$

$$W(\omega) = (a-1)(a+b-2)/2b, \qquad W_1(\omega) = (3a + 3b - 4ab - 2)/ab \tag{2.24}$$

Из условия, что ось z направлена по большей или меньшей оси эллипсоида инерции тела, вытекает, что для всех рассматриваемых ω $W(\omega) > 0$. Покажем теперь, что для каждого значения $\omega \geqslant 1$ существует только одна пара чисел a^* и b^*, удовлетворяющих условию $W_1(\omega) = 0$, а для значений $\omega < 1$ величина $W_1(\omega) \neq 0$.

Исключая a^* из системы двух нелинейных уравнений (2.25)

$$3a^* + 3b^* - 4a^*b^* - 2 = 0, \qquad \omega^2 - (a^* - 1)(b^* - 1) / a^*b^* = 0$$

найдем

$$\omega^2 = \frac{(1-b^*)^2}{3b^*(^2/_3 - b^*)}, \quad \text{или} \quad b_{1,2}^* = \frac{1+\omega^2 \pm \sqrt{\omega^2(\omega^2-1)}}{3\omega^2+1} \tag{2.26}$$

Из последнего соотношения вытекает, что оно справедливо только при $\omega \geqslant 1$. Следовательно, должно иметь место соотношение (2.27)

$$0 < a^* \leqslant b^* < 1 \qquad \left(a^* = \frac{1+\omega^2 - \sqrt{\omega^2(\omega^2-1)}}{3\omega^2+1}, \quad b^* = \frac{1+\omega^2+\sqrt{\omega^2(\omega^2-1)}}{3\omega^2+1}\right)$$

Из формул (2.27) следует, что $a^* = b^* = {}^1/_2$ при $\omega = 1$, а для каждого значения $\omega > 1$ существует единственная пара не равных между собой величин a^* и b^*, удовлетворяющих (2.25), причем на основании (2.26)

$$^1/_2 < a^* < b^* < {}^2/_3 \tag{2.28}$$

Предполагая, что

$$z_0' W_1(\omega) \neq 0 \tag{2.29}$$

из уравнений (2.22) получим разложение β_1 и β_2 по целым степеням μ.

Для оценки порядка первого члена этих разложений рассмотрим величины $C_3(T_0)$ и $\dot{C}_3(T_0)$ при условии (2.20). Вычисления показывают, что $C_3(T_0) = \dot{C}_3(T_0) = 0$ при $\omega \neq 2$. Это означает [7], что разложение величин β_1 и β_2 в ряды по целым степеням μ начинается с члена, порядок которого не ниже μ^2. Следовательно, первые члены разложения периодического решения системы (1.6) и величины α при рациональных ω, отличных от 1, 2, $^1/_2$ и при условии $z_0' \neq 0$, $a \neq a^*$, $b \neq b^*$ могут быть представлены в следующем виде:

$$p_1 = -\mu x_0' / bB_1 + \mu\varkappa_1 M_3 \cos\tau + \ldots, \quad q_1 = \mu y_0' / aA_1 + \mu\varkappa_2 A_1^{-1} M_3 \sin\tau + \ldots$$

$$r_1 = 1 - \mu^2 M_3 [x_0'(1-\cos\tau) + y_0' \sin\tau] + \ldots, \quad \gamma_1 = M_3 \cos\tau + \ldots$$

$$\gamma_1' = -M_3 \sin\tau + \ldots \tag{2.30}$$

$$\gamma_1'' = 1 + \mu^2 \{[M_3(1-a)^{-1} x_0' + M_3^2 z_0' (A_1 - 1)(A_1+1)^{-1}] + M_3 (1-b)^{-1} y_0' \sin\tau - M_3(1-a)^{-1} x_0' \cos\tau - {}^1/_2 M_3^2 z_0' (A_1 - 1)(A_1 + 1)^{-1} \cos 2\tau\} + \ldots$$

$$\alpha = 2\mu^2 \pi n (M_3 x_0' - z_0' + \ldots) \tag{2.31}$$

3. Рассмотрим периодические решения системы (1.21) при $\omega = 2$. Для этого найдем величины $g_3(T_0)$ и $\dot{g}_3(T_0)$ при условии (2.20). При этом условии формулы (1.20) перепишутся

$$S_{11}^{(0)} = -2M_3[x_0'(1-\cos\tau) + y_0'\sin\tau], \qquad S_{12}^{(0)} = S_{21}^{(0)} = 0 \tag{3.1}$$

$$S_{22}^{(0)} = [a\varkappa M_3 + {}^1/_2 M_3^2 (a\varkappa_1 + bA_1^{-1}\varkappa_2)] + a^{-1} bA_1^{-1} y_0' M_3 \sin\tau - a\varkappa M_3 \cos\tau - {}^1/_2 M_3^2 (a\varkappa_1 + bA_1^{-1}\varkappa_2)\cos 2\tau$$

Подставляя выражение (3.1) в формулы (1.23) и (1.22) и ограничиваясь членами с $\sin 2\tau$ и $\cos 2\tau$, будем иметь соотношение

$$F_3^{(0)} = V_1 \cos 2\tau + V_2 \sin 2\tau + \ldots \tag{3.2}$$

Здесь

$$V_1 = -\frac{x_0' z_0' M_3^2}{6ab^2}(12b^2 - b - 1), \qquad V_2 = -\frac{y_0' z_0' M_3^2}{6a^2 b(1-b)}(9ab^2 - 17ab + 2b^2 + 4a - 3b + 1) \tag{3.3}$$

На основании соотношений (3.2) и (2.11) получим

$$g_3(2\pi) = -\tfrac{1}{2}\pi V_2, \qquad \dot{g}_3(2\pi) = \pi V_1 \qquad (T_0 = 2\pi) \tag{3.4}$$

Рассмотрим формулы (3.3). Подставляя в (3.3) величину $a = (1 - b)/(3b + 1)$, полученную при $\omega = 2$ из (1.13), будем иметь

$$V_1 = -6M_3^2 x_0' z_0' b^{-2}(1-b)^{-1}(b - \tfrac{1}{3})(b + \tfrac{1}{4})(b + \tfrac{1}{3}) \tag{3.5}$$
$$V_2 = -\tfrac{3}{2} M_3^2 y_0' z_0' b^{-1}(1-b)^{-2}(b - \tfrac{1}{3})(b + 5)(b + \tfrac{1}{3})$$

Из формул (3.5) и соотношения (1.13) вытекает, что величины V_1 и V_2 одновременно обращаются в нуль при выполнении одного из следующих двух условий (из соотношения (2.29) следует, что $z_0' \neq 0$)

$$a = b = \tfrac{1}{3}, \qquad x_0' = y_0' = 0 \tag{3.6}$$

Это означает, что при выполнении любого из условий (3.6) рассматриваемый случай сводится к предыдущему и первые члены разложений периодического решения системы (1.6) и величины α могут быть получены из формул (2.30) и (2.31).

Если V_1 и V_2 не обращаются одновременно в нуль, то, подставляя формулы (3.4) в систему (2.22) при выполненном условии $W_1(2) \neq 0$, получим при $\omega = 2$ $(n = 1)$

$$\beta_1 = \mu V_1 / z_0' W_1(2) + \ldots, \beta_2 = \mu V_2 / z_0' W_1(2) + \ldots$$

Следовательно, в формулах (2.30) изменятся только выражения для p_1, q_1, γ_1'', которые примут вид (3.7)

$$p_1 = -\mu\frac{x_0'}{bB_1} + \mu\varkappa_1 M_3 \cos\tau + \mu\frac{V_1}{z_0' W_1(2)}\cos 2\tau + \mu\frac{V_2}{z_0' W_1(2)}\sin 2\tau + \ldots$$
$$q_1 = \mu\frac{y_0'}{aA_1} + \mu\frac{\varkappa_2 M_3}{A_1}\sin\tau + \mu\frac{2V_1}{A_1 z_0' W_1(2)}\sin 2\tau - \mu\frac{2V_2}{A_1 z_0' W_1(2)}\cos 2\tau + \ldots$$

$$\gamma_1'' = 1 + \mu^2 M_3(s_0 + s_1\sin\tau + s_2\cos\tau + s_3\cos 2\tau + s_4\cos 3\tau + s_5\sin 3\tau) + \ldots$$

где

$$s_0 = \frac{x_0'}{1-a} + \frac{1}{2}M_3 z_0'\frac{A_1 - 1}{A_1 + 1} + \frac{aV_1}{z_0' W_1(2)}, \qquad s_1 = \frac{y_0'}{1-b} + \frac{V_2}{2z_0' W_1(2)}\left(\frac{2b}{A_1} - a\right)$$
$$s_2 = -\frac{x_0'}{1-a} + \frac{V_1}{2z_0' W_1(2)}\left(\frac{2b}{A_1} - a\right), \qquad s_3 = -\frac{1}{2}M_3 z_0'\frac{A_1 - 1}{A_1 + 1}$$
$$s_4 = -\frac{V_1}{2z_0' W_1(2)}\left(\frac{2b}{A_1} + a\right), \qquad s_5 = -\frac{V_2}{2z_0' W_1(2)}\left(\frac{2b}{A_1} + a\right)$$

При условии $W_1(2) = 0$ $(a^* = \tfrac{1}{13}(5 - \sqrt{12}),\ b^* = \tfrac{1}{13}(5 + \sqrt{12}))$ система (2.22) примет вид

$$\beta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) = -\mu V_1^* / W^*(2) + \ldots, \quad \beta_2(\beta_1^2 + \beta_2^2) = -\mu V_2^* / W^*(2) + \ldots \tag{3.8}$$

Отсюда

$$\beta_1 = \mu^{1/3} Y_1(\mu), \qquad Y_1(\mu) = -V_1^*[W^*(2)(V_1^{*2} + V_2^{*2})]^{-1/3} + \mu^{1/3}(\ldots)$$
$$\beta_2 = \mu^{1/3} Y_2(\mu), \qquad Y_2(\mu) = -V_2^*[W^*(2)(V_1^{*2} + V_2^{*2})]^{-1/3} + \mu^{1/3}(\ldots) \tag{3.9}$$

В этом случае первые члены разложения периодического решения системы (1.6) и величина α могут быть представлены в следующем виде

$$p_1 = \mu^{1/3} Y_1(\mu)\cos 2\tau + \mu^{1/3} Y_2(\mu)\sin 2\tau - \mu x_0' / b^* B_1^* + \mu\varkappa_1^* M_3\cos\tau + \ldots$$
$$q_1 = \mu^{1/3} 2Y_1(\mu)(A_1^*)^{-1}\sin 2\tau - \mu^{1/3} 2Y_2(\mu)(A_1^*)^{-1}\cos 2\tau + \mu y_0' / a^* A_1^* + \mu\varkappa_2^*(A_1^*)^{-1}\sin\tau + \ldots$$
$$r_1 = 1 - \mu^2 M_3[x_0'(1 - \cos\tau) + y_0'\sin\tau] + \ldots$$

$$\gamma_1 = (M_3 + \beta_3)\cos\tau + \mu^{4/3}\nu^* Y_1(\mu)\cos 2\tau + \mu^{4/3}\nu^* Y_2(\mu)\sin 2\tau + \ldots \qquad (3.10)$$

$$\gamma_1' = -(M_3 + \beta_3)\sin\tau - \mu^{4/3} 2\nu_2^* Y_1(\mu)\sin 2\tau + \mu^{4/3} 2\nu_2^* Y_2(\mu)\cos 2\tau + \ldots$$

$$\gamma_1'' = 1 + \mu^{4/3} M_3 [a^* Y_1(\mu) + {}^1/_2 Y_1(\mu)(2b^*/A_1^* - a^*)\cos\tau + {}^1/_2 Y_2(\mu)(2b^*/A_1^* -$$
$$- a^*)\sin\tau - {}^1/_2 Y_1(\mu)(2b^*/A_1^* + a^*)\cos 3\tau - {}^1/_2 Y_2(\mu)(2b^*/A_1^* + a^*)\sin 3\tau] + \ldots$$

$$\alpha = \mu^2\pi\{2M_3 x_0' - 2z_0' - \mu^{2/3}[Y_1^2(\mu)(a^* + {}^1/_2 a^* B_1^* + 2(A_1^*)^{-2} - 2b^*(A_1^*)^{-2}) +$$
$$+ Y_2^2(\mu)(4b^*(A_1^*)^{-2} + {}^1/_2 a^* B_1^* + 2(A_1^*)^{-2} - 2b(A_1^*)^{-2})]\} + \ldots \qquad (3.11)$$

Здесь звездочка означает результат подстановки $a = a^*$, $b = b^*$.

4. Для определения периодических решений системы (1.21) при $\omega = {}^1/_2$ из формул (1.23) и (1.22) получим

$$F_2^{(0)} = [(L({}^1/_2) + x_0' M_3 L_2) M_1 + y_0' M_3 L_3 M_2]\cos {}^1/_2\tau +$$
$$+ [(L({}^1/_2) - x_0' M_3 L_2) M_2 + y_0' M_3 L_3 M_1]\sin {}^1/_2\tau + \ldots \qquad (4.1)$$

$$\Phi_2^{(0)} = M_3 N({}^1/_2)\cos\tau + \ldots,\quad L_2 = -{}^1/_2 A_1 (a/b - {}^1/_2 A_1^{-1}),\quad L_3 = {}^1/_2(1 - {}^1/_2 A_1^{-1})\,a^{-1} \qquad (4.2)$$

Из формул (2.11) и (4.1) найдем выражения

$$\left.\begin{aligned} G_2(T_0) &= -4\pi[(L_1({}^1/_2) - x_0'(M_3+\beta_3)L_2)\beta_2 + y_0'(M_3+\beta_3)L_3\beta_1] \\ \dot G_2(T_0) &= 2\pi[(L_1({}^1/_2) + x_0'(M_3+\beta_3)L_2)\beta_1 + y_0'(M_3+\beta_3)L_3\beta_2] \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

$$H_2(T_0) = 0,\qquad \dot H_2(T_0) = 2\pi(M_3+\beta_3)N_1({}^1/_2)\qquad (T_0 = 4\pi)$$

подставляя которые в систему (2.21), будем иметь уравнения для β_1 и β_2:

$$[L_1({}^1/_2) - {}^1/_4 N_1({}^1/_2) - x_0' M_3 L_2]\beta_2 + y_0' M_3 L_3 \beta_1 + \mu[-{}^1/_4\pi^{-1} g_3(T_0) +$$
$$+ \rho_1(\beta_1,\beta_2)] + \mu^2(\ldots) = 0 \qquad (4.4)$$

$$[L_1({}^1/_2) - {}^1/_4 N_1({}^1/_2) + x_0' M_3 L_2]\beta_1 + y_0' M_3 L_3 \beta_2 + \mu[{}^1/_2\pi^{-1}\dot g_3(T_0) + \rho_2(\beta_1,\beta_2)] +$$
$$+ \mu^2(\ldots) = 0$$

На основании формулы (2.23) и выполняющегося при $\omega = {}^1/_2$ соотношения $\dot g_3(4\pi) = g_3(4\pi) = 0$, систему (4.4) можно представить в виде

$$y_0' M_3 L_3 \beta_1 - [x_0' M_3 L_2 + z_0' W_1({}^1/_2)]\beta_2 + W({}^1/_2)\beta_2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \mu\rho_3(\beta_1,\beta_2) +$$
$$+ \mu^2(\ldots) = 0 \qquad (4.5)$$

$$[x_0' M_3 L_2 - z_0' W_1({}^1/_2)]\beta_1 + y_0' M_3 L_3 \beta_2 + W({}^1/_2)\beta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \mu\rho_4(\beta_1,\beta_2) +$$
$$+ \mu^2(\ldots) = 0$$

где $\rho_i(\beta_1, \beta_2)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — целые функции своих аргументов, исчезающие при условии $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Будем предполагать, что имеет место условие

$$M_3^2(x_0'^2 L_2^2 + y_0'^2 L_3^2) - z_0'W_1^2({}^1/_2) \neq 0 \qquad (4.6)$$

На основании соотношения $a > b > 1$, вытекающего из условия $\omega = {}^1/_2$, из формул (4.2) получаем, что $L_2 > 0$, $L_3 > 0$; кроме того, по доказанному $W_1({}^1/_2) \neq 0$.

Поэтому для каждого набора чисел x_0', y_0', z_0', удовлетворяющих условию

$$z_0'(x_0'^2 + y_0'^2) \neq 0 \qquad (4.7)$$

и величин a и b, удовлетворяющих соотношению $\omega = {}^1/_2$, существует только одно значение M_3

$$M_3^\circ = [z_0' W_1^2({}^1/_2) / (x_0'^2 L_2^2 + y_0'^2 L_3^2)]^{1/2} \qquad (4.8)$$

или, на основании (2.17) и (1.3) — одно значение γ_0''

$$\Gamma_0'' = (x_0'^2 L_2^2 + y_0'^2 L_3^2)^{1/2}[x_0'^2 L_2^2 + y_0'^2 L_3^2 + z_0'^2 W_1^2({}^1/_2)]^{-1/2} \qquad (4.9)$$

при котором условие (4.6) не удовлетворяется. Если условие (4.7) не выполняется, соотношение (4.6) имеет место при любом M_3. Таким образом, условие (4.6) эквивалентно условию

$$\gamma_0'' \neq \Gamma_0'' \quad (\text{или } M_3 \neq M_3^\circ) \tag{4.10}$$

При выполнении условия (4.10) из уравнений (4.5) следует [7], что разложение величин β_1 и β_2 в ряды по степеням μ начинается с члена, порядок которого не ниже μ^2. В этом случае первые члены разложения по степеням μ периодического решения системы (1.6) и величины α могут быть найдены по формулам (2.30) и (2.31), взятым при $\omega = 1/2$.

5. Рассмотрим случай $\omega = 1$, который соответствует диску (1.15). В этом случае в формулах (1.18) — (1.23) нужно положить

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \nu = 0, \qquad \nu_2 = B_1 = -1, \qquad A_1 = 1 \tag{5.1}$$

Тогда, подставляя выражения для $S_{ij}^{(0)}\,(i, j = 1, 2)$

$$\begin{aligned}
S_{11}^{(0)} &= -2M_3\,[x_0'\,(1-\cos\tau) + y_0'\sin\tau] - E^2\,(a-b)\,[{}^1/_2\cos 2\,(\tau-\varepsilon) + {}^1/_2 - \cos^2\varepsilon]\\
S_{12}^{(0)} &= E\,\{y_0'\,(1 - b\,/\,a)\,[\sin(\tau-\varepsilon) + \sin\varepsilon] - ab^{-1}x_0'\,[\cos(\tau-\varepsilon) - \cos\varepsilon]\}\\
S_{21}^{(0)} &= {}^1/_2\,M_3\,E\,[-\cos(2\tau-\varepsilon) + \cos\varepsilon]\\
S_{22}^{(0)} &= M_3\,(-ab^{-1}x_0'\cos\tau + ba^{-1}y_0'\sin\tau + ab^{-1}x_0') + E^2b\,[{}^1/_2\cos 2\,(\tau-\varepsilon) - {}^1/_2 + \sin^2\varepsilon]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

в формулы (1.22) и (1.23), на основании (2.11) и (2.20) получим

$$\begin{aligned}
G_2\,(T_0) &= -\pi\beta_2\,[2\,(M_3+\beta_3)\,x_0' + {}^1/_2\,(a-b)\,(\beta_2^2-\beta_1^2)]\\
\dot G_2\,(T_0) &= \pi\beta_1\,[2\,(M_3+\beta_3)\,x_0' + {}^1/_2\,(a-b)\,(\beta_2^2-\beta_1^2)]\\
G_3\,(T_3) &= -\pi\,\{-2\beta_2\,[y_0'\,(1-a^{-1}b)\,\beta_2 + ab^{-1}x_0'\,\beta_1] + 3a^{-1}b^{-1}x_0'y_0'\,(M_3+\beta_3)\}\\
\dot G_3\,(T_0) &= \pi\,\{-2\beta_1\,[y_0'\,(1-ba^{-1})\,\beta_2 + ab^{-1}x'_0\beta_1] + [a^{-2}\,(a+1)\,y_0'^2 -\\
&\qquad - b^{-2}\,(b+1)\,x_0'^2]\,(M_3+\beta_3)\}\\
H_2\,(T_0) &= 0, \quad \dot H_2\,(T_0) = \pi\,(M_3+\beta_3)\,[2\,(M_3+\beta_3)\,x_0' - (a\beta_1^2 + b\beta_2^2)] \quad (T_0 = 2\pi)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Подставляя формулы (5.3) в систему (2.21) и соотношение (2.19) при $\omega = 1$, получим уравнения для определения β_1 и β_2 и выражение для α в виде

$$\beta_1\,(\beta_1^2+\beta_2^2) = -\mu V_3 + \ldots, \quad \beta_2\,(\beta_1^2+\beta_2^2) = -\mu V_4 + \ldots \tag{5.4}$$

$$V_3 = 2M_3\,[a^{-2}\,(a+1)\,y_0'^2 - b^{-2}\,(b+1)\,x_0'^2], \qquad V_4 = 6M_3a^{-1}b^{-1}x_0'y_0' \tag{5.5}$$

$$\alpha = \mu^2\pi\,(2M_3x_0' - a\beta_1^2 - b\beta_2^2 + \ldots) \tag{5.6}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \mu^{1/3}Y_3\,(\mu), \qquad Y_3\,(\mu) = -V_3\,[V_3^2 + V_4^2]^{-1/3} + \mu^{1/3}\,(\ldots)\\
\beta_2 &= \mu^{1/3}Y_4\,(\mu), \qquad Y_4\,(\mu) = -V_4\,[V_3^2 + V_4^2]^{-1/3} + \mu^{1/3}\,(\ldots)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Из формул (5.5) следует, что величины V_3 и V_4 одновременно в нуль не обращаются поэтому соотношения (5.7) справедливы всегда, кроме не рассматриваемого нами случая $x_0' = y_0' = z_0' = 0$. Следовательно, первые члены разложения периодического решения системы (1.6) и величины α при $\omega = 1$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \mu^{1/3}Y_3\,(\mu)\cos\tau + \mu^{1/3}Y_4\,(\mu)\sin\tau + \mu x_0'\,/\,b + \ldots\\
q_1 &= \mu^{1/3}Y_3\,(\mu)\sin\tau - \mu^{1/3}Y_4\,(\mu)\cos\tau + \mu y_0'\,/\,a + \ldots
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 - \mu^2M_3\,[x_0'\,(1-\cos\tau) + y_0'\sin\tau] + \ldots, \quad \gamma_1 = (M_3+\beta_3)\cos\tau + \ldots\\
\gamma_1' &= -(M_3+\beta_3)\sin\tau + \mu^{4/3}\,Y_3\,(\mu)\sin\tau - \mu^{4/3}\,Y_4\,(\mu)\cos\tau + \ldots\\
\gamma_1'' &= 1 - {}^1/_2\,\mu^{4/3}M_3\,[Y_3\,(\mu)\cos 2\tau + Y_4\,(\mu)\sin 2\tau - Y_3\,(\mu)] + \ldots\\
\alpha &= \mu^2\pi\,[2M_3x_0' - \mu^{2/3}aY_3^2\,(\mu) - \mu^{2/3}bY_4^2\,(\mu) + \ldots]
\end{aligned} \tag{5.9}$$

6. В случае, когда ω — иррациональное число, в силу условий (2.17) и (2.20) нужно [8] искать периодическое решение системы (1.21) с периодом $2\pi + \alpha$ в виде

$$p_2(\tau, \mu) = \chi_1(\beta_3, \mu)\cos\omega\tau + \chi_2(\beta_3, \mu)\sin\omega\tau + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\tau)\mu^k \qquad (6.1)$$

$$\gamma_2(\tau, \mu) = (M_3 + \beta_3)\cos\tau + \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\tau)\mu^k$$

где $\chi_1(\beta_3, \mu)$ и $\chi_2(\beta_3, \mu)$ — подлежащие определению аналитические функции своих аргументов, причем $\chi_1(\beta_3, 0) = \chi_2(\beta_3, 0) = 0$. Представляя эти функции в виде рядов:

$$\chi_i(\beta_3, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(Q_k^{(i)} + \frac{\partial Q_k^{(i)}}{\partial M_3}\beta_3 + {}^1/_2\frac{\partial^2 Q_k^{(i)}}{\partial M_3^2}\beta_3^2 + \ldots\right)\mu^k \qquad (i = 1, 2)\ (6.2)$$

и заменяя ими величины $M_1 + \beta_1$ и $M_2 + \beta_2$ в условиях периодичности (2.18), получим при помощи (6.1) бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов $Q_k^{(i)}$. Так как коэффициенты $Q_1^{(i)}$ определяются из системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$Q_1^{(1)}(1 - \cos 2\pi\omega) - Q_1^{(2)}\sin 2\pi\omega = 0, \qquad Q_1^{(1)}\sin 2\pi\omega + Q_1^{(2)}(1 - \cos 2\pi\omega) = 0$$

с отличным от нуля определителем $\Delta = 2(1 - \cos 2\pi\omega)$, то они являются тривиальными решениями этой системы и ряды (6.2) будут начинаться с члена, порядок которого не ниже μ^2. Отсюда следует, что разложение $p_2(\tau, \mu)$ в ряды по степеням μ также начинается с члена, порядок которого не ниже μ^2; величины $H_2(T_0)$ и $\dot{H}_2(T_0)$ $(T_0 = 2\pi)$ можно взять из формулы (2.12), заменяя $N(\omega)$ на $N_1(\omega)$, а M_3 на $M_3 + \beta_3$.

Таким образом, первые члены разложения по степеням μ периодического решения системы (1.6) и величина α могут быть найдены по формулам (2.30) и (2.31).

7. Проведем анализ полученного движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при помощи углов Эйлера θ, ψ, φ

$$\cos\theta = \gamma'', \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1 - \gamma''^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0'} \qquad (7.1)$$

Предварительно заметим, что в силу автономности исходной системы (1.1) и системы (1.21) найденные периодические решения будут оставаться периодическими и при замене t на $t + h$, где h — произвольная величина. Эту величину можно заменить на основании последней формулы (7.1), считая, что начальный момент времени соответствует моменту $t = h$, на величину

$$\varphi_0 = {}^1/_2\,\pi + r_0 h + \ldots \qquad (7.2)$$

и тем самым ввести произвольный начальный угол собственного вращения.

Выше были получены четыре системы формул (2.30), (3.7) (3.10) и (5.8), которыми исчерпываются все виды различных разложений искомых периодических решений при соответствующем приближении и при указанных ограничениях. Подставляя разложения (2.30), (3.7), (3.10), (5.3), в которых t заменено на $t + h$, вместе с соотношениями (1.5) в формулы (7.1) и воспользовавшись (2.17), представленной в виде

$$M_3 = \operatorname{tg}\theta_0 \qquad (7.3)$$

будем иметь следующие выражения для углов θ и ψ. Для системы (2.30)

$$\theta - \theta_0 = -\mu^2\left[\theta^{(1)}(t + h) - \theta^{(1)}(h)\right] + \ldots \qquad (7.4)$$

$$r_0(\psi - \psi_0) = -MgC^{-1}z_0 t + \mu c\csc\theta_0\sqrt{\cos\theta_0}\left[\psi^{(1)}(t + h) - \psi^{(1)}(h)\right] + \ldots$$

$$\theta^{(1)}(t) = y_0' a^{-1}A_1^{-1}\sin r_0 t + x_0' b^{-1}B_1^{-1}\cos r_0 t - {}^1/_2 z_\theta'\operatorname{tg}\theta_0(A_1 - 1)(A_1 + 1)^{-1}\cos 2r_0 t$$

$$\psi^{(1)}(t) = -x_0' b^{-1}B_1^{-1}\sin r_0 t + y_0' a^{-1}A_1^{-1}\cos r_0 t + {}^1/_4\operatorname{tg}\theta_0(\varkappa_1 + \varkappa_2/A_1)\sin 2r_0 t$$

Для системы (3.7)

$$\theta - \theta_0 = -\mu^2 [\theta^{(2)}(t + h) - \theta^{(2)}(h)] + \ldots \tag{7.5}$$

$$r_0(\psi - \psi_0) = -\operatorname{Mg} C^{-1} z_0 t + \mu c \csc\theta_0 \sqrt{\cos\theta_0}\, [\psi^{(2)}(t + h) - \psi^{(2)}(h)] + \ldots$$

$$\theta^{(2)}(t) = s_1 \sin r_0 t + s_2 \cos r_0 t + s_3 \cos 2r_0 t + s_4 \cos 3r_0 t + s_5 \sin 3r_0 t$$

$$\psi^{(2)}(t) = -\left[\frac{x_0'}{bB_1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{A_1}\right)\frac{V_1}{z_0' W_1 (2)}\right] \sin r_0 t + \left[\frac{y_0'}{aA_1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{A_1}\right)\frac{V_2}{z_0' W_1 (2)}\right] \cos r_0 t +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{4}\left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2}{A_1}\right)\sin 2r_0 t + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A_1}\right)\frac{V \sin 3r_0 t}{z_0' W_1 (2)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A_1}\right)\frac{V_2 \cos 3r_0 t}{z_0' W_1 (2)}$$

Для системы (3.10)

$$\theta - \theta_0 = -\mu^{4/3} [\theta^{(3)}(t + h) - \theta^{(3)}(h)] + \ldots \tag{7.6}$$

$$r_0(\psi - \psi_0) = \{-Mgz_0 C^{-1} + {}^1/_2\, \mu^{2/3} [Y_1^2(\mu) + Y_2^2(\mu)] (\nu^* - 4\nu_2^* / A_1^*)\}\, t +$$

$$+ \mu^{1/3} c \csc\theta_0 \sqrt{\cos\theta_0}\, [\psi^{(3)}(t + h) - \psi^{(3)}(h)] + \ldots$$

$$\theta^{(3)}(t) = {}^1/_2\, Y_1(0)(2b^* / A_1^* - a^*) \cos r_0 t + {}^1/_2\, Y_2(0)(2b^* / A_1^* - a^*) \sin r_0 t -$$

$$- {}^1/_2 Y_1(0)(2b^* / A_1^* + a^*) \cos 3r_0 t - {}^1/_2\, Y_2(0)(2b^* / A_1^* + a^*) \sin 3r_0 t$$

$$\psi^{(3)}(t) = ({}^1/_2 - 1 / A_1^*)\, Y_1(0) \sin r_0 t - ({}^1/_2 - 1 / A_1^*)\, Y_2(0) \cos r_0 t +$$

$$+ {}^1/_3\, ({}^1/_2 + 1 / A_1^*)\, Y_1(0) \sin 3r_0 t - {}^1/_3\, ({}^1/_2 + 1 / A_1^*)\, Y_2(0) \cos 3r_0 t$$

Для системы (5.8)

$$\theta - \theta_0 = -{}^1/_2 \mu^{4/3} [\theta^{(4)}(t + h) - \theta^{(4)}(h)] + \ldots \tag{7.7}$$

$$r_0(\psi - \psi_0) = {}^1/_2 \mu^{1/3} c \csc\theta_0 \sqrt{\cos\theta_0}\, [\psi^{(4)}(t + h) - \psi^{(4)}(h)] + \ldots$$

$$\theta^{(4)}(t) = -Y_3(0)\cos 2r_0 t - Y_4(0)\sin 2r_0 t - \quad \psi^{(4)}(t) = Y_3(0)\sin 2r_0 t - Y_4(0)\cos 2r_0 t$$

Во всех случаях величина φ выражается по формуле

$$\varphi - \varphi_0 = [r_0 + MgC^{-1} r_0^{-1} (z_0 \cos\theta_0 - x_0 \sin\theta_0)]\, t + \ldots \tag{7.8}$$

В этих формулах θ_0, как это следует из выражения (7.3) — произвольный начальный (при $t = 0$) угол нутации; ψ_0 — произвольный начальный угол прецессии. Заменяя в полученных формулах h на φ_0 из (7.2), видим, что выражения углов Эйлера θ, ψ, φ зависят от четырех произвольных постоянных $\theta_0, \psi_0, \varphi_0$ и r_0 (r_0 — велико).

Из формул (7.4) — (7.6) следует, что для любого тяжелого твердого тела при $z_0 \neq 0$ (за исключением указанных особых случаев) с одной неподвижной точкой, приведенного в быстрое вращение вокруг большей или меньшей оси эллипсоида инерции, можно указать начальные условия, при которых тело будет совершать уже в первом приближении псевдорегулярную прецессию вокруг вертикальной оси. Из этих шести начальных условий четыре — $\theta_0, \psi_0, \varphi_0$, r_0 (r_0 — велико) — могут быть произвольными.

В качестве примера рассмотрим случай регулярной прецессии быстрого гироскопа Лагранжа ($A = B$, $x_0 = y_0 = 0$). Системе (1.1), переписанной для этого случая, будут удовлетворять частные решения

$$\gamma'' = \gamma_0'', \qquad p = \lambda\gamma, \qquad q = \lambda\gamma', \qquad r = r_0 \tag{7.9}$$

$$\lambda = \frac{r_0(m_1 - 1)}{2\gamma_0''}\left[-1 + \left(1 + \frac{4\gamma_0'' c_1^2}{r_0^2 (m_1 - 1)^2}\right)^{1/2}\right], \qquad m_1 = \frac{A - C}{A}, \qquad c_1^2 = \frac{Mgz_0}{A}$$

Подставляя решения (7.9) в (7.1), будем иметь соотношения

$$\cos\theta = \gamma_0'', \qquad d\psi / dt = \lambda, \qquad d\varphi / dt = r_0 - \lambda\gamma''_0$$

из которых, при условии, что r_0 велико, получим (7.10)

$$\theta = \theta_0, \qquad \psi = \psi_0 - \operatorname{Mg} C^{-1} r_0^{-1} z_0 t + \ldots, \; \varphi = \varphi_0 + (r_0 + \operatorname{Mg} C^{-1} r_0^{-1} z_0 \cos\theta_0) t + \ldots$$

Выражения (7.10) совпадают с формулами (7.4), (7.5), (7.6) и (7.8), переписанными для рассматриваемого случая.

При условии $z_0 = 0$ случаю $\omega = 1$ соответствуют формулы (7.7); при этом условии указанные в предыдущих пунктах ограничения, вызванные исследованием только первых членов разложения искомого периодического решения, позволяют рассмотреть еще случай иррациональных ω и $\omega = 1/2$, которым соответствуют формулы (7.4). Формулы (7.4) и (7.7) перепишутся в следующем виде:

$$\theta - \theta_j = R_j \sin\theta_0 \cos(jr_0 t - \varepsilon_j) + \ldots \quad (j = 1, 2), \qquad R_1 = \mu^2 E_1 \csc\theta_0$$
$$\psi - \psi_j = R_j \sin(jr_0 t - \varepsilon_j) + \ldots, \qquad R_2 = {}^1/_2 \mu^{4/3} E_2 \csc\theta_0 \tag{7.11}$$
$$\varphi - \varphi_0 = (r_0 - MgC^{-1} r_0^{-1} x_0 \sin\theta_0)\, t + \ldots$$

$$E_1 = \left[\left(\frac{x_0'}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{y_0'}{b-1}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad E_2 = [Y_3^2(0) + Y_4^2(0)]^{1/2}, \qquad \varepsilon_j = \varepsilon_j^\circ - j(\varphi_0 - {}^1/_2\pi)$$

$$\cos\varepsilon_1^\circ = \frac{x_0'}{(1-a)E_1}, \qquad \sin\varepsilon_1^\circ = \frac{y_0'}{(b-1)E_1}, \qquad \cos\varepsilon_2^\circ = \frac{Y_3(0)}{E_2}, \qquad \sin\varepsilon_2^\circ = \frac{Y_4(0)}{E_2}$$

$$\theta_j = \theta_0 - R_j \sin\theta_0 \cos\varepsilon_j, \qquad \psi_j = \psi_0 + R_j \sin\varepsilon_j$$

где $j = 2$ соответствует случаю диска.

Рассмотрим сферический прямоугольник, образованный параллелями, отстоящими от средней параллели θ_j на угол $\pm R_j \sin\theta_0$, и меридианами, отстоящими от среднего меридиана ψ_j на угол $\pm R_j$. Тогда траекторией оси z соответствующего тяжелого твердого тела будет эллипс

$$\frac{(\theta - \theta_j)^2}{R_j^2 \sin^2\theta_0} + \frac{(\psi - \psi_j)^2}{R_j^2} = 1 \qquad (j = 1, 2) \tag{7.12}$$

который касается середины сторон этого сферического прямоугольника. Описывая этот эллипс, ось z тела будет совершать в первом приближении периодическое движение с периодом $T = 2\pi / jr_0$, проходя в моменты времени

$$t_{n_1} = (\pi n_1 + \varepsilon_j) / jr_0 \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

через точки пересечения средней параллели с крайними меридианами, а в моменты

$$t_{n_2} = [{}^1/_2(2n_2 + 1)\pi + \varepsilon_j] / jr_0 \qquad (n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

через точки пересечения среднего меридиана с крайними параллелями. Собственное вращение тела, как это следует из последней формулы (7.11), будет мало отличаться от равномерного вращения с большой угловой скоростью r_0.

Таким образом, для тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой при $z_0 = 0$ и при указанных ограничениях на моменты инерции, приведенного в быстрое вращение вокруг большей или меньшей оси эллипсоида инерции, можно указать начальные условия, при которых тело в первом приближении будет совершать найденное выше движение. Как и в случае $z_0 \neq 0$, из этих шести начальных условий, по крайней мере, четыре $\theta_0, \psi_0, \varphi_0$ и r_0 (r_0 — велико) могут быть произвольными.

Поступила 16 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 1.
2. Архангельский Ю. А. Движение быстрого гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
3. Кротова П. Г. Интегрирование уравнений движения несимметричного гироскопа. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1958, № 7.
4. Чертков Р. И. Метод Якоби в динамике твердого тела. Судпромгиз, Л., 1960.
5. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. № 6.
6. Архангельский Ю. А. О периодических решениях квазилинейных автономных систем, обладающих первыми интегралами. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. № 2.
7. Гурса Э. Курс математического анализа т. 1, ч. II, ГТТИ, 1933.
8. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.