

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ
С ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТЬЮ И ЗАДАНЫМ
АКТИВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Ю. Н. Иванов

(Москва)

Оптимальные режимы движения тела переменной массы с ограниченной мощностью реактивной струи были рассмотрены в ряде статей [1-9]. В них время работы двигательной установки выбиралось оптимальным. Цель исследования — обобщение полученных ранее результатов на случай, когда время работы двигательной установки задано и меньше оптимального.

В § 1 указывается общий прием решения вариационной задачи с заданным временем действия управления, меньшим оптимального. В § 2 формулируется вариационная проблема о движении аппарата с двигателем ограниченной мощности, время работы которого (активное время) задано и меньше оптимального. В § 3 и § 4 общие результаты иллюстрируются анализом оптимальных движений в плоскопараллельном гравитационном поле. Рассматриваются два предельных случая регулирования двигательной системы: идеально регулируемая система (переменная оптимальная тяга — § 3) и нерегулируемая система (постоянная тяга — § 4).

§ 1. Рассмотрим задачу Майера в применении к динамической системе

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_k) \quad (i, j = 0, 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

Величины x_i, u_k — фазовые координаты и управляющие функции соответственно, дифференцирование производится по времени t ; граничные условия определены в заданные начальный ($t = 0$) и конечный ($t = T$) моменты времени, значение фазовой координаты $x_0(T)$ — контрольный функционал, подлежащий оптимизации. Одна из управляющих функций ограничена снизу $u_1 \geq 0$. Будем называть управление u_1 включенным, если $u_1 > 0$, и выключенным, если $u_1 = 0$; сумму всех интервалов времени, на которых управление u_1 включено, назовем временем действия управления T_m .

Решив вариационную задачу, найдем время $T_m^* \leq T$, которое определим как оптимальное время действия управления u_1 .

Пусть в дополнение к сформулированной выше вариационной проблеме задано время действия управления u_1 , меньшее оптимального $T_m < T_m^*$.

Для сведения такой усложненной вариационной постановки к стандартной постановке Майера введем дополнительную фазовую координату t_m — текущее время действия управления u_1 , и управление δ , связанные дифференциальным уравнением $\dot{t}_m = \delta$. Управление $\delta(t)$ — релейная функция, принимающая значение единица в моменты включения и значение нуль в моменты выключения управления u_1 . Используя свойства функции $\delta(t)$, заменим управление u_1 на $u_1\delta$; это произведение совпадает

с u_1 в моменты включения и обращается в нуль в моменты выключения. Система (1.1) примет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_1\delta, u_k), \quad \dot{t}_m = \delta \quad (i, j = 0, 1, \dots, n; k = 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

Если одновременно с упомянутыми краевыми условиями для фазовых координат $x_i(0)$ и $x_i(T)$ будут удовлетворены краевые условия для вспомогательной координаты t_m

$$t_m(0) = 0, \quad t_m(T) = \int_0^T \delta dt = T_m < T_m^*$$

а релейное управление $\delta(t)$ наряду с остальными управлениями выбрано оптимальным в смысле контрольного функционала $x_0(T)$, то вариационная задача с дополнительным условием заданного времени $T_m < T_m^*$ будет решена. Иными словами, будут указаны оптимальное число включений и оптимальное время действия управления u_1 на каждом активном участке. При решении поставленной задачи методом Л. С. Понтрягина составим, как обычно, гамильтонову функцию H и выпишем дифференциальные уравнения для импульсов p_i

$$H = \sum_{i=0}^n p_i f_i(x_j, u_1\delta, u_k) + p_m \delta, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{p}_m = 0 \quad (1.3)$$

Представим H как функцию управления δ следующим образом:

$$H = H_0 + (H_1 - H_0 + p_m) \delta$$

$$H_0 = \sum_{i=0}^n p_i f_i(x_j, 0, u_k), \quad H_1 = \sum_{i=0}^n p_i f_i(x_j, u_1, u_k) \quad (1.4)$$

Пусть для определенности ищется максимум контрольного функционала $x_0(T)$, т. е. функция H должна достигать абсолютного минимума на оптимальных управлениях u_1, u_k, δ . Для управления δ абсолютный минимум H имеет место при

$$\delta = 0 \quad \text{при } H_1 - H_0 + p_m > 0, \quad \delta = 1 \quad \text{при } H_1 - H_0 + p_m < 0 \quad (1.5)$$

Разность $H_1(t) - H_0(t)$ неположительна. В самом деле, $H_1 = H_0$ при $u_1 = 0$, как это следует из определения (1.4) функций H_0, H_1 ; при других значениях u_1 разность $H_1 - H_0$ должна быть отрицательной, так как в противном случае гамильтонову функцию H можно уменьшить, положив $u_1 = 0$, т. е. $H_1 - H_0 = 0$. Отсюда определяется знак импульса p_m

$$p_m > 0 \quad (1.6)$$

($p_m < 0$ в случае отыскания максимума H). Если бы $p_m < 0$, то выражение $H_1 - H_0 + p_m$ никогда не меняло бы знака, и $\delta(t) \equiv 1$; при этом $\dot{t}_m \equiv 1$ и $t_m(T) = T$, что заведомо нарушило бы краевое условие $t_m(T) = T_m$. Заметим, что при $u_1 = 0$ оптимальное значение $\delta = 0$, так как $p_m > 0$. Если $p_m = 0$, то получающееся при этом время $T_m = T_m^*$.

Указанный прием применим также и для нескольких управлений с заданными временами действия, меньшими оптимальных; при этом вместо одного вспомогательного управления δ добавляется нужное число их.

§ 2. 1°. Введем следующие обозначения: G_m , G_n , G_Σ , G_N , G — текущий вес рабочего вещества, полезный вес, сумма этих двух весовых компонентов, вес источника мощности и текущий вес тела переменной массы соответственно; q , V , P , N — весовой расход рабочего вещества, скорость истечения, тяга и мощность реактивной струи, соответственно; N_0 , α — максимальная мощность, отдаваемая источником и вес единицы мощности; a — ускорение от реактивной тяги.

Между введенными величинами существуют соотношения

$$G = G_\Sigma + G_N, \quad G_\Sigma = G_m + G_n, \quad N = \frac{qV^2}{2g}, \quad P = \frac{qV}{g}$$

$$G_N = \alpha N_0, \quad a = \frac{Pg}{G} = \frac{V \sqrt{2gNq}}{G_\Sigma + G_N}$$

В дальнейшем будем пользоваться весовыми характеристиками, отнесенными к начальному весу тела переменной массы, обозначения для них оставим прежние — G_m , G_n , G_Σ , G_N , G , q , при этом начальный вес равен единице; мощность будем относить к максимальной мощности, сохранив для нее обозначение N ; тогда выражение для ускорения будет таким

$$a = a(N, G_N, G_\Sigma, q) = V \sqrt{(2g/\alpha)NG_Nq} / (G_\Sigma + G_N) \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение прямоугольные x , y координаты, а также соответствующие скорости вдоль осей $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$ и обозначим через $X(x, y, t)$, $Y(x, y, t)$ проекции гравитационного ускорения на оси прямоугольной системы координат; направление тяги будем характеризовать углом β между вектором тяги и осью x ; верхние индексы 0 и 1 относятся к началу ($t = 0$) и концу ($t = T$) движения соответственно.

Уравнения плоского движения тела переменной массы в произвольном гравитационном поле и краевые условия имеют вид

$$\dot{G}_\Sigma = -q, \quad \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos \beta + X, \quad \dot{v}_y = a \sin \beta + Y$$

$$G_\Sigma(0) = 1 - G_N^0, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad v_x(0) = v_x^0, \quad v_y(0) = v_y^0$$

$$x(T) = x^1, \quad y(T) = y^1, \quad v_x(T) = v_x^1, \quad v_y(T) = v_y^1 \quad (2.2)$$

где функция $a = a(N, G_N, G_\Sigma, q)$ дается формулой (2.1).

В рассматриваемой задаче функции $\beta(t)$, $q(t)$, $N(t)$, $G_N(t)$ — управляющие. Относительно управления G_N известно [7], что оптимальное программирование последнего вдоль траектории незначительно влияет на результат; поэтому впредь будем считать $G_N = \text{const}$, а значение параметра G_N находить из оптимальных условий. Управление $N(t)$ ограничено снизу и сверху $0 \leq N(t) \leq 1$. Весовой расход $q(t)$ может быть либо программируемым вдоль траектории, если на тягу нет ограничений, либо постоянным, если тяга P и мощность N постоянны¹. Кроме того, в состав управления расходом могут входить участки, где $q = 0$. На управление $\beta(t)$ не наложены никакие ограничения.

¹ Ниже будет указано, что максимальное использование мощности, т. е. $N = 1$, является оптимальным.

Пусть динамическая система подчиняется уравнениям и краевым условиям (2.2), пусть задано время движения T и активное время T_m и пусть, кроме того, управления $\beta(t)$, $q(t)$, $N(t)$ выбираются из класса допустимых. Требуется найти оптимальные управления и оптимальные траектории, доставляющие максимум функционалу $G_{\Sigma}^1 = G_n$ — относительному полезному весу.

Введем вспомогательные фазовую координату t_m и управляющую функцию δ и образуем управление $q\delta$ вместо прежнего q . Полная система уравнений и краевые условия для t_m в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{G}_{\Sigma} &= -q\delta, & \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_x &= a\delta \cos \beta + X \\ \dot{v}_y &= a\delta \sin \beta + Y, & \dot{t}_m &= \delta & (t_m(0) &= 0, t_m(T) &= T_m) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функция Гамильтона H в явном виде и дифференциальные уравнения для импульсов p выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= -p_{\Sigma}q\delta + p_x v_x + p_y v_y + p_{vx} \left(\frac{\sqrt{(2g/\alpha) G_N q N}}{G_{\Sigma} + G_N} \delta \cos \beta + X \right) + \\ &+ p_{vy} \left(\frac{\sqrt{(2g/\alpha) G_N q N}}{G_{\Sigma} + G_N} \delta \sin \beta + Y \right) + p_m \delta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_{\Sigma} = (p_{vx} \cos \beta + p_{vy} \sin \beta) \frac{\sqrt{(2g/\alpha) G_N q N}}{(G_{\Sigma} + G_N)^2} \delta, \quad \dot{p}_x = -p_{vx} \frac{\partial X}{\partial x} - p_{vy} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_y = -p_{vx} \frac{\partial X}{\partial y} - p_{vy} \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \dot{p}_{vx} = -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_m = 0$$

Конечное значение импульса $p_{\Sigma}^1 = -1$. В вариационной задаче речь идет об отыскании максимума конечной величины G_{Σ}^1 . Поэтому искомые оптимальные управления должны доставлять минимум гамильтоновой функции H .

Оптимальные управления $\beta(t)$ и $N(t)$ были даны в работах [2, 5, 8-11]; в принятых здесь обозначениях они имеют вид

$$p_{vx} = -p_v \cos \beta, \quad p_{vy} = -p_v \sin \beta \quad (p_v = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2}) \quad (2.6)$$

$$N(t) \equiv 1 \quad (2.7)$$

Используя (2.6), (2.7), перепишем уравнение для p_{Σ} , а также функцию H , оставив в последней члены с управляющими функциями

$$\dot{p}_{\Sigma} = -p_v \frac{\sqrt{(2g/\alpha) G_N q}}{(G_{\Sigma} + G_N)^2} \delta, \quad H^* = \left(-p_{\Sigma}q - p_v \frac{\sqrt{(2g/\alpha) G_N q}}{G_{\Sigma} + G_N} + p_m \right) \delta \quad (2.8)$$

2°. Рассмотрим случай переменного оптимального расхода (тяги). Если на управление расходом не наложены какие-либо ограничения, то, как известно [2, 4, 7], решение сформулированной вариационной проблемы сводится к определению оптимального закона изменения вектора ускорения от тяги, доставляющего минимум функционалу

$$J = \int_0^T a^2 dt \quad (2.9)$$

а оптимальная величина G_N и максимальная величина G_n находятся из соотношений

$$G_N = \sqrt{\alpha J / 2g} - \alpha J / 2g, \quad G_n = (1 - \sqrt{\alpha J / 2g})^2 \quad (2.10)$$

по известному функционалу J .

Таким образом, первоначальная задача об отыскании максимума G_{Σ}^1 может быть заменена в случае переменного оптимального расхода на задачу об отыскании минимума J , а управляющая функция $q(t)$ — на управляющую функцию $a(t)$.

Задача о заданном активном времени $T_m < T_m^*$ в терминах функционала J и управляющей функции $a(t)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= a^2 \delta, & \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= a \delta \cos \beta + X, & \dot{v}_y &= a \delta \sin \beta + Y, & \dot{t}_m &= \delta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Гамильтонова функция H и дифференциальные уравнения для импульсов имеют вид

$$\begin{aligned} H &= -a^2 \delta + p_x v_x + p_y v_y + p_{vx} (a \delta \cos \beta + X) + p_{vy} (a \delta \sin \beta + Y) + p_m \delta \\ \dot{p}_x &= -p_{vx} \frac{\partial X}{\partial x} - p_{vy} \frac{\partial Y}{\partial x}, & \dot{p}_y &= -p_{vx} \frac{\partial X}{\partial y} - p_{vy} \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \dot{p}_{vx} &= -p_x, & \dot{p}_{vy} &= -p_y, & \dot{p}_m &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Управления $a(t)$ и $\beta(t)$, доставляющие максимум функции H , на активных участках удовлетворяют соотношениям

$$a = p_v / 2; \quad p_{vx} = p_v \cos \beta, \quad p_{vy} = p_v \sin \beta \quad (p_v = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2}) \quad (2.14)$$

Моменты включения ускорения связаны со сменой знака комбинации Δ

$$\delta = 1 \quad \text{при } \Delta > 0, \quad \delta = 0 \quad \text{при } \Delta < 0 \quad (\Delta = p_v^2 / 4 + p_m) \quad (2.15)$$

Величина $p_m < 0$ определяет значение времени действия управления T_m . Если T_m наперед не задано, то $p_m = 0$ и $\Delta < 0$, и, следовательно, пассивные участки отсутствуют на траектории [8]. Этот вывод относится только к случаю переменного оптимального расхода.

3. Рассмотрим случай постоянной тяги. Выше была указана оптимальность граничного управления мощностью $N(t) \equiv 1$ вдоль активных участков: Это свойство совместно с требованием постоянства тяги приводит к постоянству расхода $q(t) = \text{const}$. Выразим для случая постоянной тяги уравнения движения и функционал через новый управляющий параметр — начальное ускорение от реактивной тяги a_0 . Так как $q = \text{const}$, то уравнение расхода (2.3) интегрируется и относительная полезная нагрузка выражается следующим образом

$$G_n = 1 - G_N - qT_m = 1 - (\alpha / 2g) a_0^2 / q - qT_m \quad (2.16)$$

Система (2.3) без первого уравнения при помощи параметра a_0 может быть записана так

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = \frac{a_0 \delta}{1 - qt_m} \cos \beta + X, \quad \dot{v}_y = \frac{a_0 \delta}{1 - qt_m} \sin \beta + Y, \quad \dot{t}_m = \delta \quad (2.17)$$

Уравнения для импульсов остаются прежними (см. (2.5)) за исключением уравнения для p_Σ (2.8)

$$\dot{p}_\Sigma = -p_v \frac{a_0 \delta}{(1 - qt_m)^2} \quad (2.18)$$

Функция H^* примет вид

$$H^* = \left(-p_\Sigma q + p_v \frac{a_0}{1 - qt_m} + p_m \right) \delta \quad (2.19)$$

Оптимальное управление β находится при помощи импульсов p_{vx} , p_{vy} (2.6). Моменты включения ($\delta = 1$) и выключения ($\delta = 0$) совпадают с моментами смены знака выражения Δ (2.20)

$$\delta = 1 \quad \text{при } \Delta < 0, \quad \delta = 0 \quad \text{при } \Delta > 0 \quad \left(\Delta = -p_\Sigma q - p_v \frac{a_0}{1 - qt_m} + p_m \right)$$

Процедура выбора оптимального значения G_N или, что эквивалентно, установление оптимальной связи между a_0 и q , в отличие от рассмотренного в п. 2 случая, требует одновременного решения весовой и траекторной частей общей проблемы. Частные примеры проведения этой процедуры приведены в § 4.

В отличие от случая переменной оптимальной тяги, здесь нельзя доказать оптимальность траекторий без пассивных участков. Ниже (§ 4) будет указано, что включение пассивного участка улучшает результат¹.

Число пассивных участков на траектории определяется многозначностью обратной функции $p_v(t)$. В самом деле, на пассивных участках в выражении для Δ первый член $p_\Sigma q$ не изменяется, а изменяется лишь функция $p_v(t)$, и число корней уравнения $\Delta = 0$ зависит от вида этой функции.

§ 3. Рассмотрим движение в плоскопараллельном гравитационном поле с переменной оптимальной тягой. В ранее введенных обозначениях движение описывается системой дифференциальных уравнений (2.11) при $X(x, y, t) = 0$, $Y(x, y, t) = -g = \text{const}$. Дифференциальные уравнения для импульсов (2.13) могут быть проинтегрированы

$$p_x = c_1, \quad p_y = c_2, \quad p_{vx} = -c_1 t + c_3, \quad p_{vy} = -c_2 t + c_4 \quad (3.1)$$

Из выражений для p_{vx} и p_{vy} и, следовательно, для $p_v = [(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2]^{1/2}$ можно заключить, что траектория в плоскопараллельном поле с выключающимся управлением содержит один пассивный участок. Действительно, уравнение $\Delta = 0$ (см. (2.15)) квадратное и имеет два корня

$$t_{\kappa, \eta} = \frac{1}{c_1^2 + c_2^2} [c_1 c_3 + c_2 c_4 \pm \sqrt{-4p_m(c_1^2 + c_2^2) - (c_1 c_4 + c_2 c_3)^2}] \quad (3.2)$$

которые определяют начало t_η и конец t_κ единственного пассивного участка. Так как протяженность последнего задана $t_\kappa - t_\eta = T - T_m$, то импульс p_m может быть исключен из формул (3.2) и моменты начала и кон-

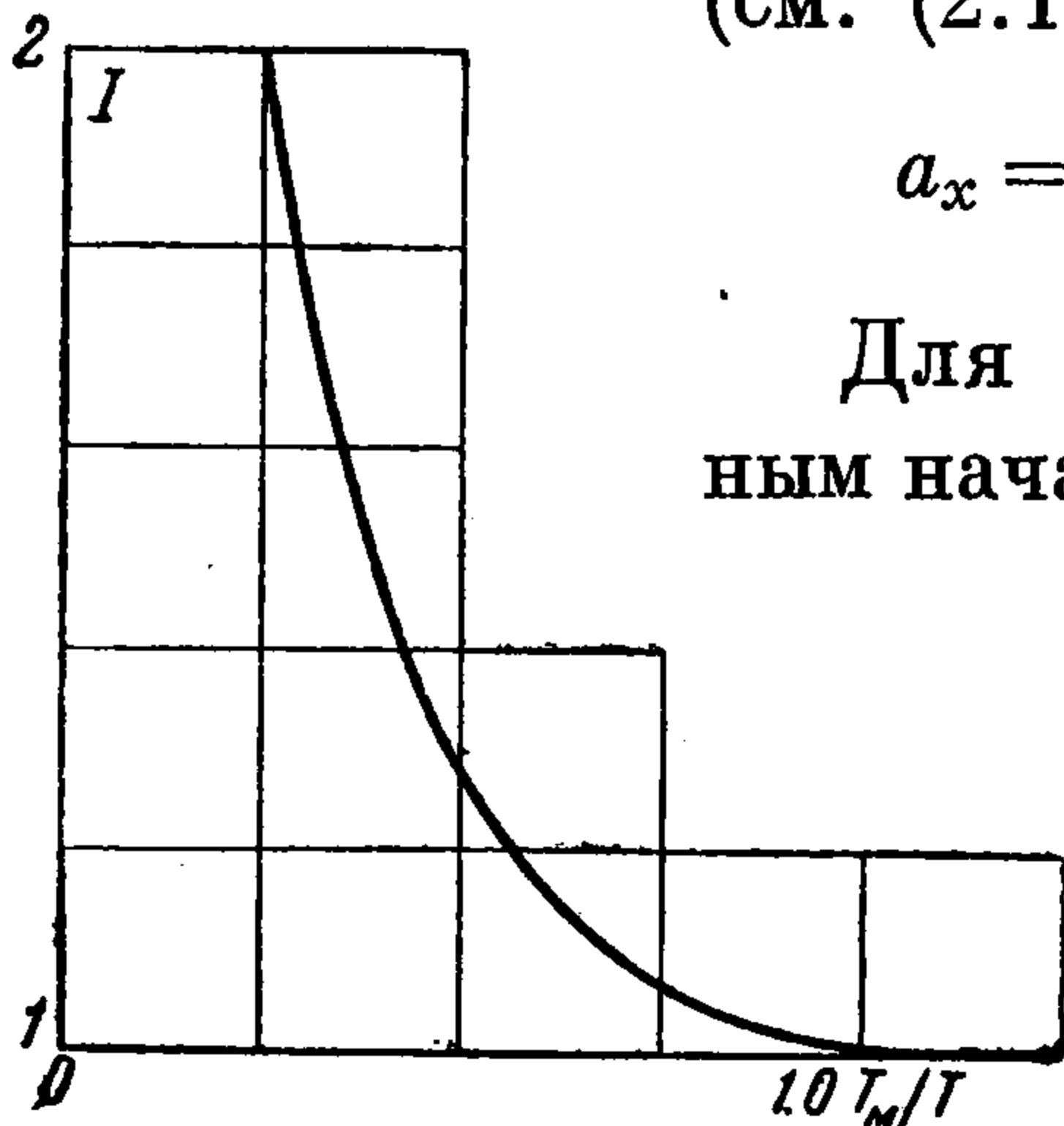
¹ Для движения в бессиловом поле этот вывод сделан Престон-Томасом (см., например, [1]). В работе [6] приводится выбор оптимального пассивного участка при расчете межпланетных траекторий.

ца пассивного участка окончательно записываются в виде

$$t_{к,н} = \frac{c_1 c_3 + c_2 c_4}{c_1^2 + c_2^2} \pm \frac{1}{2} (T - T_m) \quad (3.3)$$

Оптимальные законы для проекций моторного ускорения $a_x = a \cos \beta$, $a_y = a \sin \beta$ на активных участках оказываются линейными по времени (см. (2.14), (3.1))

$$a_x = \frac{1}{2} (-c_1 t + c_3), \quad a_y = \frac{1}{2} (-c_2 t + c_4) \quad (3.4)$$



Фиг. 1

Для нахождения постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 по заданным начальным и конечным значениям координат и скоростей следует проинтегрировать уравнения движения из системы (2.11) по активным и пассивному участкам, положение которых определяется формулами (3.3); изменение проекций моторного ускорения дается функциональными зависимостями (3.4) на активной части траектории, в моменты выключения управления движение происходит по инерции $a_x = a_y = 0$.

В качестве первого примера, иллюстрирующего метод решения задачи о выключающемся двигателе, рассмотрим одномерное движение в бессиловом поле ($g = 0$) между двумя положениями покоя, отстоящими одно от другого на расстоянии l . Краевые значения фазовых координат следующие:

$$x(0) = v_x(0) = v_x(T) = 0, \quad x(T) = l \quad (3.5)$$

Начало и конец траектории есть точки равновесия, поэтому пассивный участок не может начинать и заканчивать движение. После проведения последовательного интегрирования уравнений движения (2.11) по активным и пассивному участкам получаем постоянные c_1, c_3

$$c_1 = 24 \frac{l}{T^3 - (T - T_m)^3}, \quad c_3 = 12 \frac{Tl}{T^3 - (T - T_m)^3} \quad (3.6)$$

Подставляя эти значения в (3.3), найдем моменты начала и конца пассивного участка:

$$t_n = \frac{1}{2} T_m, \quad t_k = T - \frac{1}{2} T_m$$

а также проекции моторного ускорения

$$a_x = 6 \frac{l(-2t + T)}{T^3 - (T - T_m)^3} \quad \text{при} \quad \begin{cases} T - \frac{1}{2} T_m \geq t \geq 0 \\ T \geq t \geq T - \frac{1}{2} T_m \end{cases}$$

$$a_x = 0 \quad \text{при} \quad T - \frac{1}{2} T_m \geq t \geq \frac{1}{2} T_m \quad (3.7)$$

Функция $a_x(t)$ определяет значение интегрального функционала (2.9)

$$I = \int_0^{\frac{1}{2} T_m} a_x^2 dt + \int_{T - \frac{1}{2} T_m}^T a_x^2 dt = 12 \frac{l^2}{T^3 - (T - T_m)^3} \quad (3.8)$$

Таким образом, пассивный участок на траектории, соединяющей две точки покоя в бессиловом поле, расположен посередине траектории. При заданном времени движения T и заданном расстоянии между точками l интеграл J монотонно возрастает при уменьшении времени T_m действия управления (см. фиг. 1, $I = J / (12l^2 / T^3)$). При

заданном времени T_m и заданном расстоянии l интеграл монотонно убывает при увеличении времени T (см. фиг. 2, $I_m = J / (12l^2 / T_m^3)$).

Вторым примером рассмотрим задачу о наборе заданного модуля скорости телом переменной массы в бессилом поле. Пусть тело переменной массы начинает движение из начального положения с фиксированными фазовыми координатами

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad v_x(0) = v_x^0, \quad v_y(0) = v_y^0$$

Требуется определить оптимальный закон изменения функций $a_x(t)$, $a_y(t)$ и $\delta(t)$, если заданы время T движения, время T_m действия управления и величина конечной скорости $v^1 = \sqrt{(v_x^1)^2 + (v_y^1)^2}$. Координаты конца движения и направление вектора конечной скорости не фиксируются, а выбираются из оптимальных соображений. Поэтому $p_x(T) = p_y(T) = 0$, и в формулах (3.1) $c_1 = c_3 = 0$.

Следовательно, функция Δ (см. (2.15), (3.2)), определяющая моменты выключения и включения управления, — постоянная. При этом знак и величина этой функции не определены. Это означает, что расположение пассивных участков на траектории не определено и не влияет на функционал задачи. Проекция моторного ускорения постоянны [2]

$$a_x = 1/2 c_3, \quad a_y = 1/2 c_4 \quad (3.9)$$

Значения параметров c_2, c_4 и выражение для функционала следующие:

$$c_3 = 2v_x^0 w / T_m, \quad c_4 = 2v_y^0 w / T_m, \quad J = w^2 / T_m \quad (w = v^1 / v^0 - 1) \quad (3.10)$$

§ 4. Рассмотрим движение в плоскопараллельном поле с постоянной тягой. В этом случае уравнения движения (2.17) и уравнения импульсов упрощаются. Импульсы p_{vx}, p_{vy} выражаются аналогично случаю переменной оптимальной тяги (3.1). Из этих выражений следуют формулы для направляющего угла вектора тяги на активных участках траектории

$$\sin \beta = \frac{c_2 t - c_4}{\sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{c_1 t - c_3}{\sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}} \quad (4.1)$$

Из условий (2.20) могут быть найдены моменты включения и выключения тяги. Поскольку функция $t(p_v)$ в общем случае двузначная функция своего аргумента для плоскопараллельного поля, то на траектории может быть не более одного пассивного участка.

Действительно, если комбинация Δ (2.20) в момент t_n сменила знак с минуса на плюс, то, начиная с этого момента, движение происходит по инерции и в выражении $\Delta(t)$ может изменяться со временем только функция $p_v(t)$. Для двузначной $t(p_v)$ найдется момент t_k такой, что $p_v(t_k) = p_v(t_n)$, и при этом комбинация Δ второй раз сменит знак. Начало t_n и конец t_k пассивного участка находятся по формулам, аналогичным (3.2). Следует отметить, что вывод относительно числа пассивных участков в плоскопараллельном поле совпадает с полученным выше в § 3 для переменной оптимальной тяги, а также для постоянной тяги, но совсем другого класса двигательных систем [10-11].

Рассмотрим обе задачи, приведенные в § 3 при условии постоянства тяги. Первая задача — одномерное движение между двумя точками покоя, находящимися на расстоянии l одна от другой. Одномерное движение имеет место при значениях постоянных $c_2 = c_4 = 0$, входящих в формулы (4.1). При этом $\sin \beta = 0, \cos \beta = \pm 1$, т. е. вектор тяги имеет направление, совпадающее с направлением движения, либо противоположное ему.

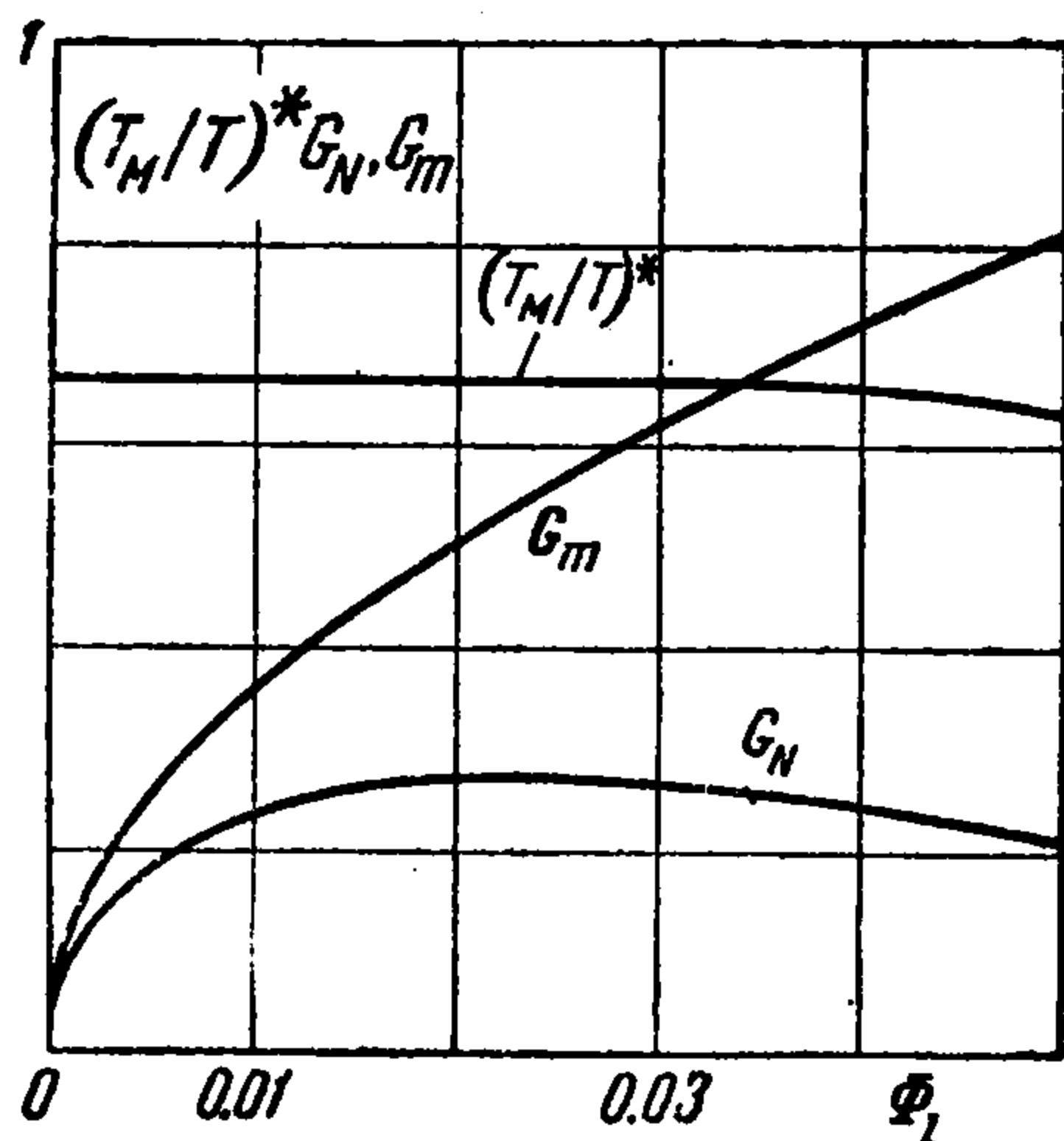
Чтобы установить моменты и число перемен направлений вектора тяги, сформулируем вновь вариационную проблему для одномерного движения, введя управление $\beta^*(t) = \pm 1$ для направления вектора тяги. Уравнения движения, уравнения импульсов и гамильтонова функция в этом случае записываются следующим образом (см. (2.17), (2.28), (2.19))

$$\begin{aligned} \dot{G}_\Sigma &= -q\delta, & \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= \frac{a_0\delta}{1-qt_m} \beta^*, & \dot{i}_m &= \delta \\ \dot{p}_\Sigma &= -p_{vx} \frac{a_0\delta}{(1-qt_m)^2} \beta^*, & \dot{p}_x &= 0, & \dot{p}_{vx} &= -p_x, & \dot{p}_m &= 0 \\ H &= -p_\Sigma q\delta + p_x v_x + p_{vx} \frac{a_0\delta}{1-qt_m} \beta^* + p_m \delta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для минимума функции H требуется, чтобы $\beta^*(t) = -\text{sign } p_{vx}$. Поскольку импульс p_{vx} есть линейная функция времени $p_{vx} = -c_1 t + c_2 = c(t - t^*)$, то вектор тяги меняет свое направление однократно в момент $t = t^*$. Комбинация Δ , определяющая границы пассивного участка, для изучаемого случая имеет вид

$$\Delta = -p_\Sigma q - |c(t - t^*)| \frac{a_0}{1-qt_m} + p_m \quad (4.3)$$

Из анализа корней уравнения $\Delta = 0$, определяющих начало и конец пассивного участка, следует связь: $t^* - t_n = t_k - t^*$, т. е. момент t^* разделяет пассивный участок на две равные части. Таким образом, оптимальная траектория перемещения из одной точки покоя в другую с постоянной тягой, как и в разобранный ранее случае, состоит из трех участков: участок ускорения ($0 \leq t \leq t_n$, $\delta = 1$, $\beta^* = 1$), пассивный участок ($t_n \leq t \leq t_k$,



Фиг. 3

$\delta = 0$) и участок торможения ($t_k \leq t \leq T$, $\delta = 1$, $\beta^* = -1$).

Интегрирование уравнений движения последовательно вдоль трех участков дает две связи между началом t_n и продолжительностью T_m активных участков, приведенным расходом q и начальным моторным ускорением a_0

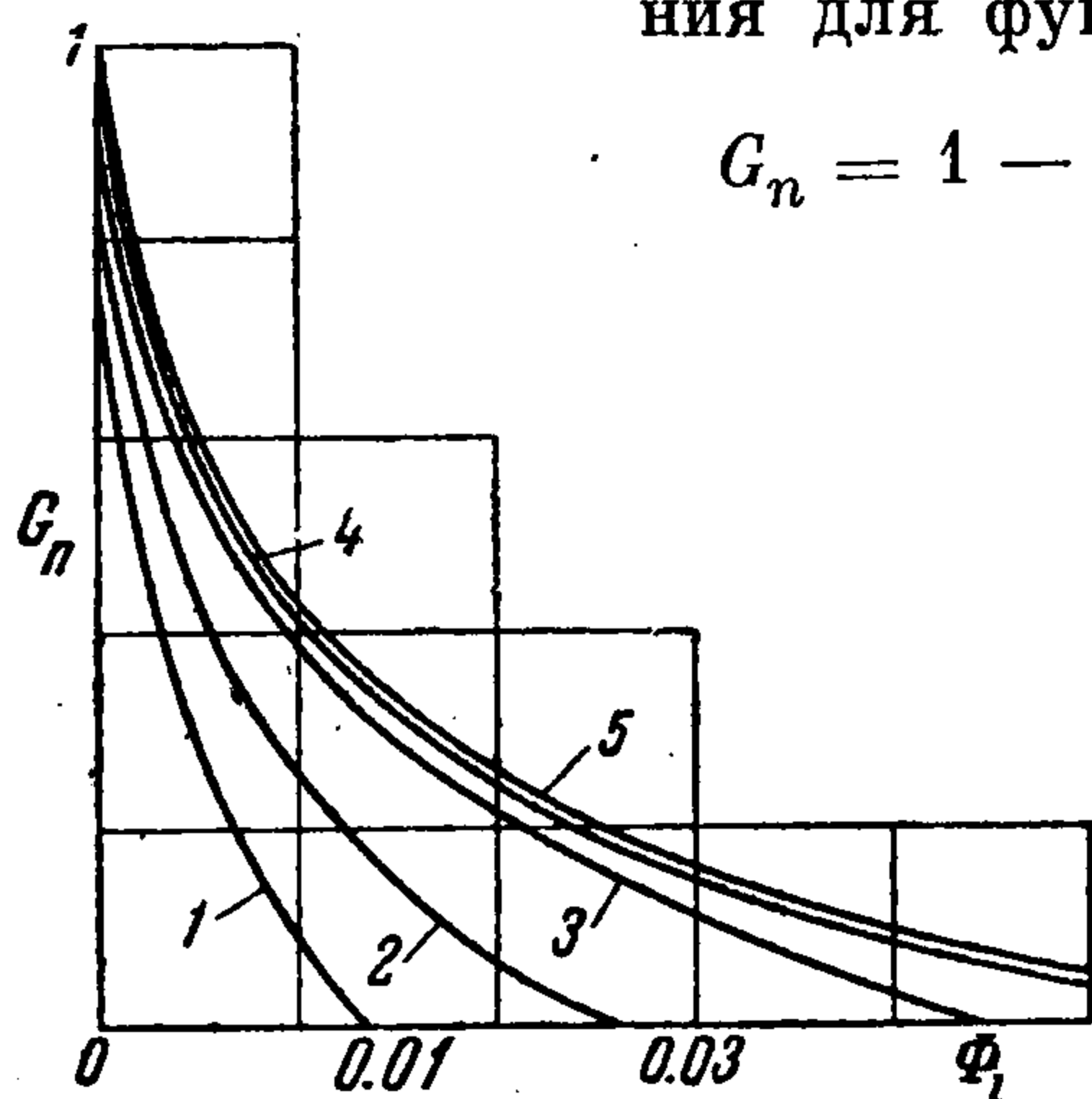
$$1 - qT_m = (1 - qt_n)^2, \quad l = \frac{a_0}{q} \left[2t_n - T_m - \frac{1}{2} (T - T_m) \ln(1 - qT_m) \right] \quad (4.4)$$

При выводе второй формулы (4.4) величина t_n исключалась при помощи соотношения $t_k = t_n + T - T_m$. Выразим t_n из первой формулы (4.4) через q , T_m и подставим во вторую; полученное соотношение используем для исключения a_0 из выражения для функционала G_n (2.16):

$$G_n = 1 - G_m - \Phi_l (T/T_m)^3 G_m^3 [2(1 - \sqrt{1 - G_m}) - G_m + \frac{1}{2} G_m (T/T_m - 1) \ln(1 - G_m)]^{-2} \quad (4.5)$$

где $G_m = qT_m$ — запас рабочего вещества,

$$\Phi_l = (\alpha/2g) l^2 / T^3$$



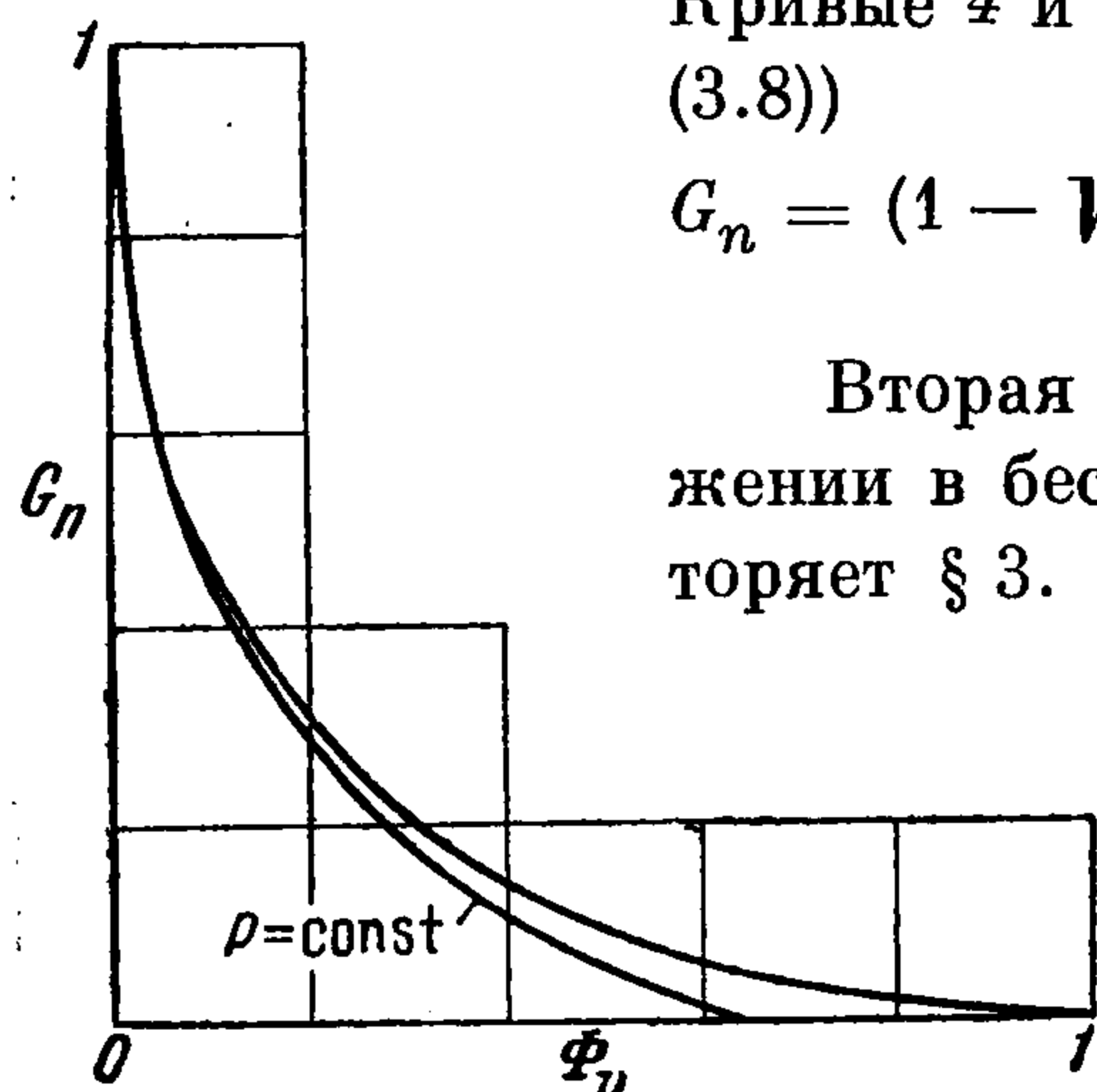
Фиг. 4

Процедура отыскания максимума G_n проведена для нескольких заданных значений T_m/T , а также для оптимального $(T_m/T)^*$. Оптимальная продолжительность активных участков $(T_m/T)^*$ и оптимальное соотношение между относительными весами источника мощности G_n и запаса рабочего вещества G_m представлены на фиг. 3 в функции от величины Φ_l . На фиг. 4 даны сравнительные кривые $G_n(\Phi_l)$ для следующих случаев: 1) движение с постоянной тягой, $T_m/T = 0.1$; 2) движение с по-

стоянной тягой, $T_m/T = 0.2$; 3) движение с постоянной тягой и оптимальным активным временем (кривая соответствует результатам работы [1]); 4) движение с переменной оптимальной тягой и активным временем, равным при каждом значении Φ_l оптимальному активному времени для случая постоянной тяги; 5) движение с переменной оптимальной тягой без пассивных участков (кривая 5 соответствует результатам работ [4-5]).

Кривые 4 и 5 на фиг. 4 рассчитывались по выражениям (см. (2.10), (3.8))

$$G_n = (1 - \sqrt{12\Phi_l / [1 - (1 - T_m/T)^3]})^2, \quad G_n = (1 - \sqrt{12\Phi_l})^2 \quad (4.6)$$



Фиг. 5

Вторая задача — набор заданного модуля скорости при движении в бессиловом поле [1]. Анализ этой задачи во многом повторяет § 3. Значения постоянных c_1, c_2 , выбранные из оптимальных соображений, также нулевые.

Комбинация Δ (2.20), определяющая моменты включения и выключения, оказывается функцией, не зависящей от времени вдоль пассивного участка (вследствие $p_v = \text{const}$). Поэтому пассивный участок может только замыкать траекторию, и, следовательно, на функционал задачи влияет только активное время T_m .

Результаты представлены на фиг. 5, где нанесена зависимость $G_n(\Phi_v)$. Величина Φ_v выражается следующим образом

$$\Phi_v = (\alpha / 2g) (v^1 - v^0)^2 / T_m$$

На том же графике для сравнения дана кривая для случая оптимального переменного расхода $G_n = (1 - \sqrt{\Phi_v})^2$ (см. (2.10), (3.10)).

Поступила 19 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Preston — Thomas H. Some Design Parameters of a Simplified Ion Rocket. J. Brit. Interpl. Soc., 1958, v. 116, № 10, 575—584.
2. Irving J. H., Blum E. K. Comparative Performance of Ballistic and Low — Thrust Vehicles for Flight to Mars, Vistas in Astronautics, 2, Second Annual Astronautics Symposium, 1959.
3. Irving I. H. Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields, Space Technology, 1959, N. Y.
4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 5, 1082—1085.
5. Leitman G. Minimum Transfer Time for a Power — Limited Rocket. J. Appl. Mech., 1961, v. 28, Ser. E, № 2.
6. Маскау Т. А., Росса Л. Г., Зиммерман А. В., Optimum Low-Acceleration Trajectories for Earth — Mars Transfer. Presented at IAS Meeting on Vehicle Systems Optimization, Garden City, 1961, Nov. 28—29.
7. Иванов Ю. Н. Оптимальное изменение мощности при движении тела переменной массы в гравитационном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4, 780—782.
8. Исаев В. К., Сонин В. В. Об одной нелинейной задаче оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 9—10.
9. Melbourne W. G., Sauer C. G. Optimum Thrust Programms for Power — Limited Propulsion Systems. Astronaut Acta, 1962, v. VIII, Fasc. 4, 205—207.
10. Исаев В. К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXV, № 8.
11. Исаев В. К. Дополнение к работе «Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет». Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXV, № 1.