Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ЗАДАЧА МАЙЕРА—БОЛЬЦА ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Задача оптимизации систем с распределенными параметрами рассматривалась с различных точек зрения в работах ряда авторов, например [1-4]. В статье [1] к задаче применен метод динамического программирования Беллмана; статьи [2-4] содержат наряду с общей постановкой проблемы аналог принципа максимума, предложенного Л. С. Понтрягиным, причем в последних работах (кроме [2]) задача с самого начала формулируется в терминах интегральных соотношений [1].

Предлагаемая работа имеет целью получение необходимых условий оптимальности методами классического вариационного исчисления. Оптимальная задача формулируется в виде проблемы Майера—Больца для кратных интегралов со связями, заданными как уравнениями в частных производных, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Получены необходимые условия стационарности и необходимое условие Вейерштрасса; из этого последнего условия выводится аналог принципа максимума. Ради простоты изложение ведется для двух независимых переменных.

Для оптимальных задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, аналогичные построения проведены в работах В. А. Троицкого [5,6], Л. Берковица [7] и Р. Калмана [8].

Ниже оптимизация систем с распределенными параметрами рассматривается в рамках исследования решений соответствующих канонических систем. Для завершения свойственной вариационному подходу логической схемы необходимо исследовать другой аспект проблемы, а именно, круг вопросов, связанных с принципом оптимальности Беллмана и с уравнением Гамильтона—Якоби. Такое исследование для оптимальных задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями содержится в работе С. Дрейфуса [9], а также в упомянутых работах Л. Берковица [7] и Р. Калмана [8].

1. Постановка задачи. Дана двусвязная область S плоскости xy с кусочно-гладкими граничными кривыми Σ_1 и Σ_2 (фигура). В замкнутой области S дана система уравнений первого порядка в частных производных

$$\Xi_i \equiv \frac{\partial z^i}{\partial x} - X_i(z, \zeta, u; x, y) = 0, \qquad \mathrm{H}_i \equiv \frac{\partial z^i}{\partial y} - Y_i(z, \zeta, u; x, y) = 0$$

$$\Phi_i \equiv \frac{\partial X_i}{\partial y} - \frac{\partial Y_i}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

Эта система содержит компоненты векторной функции $z = (z^1, \ldots, z^n)$, а также векторных функций $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^\nu)$ и $u = (u^1, \ldots, u^p)$. Функции z вместе с ζ задают собственно систему, тогда как функции u играют роль «объемных управлений». Совокупность функций z и ζ будем называть состоянием системы.

---

[1] После сдачи статьи в редакцию автор ознакомился с только что опубликованной работой А. И. Егорова (ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 4), содержащей условия оптимальности для процессов, описываемых системами квазилинейных гиперболических уравнений.

(*Замечание при корректуре*).

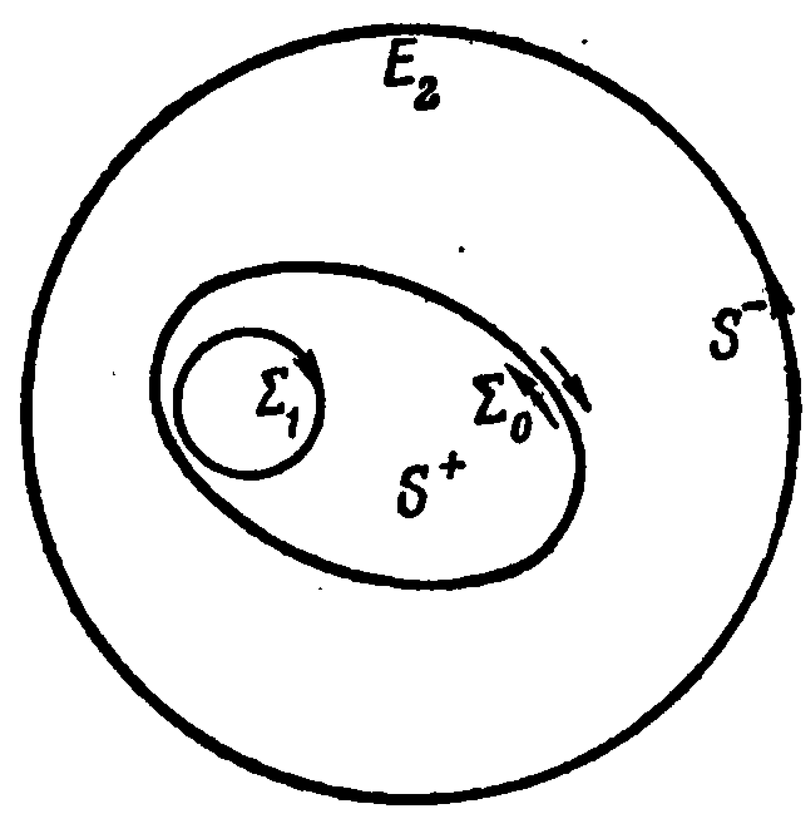
Любая система уравнений в частных производных может быть (с увеличением, если нужно, числа зависимых переменных) сведена к виду (1.1) ([10], стр. 324). Например, уравнение Гельмгольца

$$z_{xx}{}^1 + z_{yy}{}^1 + uz^1 = 0$$

эквивалентно системе

$$z_x{}^1 = z^2, \quad z_y{}^1 = z^3, \quad z_x{}^2 = -\zeta^2 - uz^1, \quad z_y{}^2 = \zeta^1, \quad z_x{}^3 = \zeta^1, \quad z_y{}^3 = \zeta^2$$
$$z_y{}^2 - z_x{}^3 = 0, \quad \zeta_y{}^2 + (uz^1)_y + \zeta_x{}^1 = 0, \quad \zeta_y{}^1 - \zeta_x{}^2 = 0$$

Нетрудно видеть, что роль функций ζ заключается, по существу, в задании общего порядка системы.



К уравнениям (1.1) присоединяются $r \leqslant p$ ограничений, наложенных на объемные управления; из них первые r_1 имеют форму конечных равенств

$$G_k\,(u;\ x,\ y) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r_1) \qquad (1.2)$$

а остальные $r - r_1$ задаются конечными неравенствами

$$G_k\,(u;\ x,\ y) \geqslant 0 \qquad (k = r_1 + 1, \ldots, r \leqslant p) \qquad (1.3)$$

Предположим, что значения первых $n_1 \leqslant n$ функций z^i заданы на кривой Σ_1, которая предполагается известной. Таким образом,

$$z^i|_{\Sigma_1} = z_1{}^i\ (t) \qquad (i = 1, \ldots, n_1) \qquad (1.4)$$

Число n_1 определяется условиями каждой конкретной задачи.

Замкнутая кривая Σ_2 не считается заранее известной; предполагается только, что на этой кривой соблюдаются $n_2 \leqslant n$ дифференциальных уравнений первого порядка вида [1]

$$\Theta_{i_k} \equiv \frac{dz^{i_k}}{dt} - T_{i_k}\,(z,\ v;\ t) = 0 \qquad (i_k = i_1, \ldots, i_{n_2}) \qquad (1.5)$$

В эти уравнения входят, среди прочих, функции

$$v^\varkappa = v^\varkappa\,(t) \quad (\varkappa = 1, \ldots \pi)$$

называемые граничными управлениями. Значения z^{i_k} при $t = 0$ предполагаются известными. Между функциями $v^\varkappa$ устанавливаются, подобно (1.2) и (1.3), соотношения, выражаемые конечными равенствами

$$g_k\,(v;\ t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, \rho_1) \qquad (1.6)$$

и неравенствами

$$g_k\,(v;\ t) \geqslant 0 \qquad (k = \rho_1 + 1, \ldots, \rho \leqslant \pi) \qquad (1.7)$$

Общее число этих соотношений равно $\rho \leqslant \pi$.

Объемные управления u^k будем считать кусочно-непрерывными функциями координат x, y; возможные разрывы этих функций располагаются, по предположению, вдоль некоторых изолированных замкнутых гладких линий Σ_0.

1 Число n_2, подобно n_1, определяется смыслом данной конкретной задачи.

Верхние индексы плюс и минус отнесем соответственно к областям, расположенным слева и справа от линии разрыва. «Левая» и «правая» стороны определяются обычным образом по положительному направлению обхода вдоль Σ_0 вокруг области, охватываемой этой кривой. Например, на фигуре областью слева от разрыва будет та, которая примыкает к Σ_0 изнутри.

Функции z^i будем считать непрерывными при переходе через Σ_0.

В дальнейшем для простоты предполагается, что в области S имеется один разрыв объемных управлений, располагающийся на простой замкнутой кривой Σ_0, которая непрерывной деформацией может быть сведена к любой из граничных кривых (фигура).

Граничные управления $v^\varkappa$ равным образом могут терпеть на кривой Σ_2 разрывы первого рода; верхние индексы плюс и минус при функциях $v^\varkappa$ соответствуют предельным значениям функций до и после разрыва.

Будем для упрощения считать, что имеется лишь одна такая точка разрыва t_*; функции z^i, рассматриваемые на Σ_2, предполагаются[1] непрерывными при переходе через точку t_*. Направление нормали к кривой Σ_2, вообще говоря, разрывно в t_*, так как лишь при этом условии производные $\overline{dz^i}_k / dt$ в t_* теряют непрерывность. Функции z^i, ζ^j, u^k предполагаются однозначными в замкнутой области S.

Задача Майера — Больца формулируется теперь следующим образом. Определить функции z^i, ζ^j и управления u^k, $v^\varkappa$ так, чтобы при соблюдении всех перечисленных выше условий сумма

$$J = \iint\limits_S F(z, \zeta, u; x, y)\, dx\, dy + \oint\limits_{\Sigma_1} f_1(z, t)\, dt + \oint\limits_{\Sigma_2} f_2(z, v, t)\, dt \tag{1.8}$$

принимала наименьшее возможное значение.

2. Необходимые условия стационарности функционала (1.8). Прежде всего обычным приемом перейдем к открытой области изменения объемных и граничных управлений, введя (вещественные) дополнительные управления $u_* = (u_*^{r_1+1}, \ldots, u_*^r)$ и $v_* = (v_*^{\rho_1+1}, \ldots, v_*^\rho)$ при помощи равенств

$$G_k^* = G_k(u; x, y) - (u_*^k)^2 = 0 \qquad (k = r_1 + 1, \ldots, r) \tag{2.1}$$

$$g_k^* = g_k(v; t) - (v_*^k)^2 = 0 \qquad (k = \rho_1 + 1, \ldots, \rho) \tag{2.2}$$

заменяющих соответственно неравенства (1.3) и (1.7).

Приступая к составлению необходимых условий стационарности, введем множители Лагранжа

$$\begin{gathered} \xi_i^\pm(x, y), \quad \eta_i^\pm(x, y), \quad \varphi_i^\pm(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \Gamma_k^\pm(x, y) \quad (k = 1, \ldots, r_1), \qquad \Gamma_k^{*\pm}(x, y) \quad (k = r_1 + 1, \ldots, r) \\ \theta_{i_k}(t) \qquad (i_k = i_1, i_2, \ldots, i_{n_2}) \\ \gamma_k(t) \quad (k = 1, \ldots, \rho_1) \qquad \gamma_k^*(t) \quad (k = \rho_1 + 1, \ldots, \rho) \end{gathered} \tag{2.3}$$

[1] Имеются в виду предельные значения этих функций на Σ_2.

При помощи этих множителей строится функционал (произведения векторных функций понимаются как скалярные)

$$\Pi = J + \iint\limits_{S^+} (\xi^+\Xi^+ + \eta^+\mathrm{H}^+ + \varphi^+\Phi^+ + \Gamma^+G^+ + \Gamma^{*+}G^{*+})\,dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_{S^-} (\xi^-\Xi^- + \eta^-\mathrm{H}^- + \varphi^-\Phi^- + \Gamma^-G^- + \Gamma^{*-}G^{*-})\,dx\,dy +$$
$$+ \oint\limits_{\Sigma_2} (\theta\Theta + \gamma g + \gamma^* g^*)\,dt \tag{2.4}$$

Функционал П всегда равен J; поэтому, в частности, стационарность П и J имеет место одновременно.

Для дальнейшего преобразуем слагаемые в (2.4), содержащие множители φ, интегрированием по частям; получим[1]

$$\iint\limits_{S^+} \varphi^+\Phi^+\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} \varphi^+\left(\frac{\partial X^+}{\partial y} - \frac{\partial Y^+}{\partial x}\right)dx\,dy = -\left(\oint\limits_{\Sigma_0} + \oint\limits_{\Sigma_1}\right)\varphi^+(X^+dx + Y^+dy) -$$
$$- \iint\limits_{S^+}\left(X^+\frac{\partial\varphi^+}{\partial y} - Y^+\frac{\partial\varphi^+}{\partial x}\right)dx\,dy = -[\varphi^+z^+]_{\Sigma_0} - [\varphi^+z^+]_{\Sigma_1} + \left(\oint\limits_{\Sigma_0} + \oint\limits_{\Sigma_1}\right)z^+\varphi_t^{\ +}dt -$$
$$\iint\limits_{S^+}\left(X^+\frac{\partial\varphi^+}{\partial y} - Y^+\frac{\partial\varphi^+}{\partial x}\right)dxdy. \tag{2.5}$$

Обозначим через L, l_1, l_0, l_2 функции Лагранжа

$$L = F + \xi\Xi + \eta\mathrm{H} + Y\varphi_x - X\varphi_y + \Gamma G + \Gamma^* G^*$$
$$l_1 = f_1 + \varphi^+{}_t z^+, \quad l_0 = \varphi_t z, \quad l_2 = f_2 + \theta\Theta + \gamma g + \gamma^* g^* + \varphi_t^{\ -} z^-$$

Первая вариация функционала П составляется из интегралов по областям S^+, S^-, интегралов по кривым Σ_1, Σ_0, Σ_2 и внеинтегральных слагаемых.

Та часть общего выражения для первой вариации, которая представляется двойными интегралами, имеет вид [2]

$$\iint\limits_{S^+}\left(\frac{\partial L^+}{\partial z^{i+}} - \frac{\partial\xi_i^{\ +}}{\partial x} - \frac{\partial\eta_i^{\ +}}{\partial y}\right)\delta z^{i+}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^-}\left(\frac{\partial L^-}{\partial z^{i-}} - \frac{\partial\xi_i^{\ -}}{\partial x} - \frac{\partial\eta_i^{\ -}}{\partial y}\right)\delta z^{i-}\,dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_{S^+}\frac{\partial L^+}{\partial\zeta^{j+}}\delta\zeta^{j+}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^-}\frac{\partial L^-}{\partial\zeta^{j-}}\delta\zeta^{j-}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^+}\frac{\partial L^+}{\partial u^{k+}}\delta u^{k+}\,dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_{S^-}\frac{\partial L^-}{\partial u^{k-}}\delta u^{k-}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^+}\frac{\partial L^+}{\partial u_*^{\ k+}}\delta u_*^{\ k+}\,dx\,dy + \iint\limits_{S^-}\frac{\partial L^-}{\partial u_*^{\ k-}}\delta u_*^{\ k-}\,dx\,dy \tag{2.6}$$

Множители Лагранжа по понятным причинам не варьируются.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\Sigma} f\,dt$$

[1] Через $[f]_\Sigma$ обозначено приращение функции f при однократном обходе по замкнутой кривой Σ.

[2] Здесь и в дальнейшем принято обычное условие суммирования.

где f — предельное значение на гладкой кривой Σ функции, непрерывной вместе с первыми производными и заданной в области, примыкающей к кривой. При варьировании таких интегралов следует руководствоваться правилом

$$\delta \oint f\,dt = \oint \delta f\,dt + \oint \left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial n}\right) \delta n\,dt \tag{2.7}$$

где ρ — радиус кривизны кривой, а δn — вариация внешней нормали (нормаль направлена вовне области, соответствующей направлению обхода по кривой по правилу, указанному выше).

Интеграл по кривой Σ_1 в выражении для первой вариации имеет вид

$$\oint_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial l_1}{\partial z^{i+}} + \xi_i^+ \frac{dy}{dt} - \eta_i^+ \frac{dx}{dt}\right) \delta z^{i+} dt \tag{2.8}$$

Интеграл по кривой Σ_0 разрыва объемных управлений записывается в форме

$$\oint_{\Sigma_0} \left\{\left[\left(\xi_i \frac{dy}{dt} - \eta_i \frac{dx}{dt} + \frac{\partial l_0}{\partial z^i}\right)\delta z^i\right]_-^+ + \left(L + \frac{l_0}{\rho_0} + \frac{\partial l_0}{\partial n}\right)_-^+ \delta n\right\} dt \tag{2.9}$$

При составлении интеграла по кривой Σ_2 необходимо принять во внимание наличие разрыва граничных управлений. Фактически это учитывается введением угловой точки t_* на кривой Σ_2. Получаем

$$\oint_{\Sigma_2} \left[\left(\xi_i^- \frac{dy}{dt} - \eta_i^- \frac{dx}{dt} + \frac{\partial l_2}{\partial z^{i-}} - \frac{d\theta_{ik}}{dt}\right)\delta z^{i-} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial l_2}{\partial v^\varkappa}\delta v^\varkappa + \frac{\partial l_2}{\partial v_*^\varkappa}\delta v_*^\varkappa + \left(L^- + \frac{l_2}{\rho_2} + \frac{\partial l_2}{\partial n}\right)\delta n\right] dt + (\theta_{ik}\delta z^{ik})_+^- \tag{2.10}$$

На линии разрыва Σ_0 соблюдаются условия

$$\delta f = \Delta f - \frac{\partial f}{\partial n}\delta n \tag{2.11}$$

где Δ — знак полной вариации функции.

Функции z^i по условию непрерывны на Σ_0, то же справедливо для их полных вариаций. Функции ζ^j и u^k, вообще говоря, разрывны на Σ_0. Поэтому интеграл (2.9) можно переписать в следующей форме

$$\oint_{\Sigma_0} \left\{\left(\xi_i \frac{dy}{dt} - \eta_i \frac{dx}{dt} + \frac{\partial l_0}{\partial z^i}\right)_-^+ \Delta z^i + \left[L + \frac{l_0}{\rho_0} + \frac{\partial l_0}{\partial n} - \left(\xi_i \frac{dy}{dt} - \eta_i \frac{dx}{dt} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\partial l_0}{\partial z^i}\right)\frac{\partial z^i}{\partial n}\right]_-^+ \delta n\right\} dt \tag{2.12}$$

В точке разрыва граничных управлений на кривой Σ_2 справедливо равенство $\delta z^i = \Delta z^i - (\operatorname{grad} z^i \cdot \delta \mathbf{r})$; через $\delta\mathbf{r}$ обозначена вариация вектор-радиуса угловой точки.

Если учесть непрерывность полных вариаций функций z^i в точке t_*, то внеинтегральный член в (2.10) преобразуется к виду

$$[\theta_{ik}(t_*)]_+^- \Delta z^{ik}(t_*) - [\theta_{ik}(t_*) \operatorname{grad} z^{ik}]_+^- \cdot \delta\mathbf{r} \tag{2.13}$$

Первая вариация функционала П получится суммированием выражений (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), а также соответствующих внеинтегральных членов с учетом (2.13).

Обычное рассуждение приводит к следующим условиям стационарности.

В областях $S^{\pm}$ (2.14)

$$\frac{\partial \xi_i^{\pm}}{\partial x}+\frac{\partial \eta_i^{\pm}}{\partial y}-\frac{\partial L^{\pm}}{\partial z^{i\pm}}=0 \quad (i=1,\ldots,n), \qquad \frac{\partial L^{\pm}}{\partial \zeta^{j\pm}}=0 \quad (j=1,\ldots,\nu)$$

$$\frac{\partial L^{\pm}}{\partial u^{k\pm}}=0 \quad (k=1,\ldots,p), \qquad \frac{\partial L^{\pm}}{\partial u_*^{k\pm}}\equiv -2\Gamma_k^{*\pm}u_*^{k\pm}=0 \quad (k=r_1+1,\ldots,r)$$

Вдоль границы Σ_1

$$\frac{\partial l_1}{\partial z^{i+}}+\xi_i^{+}\frac{dy}{dt}-\eta_i^{+}\frac{dx}{dt}=0, \qquad [\varphi_i^{+}]_{\Sigma_1}=0 \quad (i=n_1+1,\ldots,n) \tag{2.15}$$

Вдоль границы Σ_2

$$\frac{d\theta_{i_k}}{dt}-\frac{\partial l_2}{\partial z^{i-}}-\xi_i^{-}\frac{dy}{dt}+\eta_i^{-}\frac{dx}{dt}=0, \qquad [\varphi_i^{-}]_{\Sigma_1}=0\,(i\neq i_k) \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial l_2}{dv^{\varkappa}}=0 \quad (\varkappa=1,\ldots,\pi)$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial v_*^{\varkappa}}\equiv -2\gamma_{\varkappa}^{*}v_*^{\varkappa}=0 \quad (\varkappa=\rho_1+1,\ldots,\rho), \qquad L^{-}+\frac{l_2}{\rho_2}+\frac{\partial l_2}{\partial n}=0$$

В точке t_* разрыва граничных управлений

$$\theta_{i_k}^{-}(t_*)-\varphi_{i_k}^{-}(t_*)=\theta_{i_k}^{+}(t_*)-\varphi_{i_k}^{+}(t_*) \quad \theta_{i_k}^{-}(t_*)\operatorname{grad} z^{i_k-}(t_*)=$$
$$=\theta_{i_k}^{+}(t_*)\operatorname{grad} z^{i_k+}(t_*) \qquad (i_k=i_1,\ldots,i_{n_2}) \tag{2.17}$$

Вдоль кривой Σ_0 разрыва объемных управлений

$$\left(\xi_i\frac{dy}{dt}-\eta_i\frac{dx}{dt}+\frac{\partial l_0}{\partial z^i}\right)_-^+=0 \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad [\varphi_i]_-^+=0$$

$$\left[L+\frac{l_0}{\rho_0}+\frac{\partial l_0}{\partial n}-\left(\xi_i\frac{dy}{dt}-\eta_i\frac{dx}{dt}+\frac{\partial l_0}{\partial z}\right)\frac{\partial z^i}{\partial n}\right]_-^+=0 \tag{2.18}$$

Последнее условие при помощи теоремы Адамара — Гюгонио и первого из равенств (2.18) преобразуется к виду

$$\left(L+\frac{l_0}{\rho_0}+\frac{\partial l_0}{\partial n}\right)_-^+-\xi_i^{+}(z_k^i)_-^+-\eta_i(z_y^i)_-^+-\frac{\partial l_0}{\partial z^{i+}}\left(\frac{\partial z^i}{\partial n}\right)_-^+=0 \tag{2.19}$$

К уравнениям и краевым условиям (2.14) — (2.18) следует, разумеется, присоединить исходные уравнения и краевые условия п. 1.

3. Гамильтонова форма полученных соотношений. Исходя из функции Лагранжа

$$L=F+\xi\Xi+\eta\mathrm{H}+Y\varphi_x-X\varphi_y+\Gamma G+\Gamma^*G^* \tag{3.1}$$

убеждаемся в том, что «импульсы» $\partial L\,/\,\partial z_x^i$, $\partial L\,/\,\partial z_y^i$ совпадают, соответственно, с лагранжевыми множителями ξ_i, η_i.

Определим функцию Гамильтона

$$H=[z_x^iL_{z_x^i}+z_y^iL_{z_y^i}-L]_{z_x^i=X_i,\ z_y^i=Y_i}=\xi X+\eta Y-$$
$$-F-Y\varphi_x+X\varphi_y-\Gamma G-\Gamma^*G^* \tag{3.2}$$

Очевидны следующие равенства

$$H_x = -L_x, \quad H_y = -L_y, \quad H_{z^i} = -L_{z^i}, \quad H_{\zeta^j} = -L_{\zeta^j}$$
$$H_{u^k} = -L_{u^k}, \quad H_{u_*^k} = -L_{u_*^k}, \quad H_{\xi_i} = X_i, \quad H_{\eta_i} = Y_i \tag{3.3}$$

С помощью этих соотношений заменим первую пару равенств (1.1) и равенства (2.14) следующими формулами:

$$z_x^i = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \qquad z_y^i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial z^i} \tag{3.4}$$

Эти уравнения имеют форму канонических уравнений Вольтерра [11]. Третья группа уравнений (1.1) по-прежнему играет роль условий интегрируемости.

Три последних уравнения (2.14) записываются соответственно в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta^j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, \nu), \qquad \frac{\partial H}{\partial u^k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, p)$$
$$\frac{\partial H}{\partial u_*^k} \equiv 2\Gamma_k^* u_*^k = 0 \quad (k = r_1 + 1, \ldots, r) \tag{3.5}$$

Условие (2.19) переписывается так

$$(H)_-^+ = z_x^{i-}(\xi_i)_-^+ + z_y^{i-}(\eta_i)_-^+ + \left(\frac{l_0}{\rho_0} + \frac{\partial l_0}{\partial n}\right)_-^+ - \frac{\partial l_0^+}{\partial z^{i+}}\left(\frac{\partial z^i}{\partial n}\right)_-^+ \tag{3.6}$$

Равным образом, исходя из выражения для функции Лагранжа

$$l_2 = f_2 + \theta\Theta + \gamma g + \gamma^* g^* + \varphi_t^- z^- \tag{3.7}$$

обнаруживаем, что «импульсы» $\partial l \,/\, \partial z_t^{i_k}$ совпадают с множителями Лагранжа θ_{i_k}; определим функцию Гамильтона

$$h = [z_t^i l_{2z_t^i} - l_2]_{z_t^{i_k} = T_{i_k}} = \theta_{i_k} T_{i_k} - f_2 - \gamma g - \gamma^* g^* - \varphi_t^- z^- \tag{3.8}$$

Подобно предыдущему, приходим к соотношениям

$$h_t = -l_{2t}, \quad h_{z^i} = -l_{2z^i} \quad h_{v^\varkappa} = -l_{2v^\varkappa}, \quad h_{v_*^\varkappa} = -l_{2v_*^\varkappa}, \quad h_{\theta_{i_k}} = T_{i_k} \tag{3.9}$$

Имея это в виду, заменим уравнения (1.5), а также те из первых равенств (2.16), в которых $i = i_k$, системой соотношений вида

$$\frac{dz^{i_k}}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \theta_{i_k}}, \qquad \frac{d\theta_{i_k}}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial z^{i_k}} + \xi_{i_k}^- \frac{dy}{dt} - \eta_{i_k}^- \frac{dx}{dt} \tag{3.10}$$

Остальные уравнения (2.16), за исключением последнего, переписываются в форме

$$\frac{\partial h}{\partial v^\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, \pi), \qquad \frac{\partial h}{\partial v_*^\varkappa} \equiv 2\gamma^* v_*^\varkappa = 0 \quad (\varkappa = \rho_1 + 1, \ldots, \rho) \tag{3.11}$$

4. Необходимые условия Вейерштрасса и Клебша. Эти условия могут быть выведены единым методом для классической задачи Майера — Больца и для задачи, содержащей управления.

Введем функции Вейерштрасса

$$E^{(1)} = L\,(z,\, Z_x,\, Z_y,\, \mathrm{Z},\, U,\, U_*;\; \xi,\, \eta,\, \varphi_x,\, \varphi_y,\, \Gamma,\, \Gamma^*) -$$
$$- L\,(z,\, z_x,\, z_y,\, \zeta,\, u,\, u_*;\; \xi,\, \eta,\, \varphi_x,\, \varphi_y,\, \Gamma,\, \Gamma^*) -$$
$$- (Z_x^{\;i} - z_x^{\;i}) \frac{\partial L}{\partial z_x^{\;i}} - (Z_y^{\;i} - z_y^{\;i}) \frac{\partial L}{\partial z_y^{\;i}} \qquad (4.1)$$

$$E^{(2)} = l_2\,(z,\, Z_t,\, V,\, V_*;\; \theta,\, \varphi_t,\, \gamma,\, \gamma^*) -$$
$$- l_2\,(z,\, z_t,\, v,\, v_*;\; \theta,\, \varphi_t,\, \gamma,\, \gamma^*) - (Z_t^{ik} - z_t^{ik}) \frac{\partial l_2}{\partial z_t^{\;ik}} \qquad (4.2)$$

В этих формулах $z,\, \zeta,\, u,\, v$ соответствуют экстремали и ее границе, а $Z,\, \mathrm{Z},\, U,\, V$ — любые допустимые функции, удовлетворяющие условиям, установленным в п. 1.

Необходимое условие Вейерштрасса сильного относительного минимума дается соотношениями

$$E^{(1)} \geqslant 0, \qquad E^{(2)} \geqslant 0 \qquad (4.3)$$

доказательство которых содержится в Приложении.

Условия (4.3) могут быть переписаны в форме неравенств для функций Гамильтона

$$H\,(z,\, \mathrm{Z},\, U,\, U_*;\; \xi,\, \eta,\, \varphi_x,\, \varphi_y,\, \Gamma,\, \Gamma^*) \leqslant H\,(z,\, \zeta,\, u,\, u_*;\; \xi,\, \eta,\, \varphi_x,\, \varphi_y,\, \Gamma,\, \Gamma^*) \quad (4.4)$$

$$h\,(z,\, V,\, V_*;\; \theta,\, \varphi_t,\, \gamma,\, \gamma^*) \leqslant h\,(z,\, v,\, v_*;\; \theta,\, \varphi_t,\, \gamma,\, \gamma^*) \qquad (4.5)$$

Дополнительные управления фактически не входят в эти неравенства, так как содержащие их слагаемые в функциях Гамильтона равны нулю.

Совокупность формул (3.5) и (4.4), а также (3.11) и (4.5) образует аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина для рассматриваемой нами задачи.

Необходимые условия Клебша слабого минимума обычным образом выводятся из условий Вейерштрасса. Именно, пусть $\delta z_x,\, \delta z_y,\, \delta\zeta,\, \delta u,\, \delta v$ — малые вариации и

$$Z_x = z_x + \delta z_x, \qquad Z_y = z_y + \delta z_y, \qquad \mathrm{Z} = \zeta + \delta\zeta \qquad (4.6)$$
$$U = u + \delta u, \qquad V = v + \delta v$$

приходим к следующим выражениям для функций Вейерштрасса (слагаемые порядка выше второго по малым вариациям отброшены)

$$E^{(1)} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^j\, \partial \zeta^{j'}}\, \delta\zeta^j\, \delta\zeta^{j'} - 2\,\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^j\, \partial u^k}\, \delta\zeta^j\, \delta u^k - \frac{\partial^2 H}{\partial u^k\, \delta u^{k'}}\, \delta u^k\, \delta u^{k'} \qquad (4.7)$$

$$E^{(2)} = -\frac{\partial^2 h}{\partial v^\varkappa\, \partial v^{\varkappa'}}\, \delta v^\varkappa\, \delta v^{\varkappa'} \qquad (4.8)$$

Подставляя эти выражения в неравенства (4.3), приходим к необходимым условиям Клебша.

Вариации функций, входящих в условия Клебша, связаны системой уравнений, получающихся варьированием уравнений п. 1 по производным от z^i, функциям ζ^j и управлениям u^k, $v^\varkappa$, а именно

$$\delta z_x{}^i - \frac{\partial X_i}{\partial \zeta^j}\delta\zeta^j - \frac{\partial X_i}{\partial u^k}\delta u^k = 0, \quad \delta z_y{}^i - \frac{\partial Y_i}{\partial \zeta^j}\delta\zeta^j - \frac{\partial Y_i}{\partial u^k}\delta u^k = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \zeta^j}\delta\zeta^j + \frac{\partial X_i}{\partial u^k}\delta u^k\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \zeta^j}\delta\zeta^j + \frac{\partial Y_i}{\partial u^k}\delta u^k\right) = 0 \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial u_*^k}\delta u^k = 0 \qquad (4.10)$$

$$\delta z_t{}^{ik} - \frac{\partial T}{\partial v^\varkappa}\delta v^\varkappa = 0 \qquad (4.11)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial v^\varkappa}\delta v^\varkappa = 0 \qquad (4.12)$$

Предполагается, что дополнительные управления уже введены; звездочка в обозначениях для них отброшена.

5. *Приложение.* **Необходимое условие Вейерштрасса.** Будем предполагать, что ограничения, наложенные на объемные и граничные управления, уже записаны в форме равенств типа (1.2) и (1.6).

В основу рассуждений положим следующее допущение: экстремальная поверхность S с граничными кривыми Σ_1 и Σ_2 может быть включена в $(n_1 + n_2)$ — параметрическое семейство поверхностей $S(b)$, вдоль которых определены функции

$$z^i(b;\ x,\ y) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \zeta^j(b;\ x,\ y) \quad (j = 1, \ldots, \nu)$$
$$u^k(b,\ x,\ y) \quad (k = 1, \ldots p) \qquad (5.1)$$

Указанные поверхности имеют граничные кривые Σ_1 и $\Sigma_2(b)$, причем вдоль последних определены функции

$$x(b;\ t), \quad y(b;\ t), \quad z_2{}^i(b;\ t), \quad \zeta_2{}^j(b;\ t), \quad u_2{}^k(b;\ t),\ v^\varkappa(b;\ t) \qquad (5.2)$$

Оба семейства определены таким образом, что удовлетворяются уравнения (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), а при $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n_1+n_2} = 0$ приходим к функциям, относящимся к исходной экстремали и ее границам Σ_1, Σ_2.

Выберем в области S плоскости xy замкнутую гладкую кривую Σ', ограничивающую область S' и не пересекающуюся с кривой Σ_0 (см. п.п. 1 и 2); одновременно выберем на кривой Σ_2 точку t', отличающуюся от угловой[1].

Окружим кривую Σ' извне близкой кривой Σ_e', расположенной на той же экстремали и не пересекающейся с первой; область между этими кривыми назовем $S_e' - S'$.

---

[1] Здесь и в дальнейшем для областей (кривых) и их проекций на плоскость xy используются одни и те же обозначения.

Уравнения кривых Σ', Σ_e' имеют вид

$$(\Sigma') \qquad x = x'(t), \qquad y = y'(t)$$

$$(\Sigma_e') \qquad x = x'(t) + e\cos(nx), \qquad y = y'(t) + e\cos(ny)$$

Здесь $e > 0$ — параметр, $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ — направляющие косинусы внешней нормали к кривой Σ'. При $e = 0$ кривые Σ' и Σ_e' совпадают и область $S_e' - S'$ исчезает.

Часть области S, лежащую вне кривой Σ_e', обозначим $S_b - S_e'$.

Построим три семейства поверхностей

$$\begin{array}{llll} z^i(b;\, x, y), & \zeta^j(b;\, x, y), & u^k(b;\, x, y) & (x, y) \in S' \\ Z^i(b;\, x, y), & Z^j(b;\, x, y), & U^k(b;\, x, y) & (x, y) \in S'_e - S' \\ z^i(b;\, e, x, y), & \zeta^j(b, e;\, x, y), & u^k(b;\, x, y) & (x, y) \in S_b - S'_e \end{array} \qquad (5.3)$$

из которых первое и третье удовлетворяют уравнениям (1.1) и (1.2), а второе — тем же уравнениям с заменой z^i на Z^i и т. д.

Равным образом, отложим на граничной кривой Σ_2 $(0 \leqslant t \leqslant t_2)$ отрезок длиной ε от точки t' в положительном направлении и построим два семейства кривых, дополняющих одна другую до замкнутой граничной кривой $\Sigma_2(b, \varepsilon)$. Вдоль этих семейств определим (5.4)

$$\begin{array}{lllll} Z_2^i(b, e;\, t), & Z_2^j(b, e;\, t), & u_2^k(b;\, t), & V^\varkappa(b;\, t) & (t' \leqslant t \leqslant t' + \varepsilon) \\ z_2^i(b, e, \varepsilon;\, t), & \zeta_2^j(b, e, \varepsilon;\, t), & u_2^k(b;\, t), & v^\varkappa(b;\, t) & \left(\begin{matrix} 0 < t < t' \\ t' + \varepsilon < t < t_2 \end{matrix}\right) \end{array}$$

Функции (5.4) удовлетворяют краевым условиям (1.5) и (частично) начальным условиям при $t = 0$ (см. п. 1)

Введем следующие обозначения

$$\begin{array}{llll} \delta_b z_\alpha^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial b_\alpha}, & \delta_b \zeta_\alpha^j = \dfrac{\partial \zeta^j}{\partial b_\alpha}, & \delta_b u_\alpha^k = \dfrac{\partial u^k}{\partial b_\alpha}, & \delta_b v_\alpha^\varkappa = \dfrac{\partial v^\varkappa}{\partial b_\alpha} \\ \delta_e z^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial e}, & \delta_e \zeta^j = \dfrac{\partial \zeta^j}{\partial e}, & \delta_\varepsilon z^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial \varepsilon}, & \delta_\varepsilon \zeta^j = \dfrac{\partial \zeta^j}{\partial \varepsilon} \end{array} \qquad (5.5)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, n_1 + n_2)$$

Построенные выше семейства функций подчиним условиям:

семейства (5.3)

$$Z^i(b;\, x, y)\,|_{\Sigma'} = z^i(b;\, x, y)\,|_{\Sigma'}$$

$$Z^i(b;\, x, y)\,|_{\Sigma_e'} = z^i(b, e;\, x, y)\,|_{\Sigma_e'}$$

$$\operatorname{grad}(Z^i - z^i)\,|_{\Sigma'} = \mathbf{n}\,\delta_e z^i\,|_{\Sigma'} \qquad (5.6)$$

семейства (5.4)

$$Z_2^i(b, e;\, t') = z_2^i(b, e, \varepsilon;\, t')$$

$$Z_2^i(b, e;\, t' + \varepsilon) = z_2^i(b, e, \varepsilon;\, t' + \varepsilon)$$

$$Z_{2t}^i(t') = z_{2t}^i(t') + \delta_\varepsilon z_2^i(t') \qquad (5.7)$$

Рассмотрим функционал

$$\Pi(b, e, \varepsilon) = \iint\limits_{s'} L[z(b;x,y), z_x(b;x,y), z_y(b;x,y), \zeta(b;x,y)\, u(b;x,y)]\,dxdy + \tag{5.8}$$

$$+ \iint\limits_{s'_e - s'} L[Z(b;x,y), Z_x(b;x,y), Z_y(b;x,y), Z(b;x,y), U(b;x,y)]\,dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{s_b - s_e'} L[z(b,e;x,y), z_x(b,e;x,y), z_y(b,e;x,y), \zeta(b,e;x,y), u(b;x,y)]\,dxdy +$$

$$+ \oint\limits_{\Sigma_1} l_1[z(b;t)]\,dt + \left[\int\limits_0^{t'} + \int\limits_{t'+\varepsilon}^{t_2}\right] l[z_2(b,e,\varepsilon;t)$$

$$z_{2t}(b,e,\varepsilon;t), v(b,t)\,t]\,dt + \int\limits_{t'}^{t'+\varepsilon} l[Z_2, Z_{2t}, V, t]\,dt - [\varphi^+ z^+]_{\Sigma_1}[\varphi^- z^-]_{\Sigma_2}$$

отличающийся от исходного функционала J слагаемыми, равными нулю. Учитывая условия стационарности, найдем

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial b_\alpha}\right|_{e=\varepsilon=0} = \oint\limits_{\Sigma_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left[\frac{\partial l_1}{\partial z^i} + \xi_i\frac{dy}{dt} - \eta_i\frac{dx}{dt}\right]\delta_b z_\alpha{}^i\,dt + [\theta_{i_k}\delta_b z_\alpha^{ik}]_{\Sigma_2} -$$

$$- [\varphi_i{}^+\delta_b z_\alpha{}^-]_{\Sigma_1} - [\varphi_i\delta_b z_{\alpha i}]_{\Sigma_2} \tag{5.9}$$

Кроме того

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial e}\right|_{e=\varepsilon=0} = \oint\limits_{\Sigma'}\Big[L(z, Z_x, Z_y, Z, U) - L(z, z_x, z_y, \zeta, u) -$$

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial z_x^i}\delta_e z^i\cos(nx) + \frac{\partial L}{\partial z_y^i}\delta_e z^i\cos(ny)\right]dt + [\theta_{i_k}\delta_e z^{ik}]_{\Sigma_2} - [\varphi\delta_e z^i{}_\alpha]_{\Sigma_2} \tag{5.10}$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}\right|_{e=\varepsilon=0} = l_2(z_2, Z_{2t}, Z_2, U_2, V)\,|_{t'} - l_2(z_2, z_{2t}, \zeta_2, u_2, v)\,|_{t'} -$$

$$- \left.\frac{\partial l}{\partial z_{2t}^i}\right|_{t'}\delta_\varepsilon z_2{}^i(t') + [\theta_{i_k}\delta_\varepsilon z^{ik}]_{\Sigma_2} - [\varphi\delta_\varepsilon z^i{}_\alpha]_{\Sigma_2} \tag{5.11}$$

Воспользуемся граничными условиями (1.4) и задания значений z^{ik} (0) на Σ_2. Эти условия устанавливают, во-первых, n_1 конечных уравнений связи между параметрами b_α и, во-вторых, n_2 конечных уравнений связи между параметрами b_α, e и ε. Предположим, что из этих уравнений можно определить все b_α как функции e и ε. Составляя теперь полный дифференциал функции П при $e = \varepsilon = 0$

$$d\Pi = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial e}\right|_{e=\varepsilon=0} de + \left.\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}\right|_{e=\varepsilon=0} d\varepsilon =$$

$$= \left[\frac{\partial \Pi}{\partial e} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial e}\right]_{e=\varepsilon=0} de + \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \varepsilon}\right]_{e=\varepsilon=0} d\varepsilon$$

и (равные нулю) полные дифференциалы левых частей упомянутых выше конечных уравнений, обнаруживаем при помощи (5.6), (5.7), (5.9) — (5.11) и (4.1) — (4.2), что

$$d\Pi = \left[\oint\limits_{\Sigma'} E^{(1)}dt\right]de + E^{(2)}(t')\,d\varepsilon \tag{5.12}$$

Чтобы функционал П, а вместе с ним и J, достигал минимума, необходимо выполнение неравенства

$$d\Pi \geqslant 0$$

Допустимым поверхностям (граничным кривым) соответствуют всегда положительные значения параметров e или ε или, что то же, дифференциалов de и $d\varepsilon$. Это обстоятельство вместе с (5.12) равносильно требованиям

$$\oint_{\Sigma'} E^{(1)} dt \geqslant 0, \qquad E^{(2)}(t') \geqslant 0$$

Если учесть произвольность выбора кривой Σ' на экстремали и точки t' на ее границе, то полученные неравенства приведут к необходимым условиям Вейерштрасса.

Хотя доказательство проведено для тех частей экстремали и ее границы, которые не содержат угловых линий (точек), оно остается в силе и для таких линий (точек) благодаря соображениям непрерывности.

Поступила 17 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., Osborn H. Dynamic programming and the Variation of Green's Functions. J. Math. Mech. 1958, vol. 7, No 1.
2. Бутковский А. Г., Лернер А. Я. Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 4.
3. Бутковский А. Г. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 1.
4. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 10.
5. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
6. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
7. Berkovitz L. D. Variational Methods in Problems of Control and Programming. J. Math. Anal. and Appl., 1961, No 3.
8. Kalman R. E. The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. RIAS Techn. Rep., 1961, No 3.
9. Dreyfus S. E. Dynamic Programming and the Calculus of Variations. J. Math. Anal. and Appl., 1960, No 1.
10. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Гостехиздат, 1947.
11. Volterra V. Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo pelle variazioni. Roma, Acc. Lincei Rend., 1890, (4), 6¹.