

ПРИМЕНЕНИЕ ШАГОВОГО МЕТОДА К АНАЛИЗУ
УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

В. И. Феодосьев

(Москва)

Предлагается метод анализа деформируемых систем, основанный на рассмотрении деформации как процесса. Время рассматривается как параметр, определяющий развитие деформаций. Интегрирование по времени ведется на быстродействующей электронно-цифровой машине. Краевая часть задачи решается методом Галеркина.

При таком подходе нет необходимости решать нелинейные уравнения. В них подставляются значения параметров предыдущего шага. Это позволяет резко увеличить число варьируемых параметров и делает решение нелинейных задач не более сложным, чем линейных.

В качестве примера рассматривается задача об устойчивости стержня за пределами упругости.

1. В работе [1] предложен метод анализа деформируемых систем, называемый вариационно-шаговым или просто шаговым методом.

Предлагается деформацию системы рассматривать как процесс, независимо от того, быстро или медленно изменяются внешние силы. Для этого вводится независимое переменное — время и составляются уравнения движения

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Зависимость напряжений от деформаций задается соотношениями упругости или пластичности, которые запишем символично в виде

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (1.2)$$

Деформации, в свою очередь, определяются соотношениями

$$\varepsilon = \varepsilon(u, v, w) \quad (1.3)$$

которые, вообще говоря, являются нелинейными.

Аппроксимируем перемещения u , v и w функциями, удовлетворяющими граничным условиям

$$\begin{aligned} u &= A_1 u_1(x, y, z) + A_2 u_2(x, y, z) + \dots + A_m u_m(x, y, z) \\ v &= B_1 v_1(x, y, z) + B_2 v_2(x, y, z) + \dots + B_m v_m(x, y, z) \\ w &= C_1 w_1(x, y, z) + C_2 w_2(x, y, z) + \dots + C_m w_m(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где A_i, B_i, C_i — параметры, зависящие от времени.

Подставляем u , v и w в уравнения (1.1) — (1.3). Воспользовавшись далее методом Галеркина, получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + a_{12}\ddot{A}_2 + a_{13}\ddot{A}_3 + \dots + L_1(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ a_{21}\ddot{A}_1 + \ddot{A}_2 + a_{23}\ddot{A}_3 + \dots + L_2(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ \dots & \\ \ddot{B}_1 + b_{12}\ddot{B}_2 + b_{13}\ddot{B}_3 + \dots + M_1(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ b_{21}\ddot{B}_1 + \ddot{B}_2 + b_{23}\ddot{B}_3 + \dots + M_2(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ \dots & \\ \ddot{C}_1 + c_{12}\ddot{C}_2 + c_{13}\ddot{C}_3 + \dots + N_1(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ c_{21}\ddot{C}_1 + \ddot{C}_2 + c_{23}\ddot{C}_3 + \dots + N_2(A_i, B_i, C_i) &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если функции u_i , v_i и w_i ортогональны, уравнения (1.5) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + L_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & \ddot{A}_2 + L_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \\ \ddot{B}_1 + M_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & \ddot{B}_2 + M_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \\ \ddot{C}_1 + N_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & \ddot{C}_2 + N_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь через L_i , M_i , N_i обозначены величины, зависящие от параметров A_i , B_i и C_i .

Система (1.6) интегрируется по шагам на быстродействующей электронно-цифровой машине. Величины L_i , M_i , N_i определяются через A_i , B_i , C_i предыдущего шага также при помощи машины последовательным переходом от уравнений (1.4) к уравнениям (1.3), (1.2) и (1.6). В результате интегрирования получаем зависимость перемещений, напряжений и деформаций от времени. Что касается сил, то их зависимость от времени считается заданной. В частности, в случае статического нагружения можно принять, что силы меняются пропорционально времени. Коэффициент пропорциональности при этом должен быть взят достаточно малым.

При быстром изменении сил или при резком изменении прогибов, связанных с потерей устойчивости, в системе должны возникать затухающие колебания. Количественная оценка затухания может быть получена путем введения в уравнения (1.2) членов, содержащих скорость деформации. Для этого надо воспользоваться какой-либо из гипотез о свойствах материала. В выражения L_i , M_i и N_i войдут при этом не только параметры A_i , B_i и C_i , но и их первые производные.

Если не учитывать демпфирования, картина деформации может быть искажена незатухающими колебаниями, затрудняющими анализ результатов расчета. Поэтому иногда целесообразно в целях наглядности произвольно ввести линейное демпфирование непосредственно в уравнения (1.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + \alpha_1\dot{A}_1 + L_1 &= 0, & \ddot{A}_2 + \alpha_2\dot{A}_2 + L_2 &= 0, \dots \\ \ddot{B}_1 + \beta_1\dot{B}_1 + M_1 &= 0, & \ddot{B}_2 + \beta_2\dot{B}_2 + M_2 &= 0, \dots \\ \ddot{C}_1 + \gamma_1\dot{C}_1 + N_1 &= 0, & \ddot{C}_2 + \gamma_2\dot{C}_2 + N_2 &= 0, \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ должны быть взяты не слишком большими, чтобы движение сохраняло колебательный характер, и не слишком малыми, чтобы затухание было достаточно заметным.

Решить этот вопрос проще всего, если линеаризовать выражения $L_1, L_2, \dots, M_1, \dots$ и рассмотреть уравнения (1.7) как независимые.

Если нагружение происходит медленно, можно, пренебрегая силами инерции, отбросить вторые производные параметров $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots$ и рассматривать систему как вязкодеформируемую. При этом только необходимо согласовать шаг интегрирования с величинами коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$.

Вообще же говоря, шаг интегрирования Δt должен быть во всех случаях взят существенно меньшим периода собственных колебаний, соответствующих высшей парциальной частоте. Этим, кстати говоря, лимитируется число варьируемых параметров. При большом их числе заметно возрастает наибольшая парциальная частота, и шаг должен быть взят малым. В результате увеличивается машинное время.

Если отказаться от рассмотрения процесса во времени и перейти к обычному анализу форм равновесия, получим взамен дифференциальных уравнений (1.7) следующую систему:

$$\begin{aligned} L_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & L_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \\ M_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & M_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \\ N_1(A_i, B_i, C_i) &= 0, & N_2(A_i, B_i, C_i) &= 0, \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

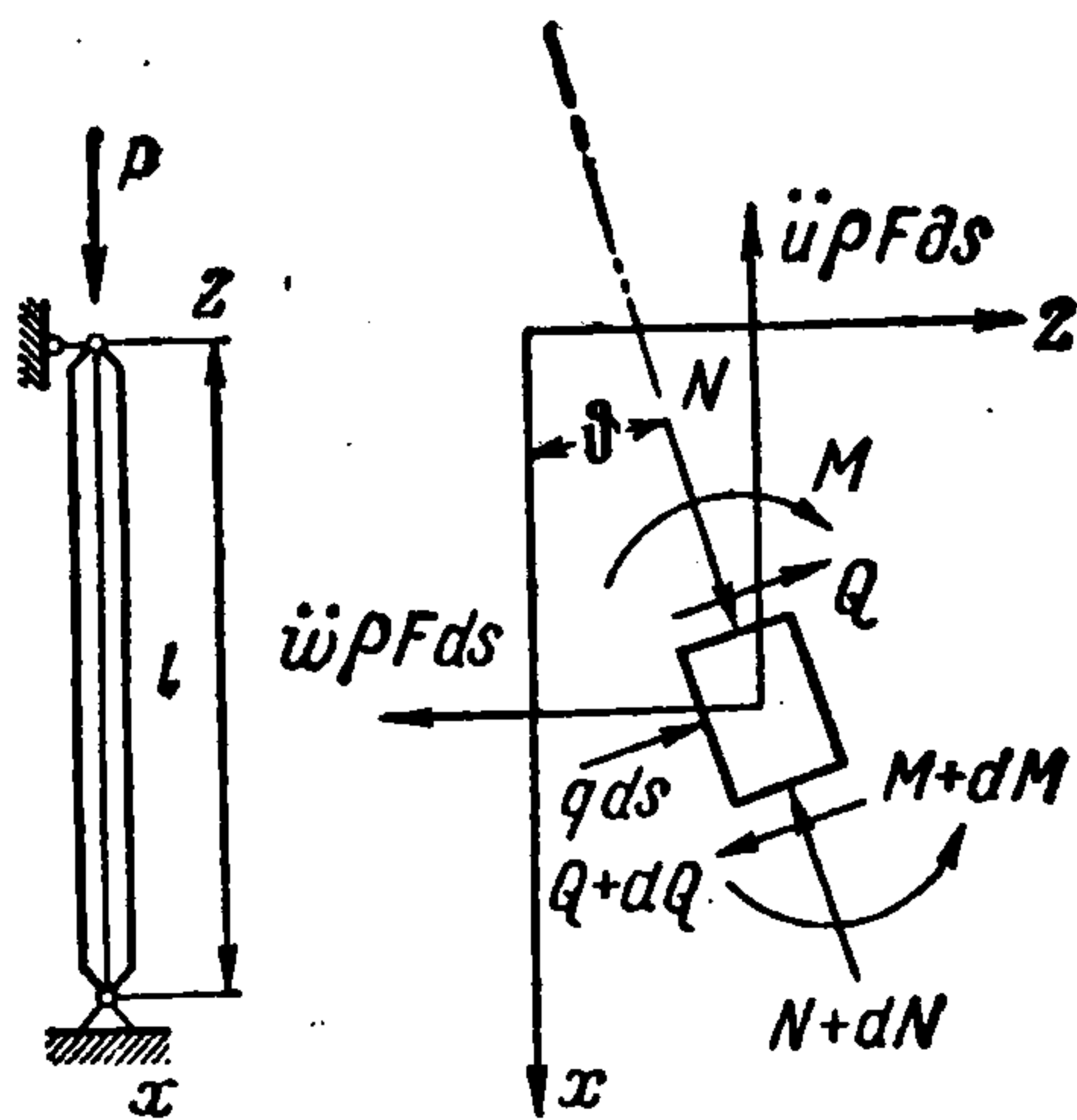
которая должна быть решена относительно варьируемых параметров A_i, B_i, C_i , что при нелинейных соотношениях и большом числе параметров, как правило, неосуществимо. В шаговом же методе надо просто в выражения L_1, L_2, \dots подставить значения A_i, B_i, C_i предыдущего шага, что всегда легко выполняется.

Достоинства шагового метода заключаются в том, что полностью стирается граница между линейными и нелинейными системами, между малыми и большими перемещениями, между статикой и динамикой и почти нет никакой разницы между задачами упругости и пластичности. Открывается возможность решения задач ползучести и пластичности, связанных с историей нагружения. В отличие от обычных методов, число варьируемых параметров может быть резко увеличено. Для этого операции подстановки при переходе от уравнений (1.3) к уравнениям (1.2) и далее — к уравнениям (1.1) должны быть возложены на машину.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости стержня (фиг. 1), сжатого за пределами упругих деформаций.

Эта задача, как и всякая другая, связанная с устойчивостью пластически деформируемых систем, нуждается прежде всего в формулировке принципов, которые должны быть положены в основу анализа. Под устойчивостью принято понимать свойство системы возвращаться к исходному состоянию после устранения причин, вызвавших сравнительно небольшие возмущения. Заранее можно сказать, что при наличии пластических деформаций система этим свойством, вообще говоря, не обладает.

Если в прямом стержне при осевом сжатии не возникло пластических деформаций, то всегда можно подобрать такое достаточно малое отклонение, чтобы изгибные напряжения в сумме с напряжениями сжатия не превысили предела упругости. В то же время несколько увеличенное отклонение может привести к тому, что в стержне при той же осевой силе образуются остаточные деформации, и стержень к исходному состоянию не вернется. Если прямой стержень сжат за пределами упругости, то при любом сколь угодно малом отклонении стержень, предоставленный сам себе, не будет восстанавливать свою форму.



Фиг. 1

Ясно, что задача об устойчивости пластически деформируемой системы требует особого подхода. Здесь решающее значение приобретает история нагружения и история производимых проб (отклонений системы от исходного положения равновесия). Наиболее правильно, и по-видимому единственно правильно, рассматривать потерю устойчивости пластически деформируемой системы не как совокупность возможных форм равновесия, а как процесс. Шаговый метод позволяет полностью проводить такого рода исследование.

Итак, имеем шарнирно закрепленный стержень (фиг. 1). Вертикальная и горизонтальная составляющие внутренних сил в сечении стержня (фиг. 1) будут

$$X = N \cos \vartheta - Q \sin \vartheta, \quad Y = N \sin \vartheta + Q \cos \vartheta$$

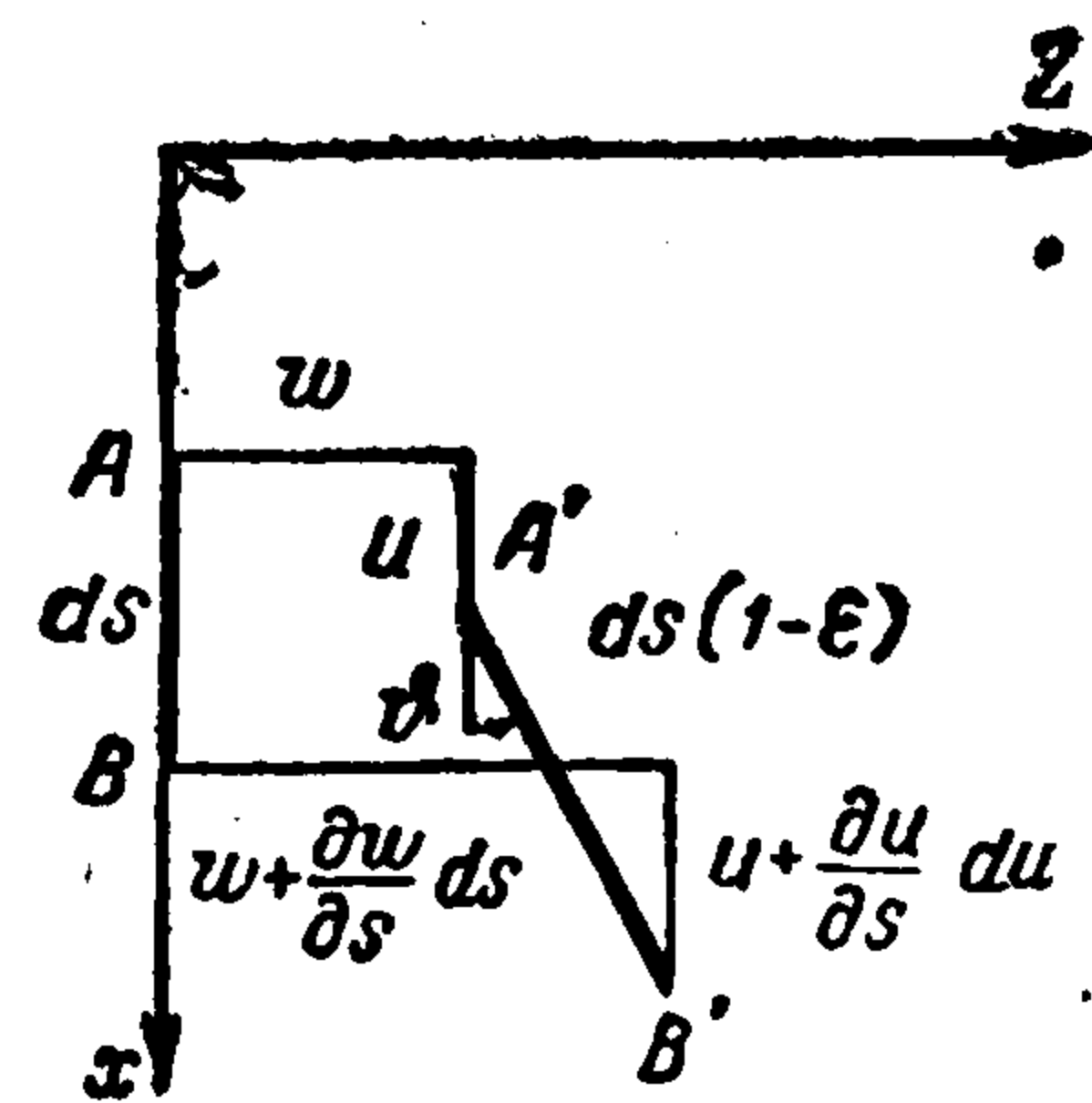
где ϑ — угол поворота сечения. Ограничений на величину угла ϑ не накладываем.

Далее составляем уравнения движения

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s} (N \cos \vartheta - Q \sin \vartheta) = -q \sin \vartheta$$

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s} (N \sin \vartheta + Q \cos \vartheta) = q \cos \vartheta$$

$$(Q = \partial M / \partial s) \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Рассмотрим замкнутый многоугольник $AA'B'B$ (фиг. 2). Приравнявая нулю сумму проекций отрезков на оси z и x , получаем

$$(1 - \epsilon) \sin \vartheta - \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (1 - \epsilon) \cos \vartheta - 1 - \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

Отсюда

$$\sin \vartheta = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right), \quad \epsilon = 1 - R \quad (2.2)$$

$$R = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2}$$

Для кривизны $\kappa = \partial \vartheta / \partial s$ получим

$$\kappa = \frac{\cos \vartheta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\sin \vartheta}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad (2.3)$$

Через κ и ε по диаграмме сжатия определяются напряжения, а через них — силы и моменты

$$N = \int_F \sigma dF, \quad M = \int_F \sigma z dF \quad (2.4)$$

Примем, что сечение имеет форму прямоугольника с меньшей стороной h и перепишем уравнения в безразмерной форме. Пусть

$$u = hu_0, \quad w = hw_0, \quad s = l\xi, \quad N = EFN_0, \quad M = EFlM_0$$

$$Q = EFM_0', \quad t = \tau \sqrt{\frac{lh\rho}{E}}, \quad q = \frac{q_0EF}{l}, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi} = (\cdot)', \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial\tau_{\pm}} = (\cdot)$$

Уравнения (2.1) — (2.3) примут вид

$$u_0 + (N_0 \cos \vartheta - M_0' \sin \vartheta)' = -q_0 \sin \vartheta$$

$$\ddot{w}_0 + (N_0 \sin \vartheta + M_0' \cos \vartheta)' = q_0 \cos \vartheta \quad (2.5)$$

$$\sin \vartheta = \frac{h}{l} \frac{w_0'}{R_0}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{h}{l} u_0' \right), \quad \varepsilon = 1 - R_0 \quad (2.6)$$

$$R_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{h}{l} u_0' \right)^2 + \left(\frac{h}{l} w_0' \right)^2} \quad (2.7)$$

$$\kappa h = \frac{h}{l} \vartheta' = \frac{1}{R_0} \left[\frac{h^2}{l^2} w_0'' \cos \vartheta - \frac{h^2}{l^2} u_0'' \sin \vartheta \right] \quad (2.8)$$

Введем обозначение $\eta = z/h$; для N_0 и M_0 получим

$$N_0 = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma}{E} d\eta, \quad M_0 = \frac{h}{l} \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma}{E} \eta d\eta \quad (2.9)$$

Примем, что

$$w_0 = \sum_{1, 2, 3, \dots} A_n \sin \pi n \xi, \quad u_0 = B_0 (1 - \xi) + \sum_{1, 2, 3, \dots} B_n \sin \pi n \xi \quad (2.10)$$

где A_n и B_n зависят от безразмерного времени.

Подставляем u_0 и w_0 в уравнения (2.7) и (2.8). Затем по диаграмме сжатия находим σ и путем интегрирования (2.9) для ряда сечений определяем N_0 и M_0 .

Подставляем N_0 , M_0 , u_0 и w_0 в уравнения движения (2.5). Воспользуемся методом Галеркина. Умножим оба уравнения на $\sin \pi i \xi$ и проинтегрируем от 0 до 1. В результате получим

$$\int_0^1 \left[\ddot{B}_0 (1 - \xi) + \sum \ddot{B}_n \sin \pi n \xi \right] \sin \pi i \xi d\xi +$$

$$+ \int_0^1 (N_0 \cos \vartheta - M_0' \sin \vartheta)' \sin \pi i \xi d\xi = - \int_0^1 q_0 \sin \vartheta \sin \pi i \xi d\xi$$

$$\int_0^1 \sum \ddot{A}_n \sin \pi n \xi \sin \pi i \xi d\xi +$$

$$+ \int_0^1 (N_0 \sin \vartheta + M_0' \cos \vartheta)' \sin \pi i \xi d\xi = \int_0^1 q_0 \cos \vartheta \sin \pi i \xi d\xi$$

С тем, чтобы избежать дифференцирования функций N_0 и M_0 , определяемых для ряда сечений, второй интеграл берем по частям дважды.

В результате получим

$$\ddot{A}_i + \alpha_i \dot{A}_i - \Phi_i = 0, \quad \ddot{B}_i + \beta_i \dot{B}_i - F_i = 0 \quad (2.11)$$

где

$$\Phi_i = 2 \int_0^1 \left[(q_0 + \pi^2 i^2 M_0) \cos \vartheta \sin \pi i \xi + \pi i \left(N_0 + M_0 \frac{l}{h} h \kappa \right) \sin \vartheta \cos \pi i \xi \right] d\xi \quad (2.12)$$

$$F_i = 2 \left\{ \int_0^1 \left[- (q_0 + \pi^2 i^2 M_0) \sin \vartheta \sin \pi i \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi i \left(N_0 + M_0 \frac{l}{h} h \kappa \right) \cos \vartheta \cos \pi i \xi \right] d\xi - \frac{\pi}{i} \ddot{B}_0 - \frac{\pi}{i} \beta_i \dot{B}_0 \right\}$$

В выражения (2.11) введено линейное затухание с произвольными параметрами α_i и β_i . Величина i пробегает значения $1, 2, \dots, m$, где m — индекс последнего слагаемого в разложениях (2.10). Уравнения связаны через величины Φ_i и F_i , которые зависят от $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$.

Будем считать, что стержень сжимается на жестком гидравлическом прессе и его концы сближаются по заданному закону

$$B_0 = f(\tau)$$

Осевая сила на верхнем конце стержня равна, очевидно

$$P = \left| N \cos \vartheta - \frac{\partial M}{\partial s} \sin \vartheta \right|_{s=0}$$

или в безразмерной форме

$$P_0 = \frac{P}{EF} = \left| N_0 \cos \vartheta - M_0' \sin \vartheta \right|_{\xi=0} \quad (2.13)$$

По мере сближения торцов сила P_0 сначала возрастает, а затем, при образовании заметных поперечных перемещений, падает. Максимальное значение силы примем, как это и делается при испытаниях, за показатель устойчивости. Можно назвать эту силу критической, но не в смысле бифуркации форм равновесия, а в смысле несущей способности, что по существу и необходимо.

Для конкретности последующих расчетов возьмем диаграмму сжатия, схематизированную двумя прямыми (фиг. 3)

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma - \sigma_T = D \left(\varepsilon - \frac{\sigma_T}{E} \right)$$

и введем безразмерные параметры

$$a = \frac{\sigma_T}{E}, \quad b = \frac{D}{E}$$

Тогда уравнения участков диаграммы сжатия будут

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon, \quad \frac{\sigma}{E} = a(1 - b) + b\varepsilon$$

Задаемся величинами a и b и отношением h/l . Затем в расчет вводим начальные значения коэффициентов A_i и B_i . Осевое смещение u в начальный момент полагается равным нулю. Поэтому $B_1 = B_2 = \dots = 0$.

Что касается начальной погиби w_0 , то она задается параметрами $A_{10}, A_{20} \dots$. В расчетах просматривалось только влияние A_{10} и A_{20} , т. е. предполагалось, что стержень может быть предварительно погнут по одной или по двум полуволнам. Начальные значения последующих членов разложения принимались во всех случаях равными нулю.

Всего в расчет было введено 16 варьируемых параметров

$$B_1, B_2, \dots, B_8, A_1, A_2, \dots, A_8$$

Разбиваем стержень на несколько участков и для каждого сечения по начальным значениям A_{10}, A_{20} подсчитываем по формулам (2.10) значения $w', u', w'', u'', h\kappa, \sin \vartheta, \cos \vartheta$ и ε .

При первом выполнении этой операции записываем полученную начальную кривизну, которая в дальнейших шагах постоянно вычитается из новых значений $h\kappa$. Это необходимо сделать в связи с тем, что изгибающий момент определяется разностью кривизны (новой и начальной).

Далее подсчитывается деформация в ряде точек каждого сечения

$$\varepsilon_z = \varepsilon + h\kappa \frac{z}{h} = \varepsilon + h\kappa\eta$$

Сечение разбивалось по высоте на 10 слоев и в каждом из них определяется ε_z , величина которого записывалась в оперативную память до следующего шага.

По величине ε_z из диаграммы сжатия находим напряжения. Для определения последних в программе предусматривается логическое сравнение с предыдущим шагом с тем, чтобы были разделены условия нагрузки и разгрузки.

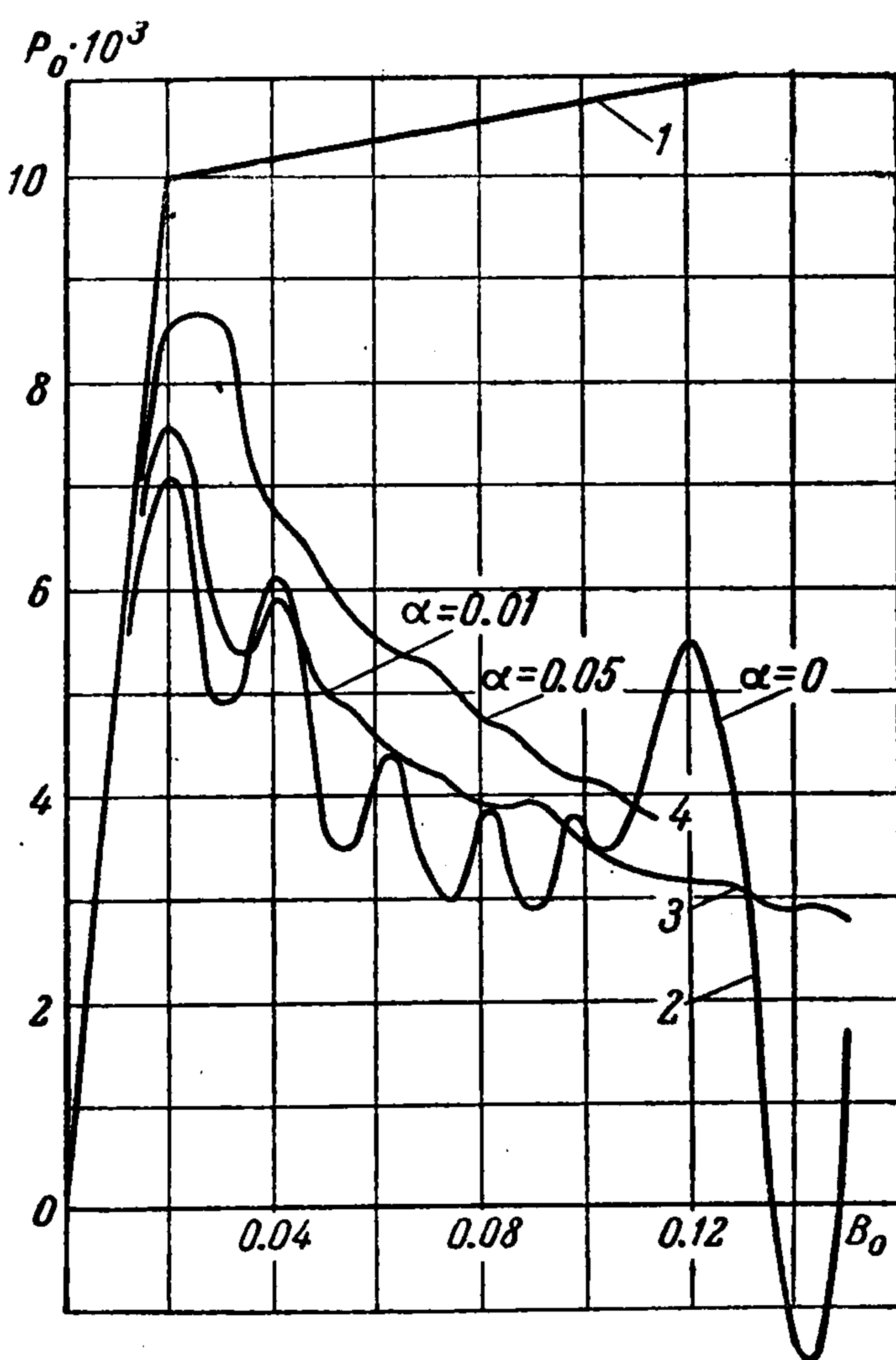
Производя интегрирование (2.9), получаем для каждого сечения величины N_0 и M_0 .

Подставляем N_0 и M_0 в выражения (2.12) и для $i = 1, 2, 3 \dots 8$ проводим интегрирование по ξ . Затем из уравнений (2.11) находим приращения $\Delta \dot{A}_i, \Delta \dot{B}_i, \Delta A_i, \Delta B_i$. Эти приращения суммируются с предыдущими значениями $\dot{A}_i, \dot{B}_i, A_i, B_i$ и цикл повторяется.

При расчетах принималось, что торцы стержня сближаются с постоянной скоростью и поэтому

$$B_0 = K\tau \quad (2.14)$$

Сила P определяется из соотношения (2.13). Ниже рассматриваются результаты некоторых расчетов.



Фиг. 4

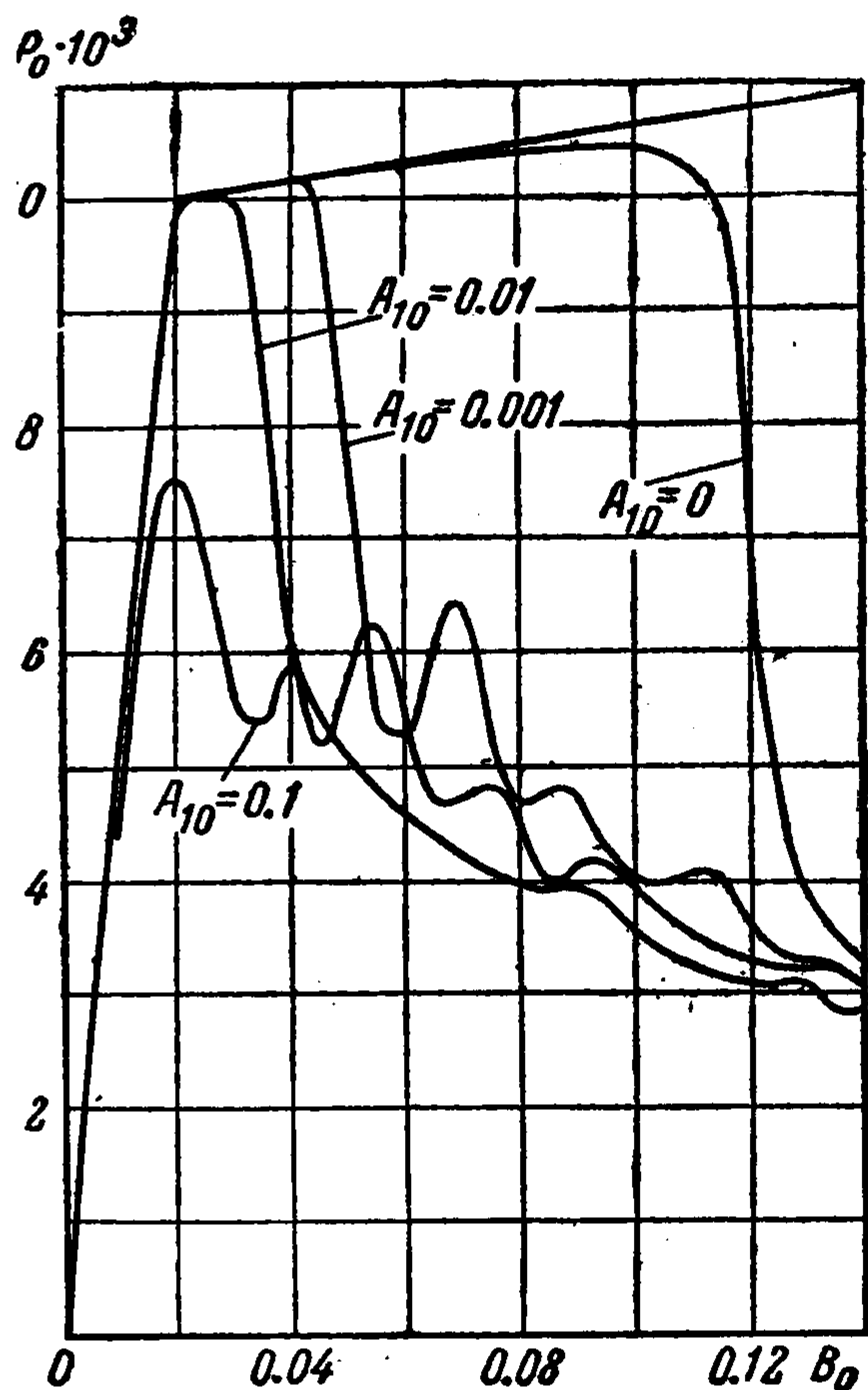
На фиг. 4 показана зависимость силы P_0 от относительного сближения концов стержня B_0 при следующих параметрах

$$\frac{h}{l} = 0.05, \quad a = \frac{\sigma_T}{E} = 0.001, \quad b = \frac{D}{E} = 0.015$$

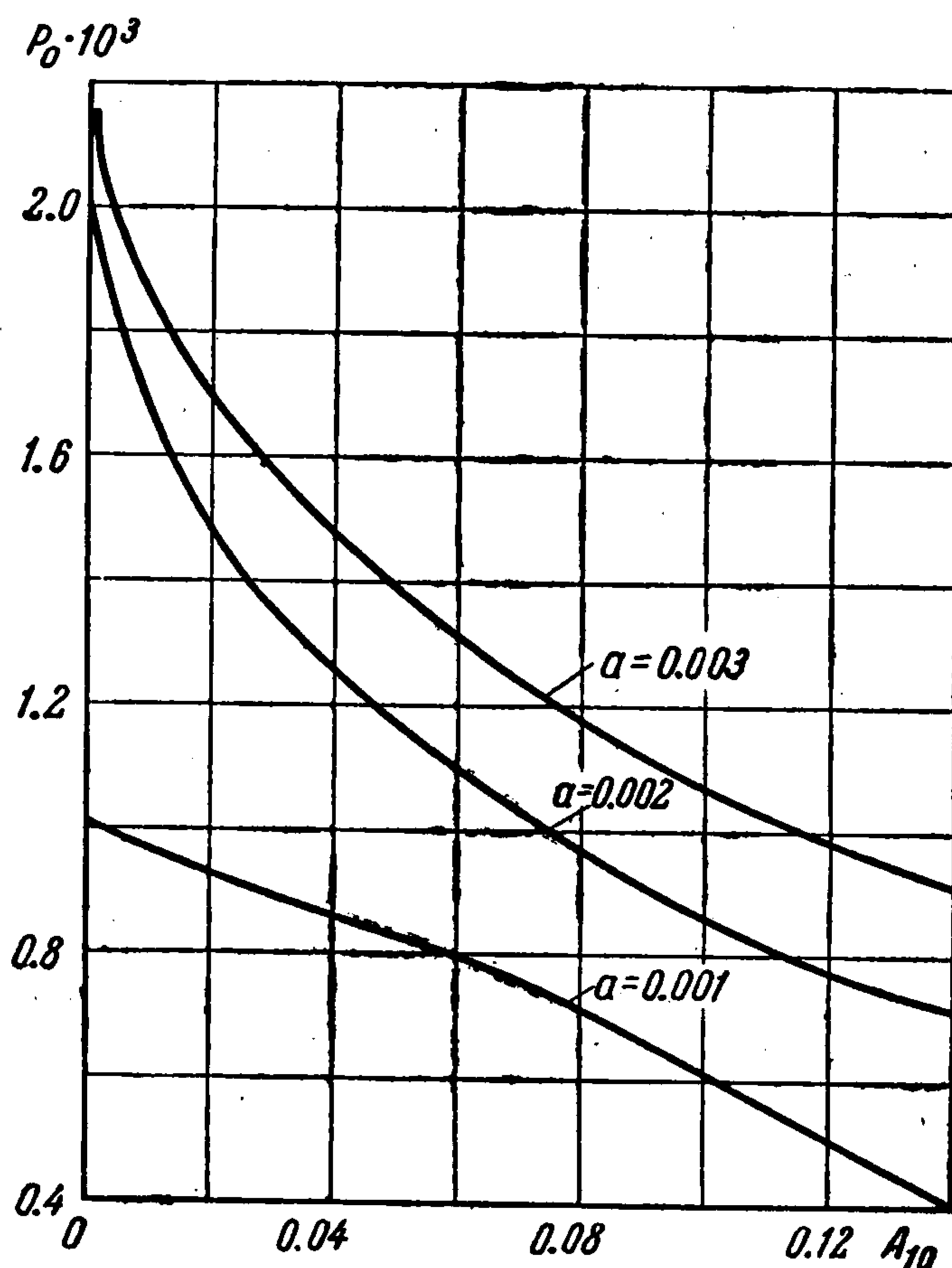
Предполагается, что стержень имеет начальную погибь в форме одной полуволны синусоиды с относительной амплитудой

$$A_{10} = w_{\max} / h = 0.1$$

Величина K в выражении (2.14) взята равной 10^{-4} .



Фиг. 5



Фиг. 6

При такой скорости сближения торцов возникновение пластических деформаций в прямом стержне происходит примерно за два периода собственных поперечных колебаний основного тона.

Цифрой 1 на фиг. 4 отмечена диаграмма сжатия в координатах B_0, P_0 . Кривые 2, 3, 4 отличаются по величине произвольно введенных коэффициентов линейного затухания α_i . Для принятой выше довольно большой скорости нагружения коэффициент затухания на величину критической силы влияет заметно. Если принять $\alpha_i = 0$ (кривая 2), картина падения нагрузки сильно искажается незатухающими колебаниями. В дальнейшем при построении кривых $P_0 = f(B_0)$ принималось $\alpha_i = 0.01$. При определении зависимости P_{\max} от различных параметров линейное затухание полагали равным нулю с тем, чтобы получить для P_{\max} меньшее значение.

На фиг. 5 для того же стержня показано изменение вида кривой $P_0 = f(B_0)$ для различных значений начальной погибь A_{10} . На фиг. 6 показана зависимость P_{\max} от A_{10} . Здесь P_{\max} определялось при скорости нагружения, в 10 раз меньшей, чем при построении кривых фиг. 5, т. е. при $K = 10^{-5}$.

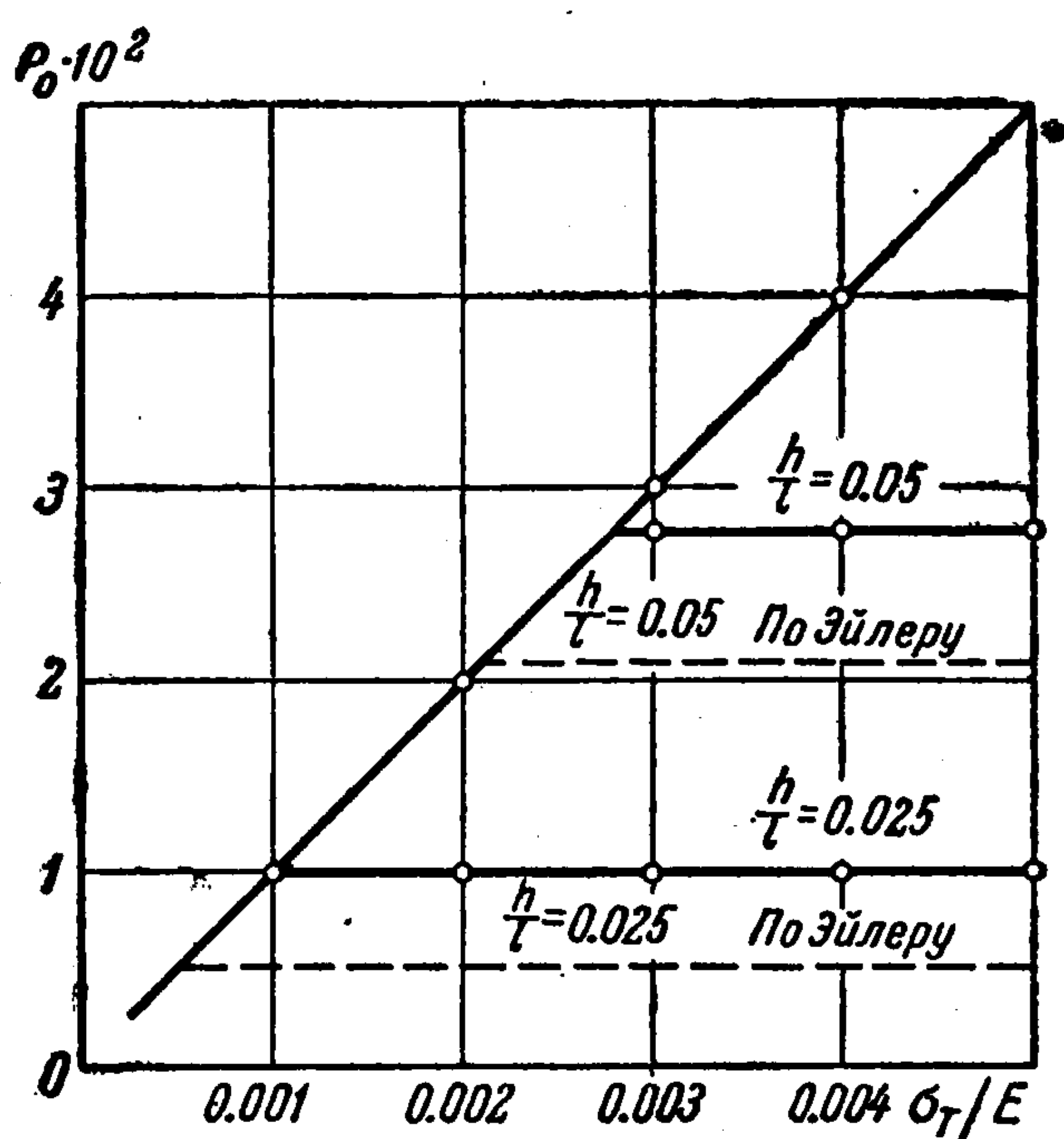
Из приведенных кривых видно, что начальная погибь для несущей способности стержня является определяющим фактором.

Принципиальное значение имеет вопрос, что даст машина, если начальной погибь для стержня не вводить вовсе.

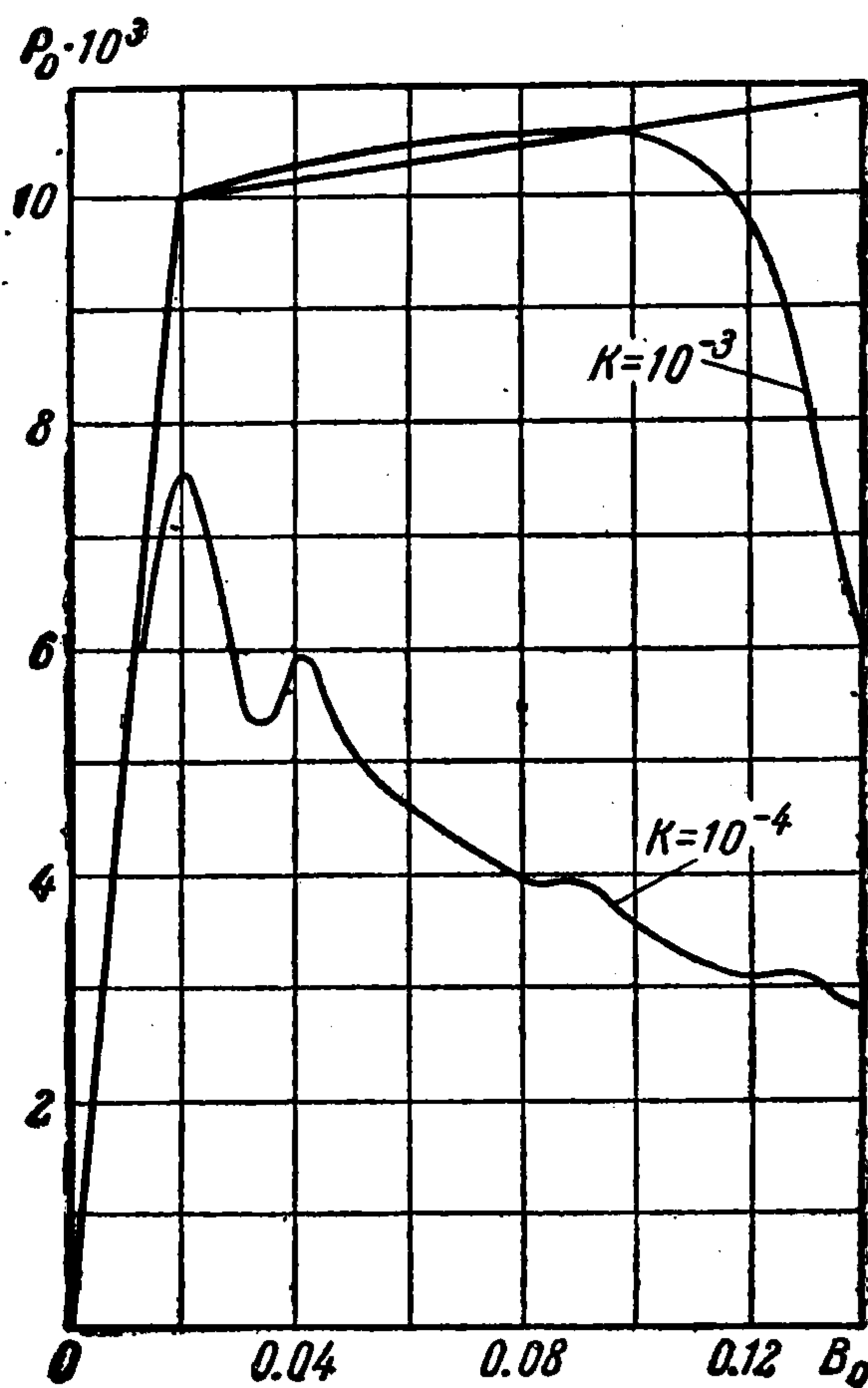
Как выяснилось, возмущения алгоритма (шаговое изменение параметров, округление чисел) оказалось достаточным для того, чтобы при определенной величине сближения торцов была зафиксирована потеря несущей способности. Это видно хотя бы на примере кривых фиг. 5.

На фиг. 7 дана зависимость P_{\max} от параметра $a = \sigma_T / E$ для нескольких значений h/l . Как и следовало ожидать, для каждого h/l существует такое значение σ_T , при дальнейшем увеличении которого P_{\max} не меняется, поскольку потеря несущей способности происходит в упругой зоне.

Существенно отметить, что даже при той весьма малой скорости нагружения, которая была выбрана ($K = 10^{-5}$), потеря несущей способности происходила при силе, заметно большей эйлеровой.



Фиг. 7



Фиг. 8

Для более длинного стержня это расхождение оказывается, естественно, более заметным, поскольку период собственных колебаний стержня увеличивается, а скорость нагружения сохраняется неизменной.

Влияние скорости нагружения иллюстрируется кривыми, приведенными на фиг. 8. В обоих случаях нагружения стержень имеет начальную погибь $A_{10} = 0.1$ и отношение $h/l = 0.05$. Скорость сближения торцов для одного стержня задана в 10 раз большей, чем для другого. В результате этого P_{\max} заметно увеличилось, а кривая нагружения вследствие продольных инерционных сил поднялась выше значений, задаваемых диаграммой сжатия.

Было проведено сравнение кривых нагружения для двух одинаковых стержней с различной по форме начальной погибью. Один стержень был предварительно изогнут по одной полуволне синусоиды, а другой — по двум. Амплитуды погиби были одинаковыми. Величина P_{\max} для стержня, изогнутого по двум полуволнам, оказалась существенно большей, чем для стержня, изогнутого по одной полуволне. По мере увеличения прогибов наибольшую амплитуду в обоих случаях, как и следовало ожидать, приобрела форма изгиба по одной полуволне.

Большой интерес для дальнейшего исследования представляют вопросы динамики пластически деформируемого стержня.

Поступила 1 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф е о д о с ь е в В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем, ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 2.