Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Устанавливаются некоторые новые свойства многочленов Якоби (и, в частности Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева), которые затем используются для решения интегрального уравнения, составленного таким образом, что оно является общим как для плоских контактных задач (с одним участком контакта), так и для пространственных с круговой областью контакта.

§ 1. Пусть линейный интегральный оператор L переводит

$$x^m \rho(x) \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots)$$

где $\rho(x)$ — интегрируемая функция, в многочлен степени m, помноженный на $\rho(x)$, т. е.

$$L[x^m \rho(x)] = \rho(x) \sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)} x^k \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.1}$$

причем

$$a_m^{(m)} \neq a_k^{(k)} \neq 0 \qquad (m, k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.2}$$

Тогда можно построить семейство многочленов

$$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} x^j, \quad c_m^{(m)} = 1 \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.3}$$

таких, что

$$L[p_m(x) \rho(x)] = \mu_m \rho(x) p_m(x), \qquad \mu_m = a_m^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.4}$$

В самом деле, сравнивая (1.4) с (1.1) и учитывая (1.3), видим, что

$$\sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} \sum_{k=0}^{j} a_k^{(j)} x^k = \mu_m \sum_{j=0}^{m} c_j^{(m)} x^j$$

Изменение порядка суммирования в левой части последнего равенства и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x приведут, с одной стороны, ко второй формуле (1.4), а с другой — к системе уравнений

$$a_m^{(m)} c_k^{(m)} = \sum_{j=k}^{m-1} a_k^{(j)} c_j^{(m)} + a_k^{(m)} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots m-1) \tag{1.5}$$

из которой можно определить коэффициенты многочленов (1.3), так как в силу (1.2) определитель этой системы отличен от нуля.

Важно отметить, что упомянутое семейство многочленов будет существовать и при нарушении условий (1.2), если оператор L симметричный.

Исходя из системы (1.5), можно получить формулу для определения коэффициентов $c_k^{(m)}$. Опуская выкладки, приведем окончательный результат

$$c_k^{(m)} = \frac{1}{\mu_m - \mu_k}\left(\sum_{j=0}^{m-k-2} A_{k,j}^{(m)} + \frac{a_{m-1}^{(m)} A_{k,m-k-2}^{m,m-1}}{\mu_m - \mu_{m-1}}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2 \ldots m-2;\quad c_{m-1}^{(m)} = (\mu_m - \mu_{m-1})^{-1} a_{m-1}^{(m)}) \tag{1.6}$$

где

$$A_{n,j}^{(m)} = \sum_{r=n+1}^{m-1} \frac{a_n^{(r)} A_{r,j-1}^{(m)}}{\mu_m - \mu_r},\qquad A_{n,j}^{m,s} = \sum_{r=n+1}^{s-j} \frac{a_n^{(r)} A_{r,j-1}^{m,s}}{\mu_m - \mu_r},\qquad A_{n,0}^{(m)} = a_n^{(m)},\quad A_{r,0}^{m,s} = a_r^{(s)}$$

§ 2. Рассмотрим интегральный оператор

$$K_\mu^\gamma[\varphi(x)] = \int_0^a K_{\mu,\gamma}^{\nu,\lambda}(x, y)\,\varphi(y)\,dy,\qquad K_{\mu,\gamma}^{\nu,\lambda}(x, y) = \frac{x_\lambda}{y^{\varepsilon+\lambda-1}} W_{\mu,\gamma}^\nu(x, y) \tag{2.1}$$

где

$$W_{\mu,\gamma}^\nu(x, y) = \int_0^\infty s^\nu J_\mu(sx) J_\gamma(sy)\,ds,\qquad W_{\mu,\mu}^\nu = W_\mu^\nu \tag{2.2}$$

($J_\mu(z)$ — функция Бесселя)

Ограничения, которые следует наложить на содержащиеся в (2.2) параметры, будут оговорены ниже.

Представив ядро оператора (2.1) в виде

$$K_{\mu,\gamma}^{\nu,\lambda}(x, y) = \frac{k(x/y)}{y^{\nu+\varepsilon}},\qquad k(z) = z^\lambda \int_0^\infty s^\nu J_\mu(sz) J_\gamma(s)\,ds \tag{2.3}$$

и положив $x = ae^{-\xi}$, $y = ae^{-\eta}$, будем иметь

$$K_\mu^\gamma[\varphi] = \left(\frac{e^\xi}{a}\right)^{\nu+\varepsilon} \int_0^\infty l(\xi - \eta)\, ae^{-\eta}\varphi(ae^{-\eta})\,d\eta,\qquad l(t) = \frac{k(e^{-t})}{e^{(\nu+\varepsilon)t}} \tag{2.4}$$

Введем в рассмотрение преобразования Фурье

$$L(u) = \int_{-\infty}^\infty l(t)\,e^{iut}dt,\qquad \Phi(u) = \int_0^\infty ae^{-\eta}\varphi(ae^{-\eta})\,e^{i\eta u}d\eta \tag{2.5}$$

Здесь принято, что $\varphi(y) \equiv 0$ при $y > a$. На основании теоремы о свертках для преобразований Фурье

$$K_\mu^\gamma[\varphi] = \left(\frac{e^\xi}{a}\right)^{\nu+\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty L(u)\,\Phi(u)\,e^{iu\xi}du \tag{2.6}$$

Вычисляя первый интеграл в (2.5) тем же способом, что и в работе [1], получим

$$L(u) = \frac{\Gamma(^1/_2[\mu+\nu+\lambda+\varepsilon-iu])\,\Gamma(^1/_2[1+\gamma-\lambda-\varepsilon+iu])}{2^{1-\nu}\Gamma(1+{}^1/_2[\mu-\nu-\lambda-\varepsilon+iu])\,\Gamma(^1/_2[1+\gamma+\lambda+\varepsilon-iu])} \tag{2.7}$$

Если принять, что (2.8)

$$\varphi(x) = x^{2m+\mu+\lambda+\varepsilon}(a^2 - x^2)^{-\omega} = \varphi_m(x) \qquad (\omega = {}^1/_2 - {}^1/_2\,\nu,\ m = 0, 1, 2, \ldots)$$

нетрудно вычислить второй интеграл в (2.5)

$$\Phi(u) = \frac{\Gamma(1-\omega)\,\Gamma(m + {}^1/_2[1+\mu+\lambda+\varepsilon - iu])}{2a^{-2m-\mu-\nu-\lambda-\varepsilon}\,\Gamma(1+m+{}^1/_2[\mu+\nu+\lambda+\varepsilon - iu])}$$

Учитывая последнее, а также (2.7), соотношение (2.6) при $\mu = \gamma$ можно записать в таком виде

$$K_\mu^\mu[\varphi_m] = \frac{e^{(\nu+\varepsilon)\xi}\Gamma(1-\omega)}{2^{2-\nu}a^{-2m-\mu-\lambda}}\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma({}^1/_2[1+\mu-\lambda-\varepsilon+iu])\,({}^1/_2[1+\mu+\lambda+\varepsilon-iu])_m e^{-iu\xi}}{\Gamma(1+{}^1/_2[\mu-\lambda-\varepsilon+iu])\,({}^1/_2[\mu+\nu+\lambda+\varepsilon-iu])_{m+1}}\,du$$

$$(a)_n = \Gamma^{-1}(a)\,\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$$

Последний интеграл равен сумме вычетов и, стало быть,

$$K_\mu{}^\mu[\varphi_m(x)] = a^{2m+\mu+\lambda}\sum_{k=0}^{m} a_k^{(m)}e^{-(2k+\mu+\lambda)\xi} \qquad \left(e^{-\xi} = \frac{x}{a}\right) \tag{2.9}$$

$$a_k{}^{(m)} = \frac{(\omega-k)_m\,\Gamma(1-\omega)\,\Gamma(1+k-\omega+\mu)}{(-1)^k 2^{1-\nu}k!\,(m-k)!\,\Gamma(1+k+\mu)} \tag{2.10}$$

Наконец, положив $\varepsilon = 1 - 2\lambda$, $x = at$, $y = a\tau$ и приняв во внимание (2.1) и (2.8), вместо (2.9) будем иметь

$$L^*[\rho(t)\,t^{2m}] = \rho(t)\sum_{k=0}^{m} a_k{}^{(m)}t^{2k} \qquad (\rho(t) = t^{\mu+\lambda}) \tag{2.11}$$

где

$$L^*\psi = a^{1+\nu}\int\limits_0^1\frac{(t\tau)^\lambda W_\mu{}^\nu(at, a\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau}{\tau^{2\lambda-1}(1-\tau^2)^\omega} \qquad \left(\omega = \frac{1-\nu}{2}\right) \tag{2.12}$$

Совершенные выше операции, приведшие к соотношению (2.11), можно обосновать, если считать[1], что $0 \leqslant \nu < 1$, $-1 < \mu = \gamma < \infty$.

В соответствии с изложенным в § 1, собственные числа оператора (2.12) будут определяться формулой

$$\mu_m = \frac{(-1)^m 2^{\nu-1}\pi\Gamma(1+m+\mu-\omega)}{\sin\pi\omega m!\,\Gamma(1+m+\mu)\,\Gamma(\omega-m)} \qquad (m = 0, 1, 2\ldots) \tag{2.13}$$

полученной из (2.10), а его собственные функции $\psi_m(t)$ будут иметь вид

$$\psi_m(t) = t^{\mu+\lambda}p_m(t^2) \tag{2.14}$$

При этом коэффициенты многочленов $p_m(x)$, определяемых формулой (1.3), могут быть найдены при помощи формул (1.6) и (2.10).

[1] При рецензировании настоящей работы Н. А. Ростовцев указал, что соотношение (2.11) можно также получить, опираясь на его теорему об эллиптическом штампе [2].

Однако в разбираемом случае в этом необходимости нет, ибо указанные многочлены весьма просто связаны с многочленами Якоби $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$. Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что оператор (2.12) можно известным приемом ([3], стр. 111) привести к симметричному, у которого собственные функции должны быть ортогональны друг другу, что в разбираемом случае равносильно выполнению следующего равенства

$$\int_0^1 \frac{t^{1+2\mu}}{(1-t^2)^\omega} p_m(t^2)\, p_n(t^2)\, dt = 0 \qquad (m \neq n) \tag{2.15}$$

В результате замен

$$2t^2 = 1 - x, \quad p_m^*(x) = p_m({}^1/_2 - {}^1/_2\, x)$$

вместо (2.15) будем иметь

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-x)^\mu}{(1+x)^\omega} p_m^*(x)\, p_n^*(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Но этому же условию ортогональности удовлетворяют и многочлены Якоби $P_m^{(\mu,-\omega)}(x)$, а потому в силу известной теоремы ([4], стр. 1037)

$$p_m^*(x) = B_m P_m^{(\mu,-\omega)}(x), \qquad p_m(t^2) = B_m P_m^{(\mu,-\omega)}(1-2t^2)\ (B_m = \mathrm{const}) \tag{2.16}$$

Таким образом, учитывая (2.11) — (2.16), приходим к основному результату, заключающемуся в том, что

$$L^*\,[t^{\mu+\lambda} P_m^\mu(t)] = \mu_m t^{\mu+\lambda} P_m^\mu(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{2.17}$$

где

$$P_m^\mu(t) = P_m^{(\mu,-\omega)}(1-2t^2) \tag{2.18}$$

§ 3. Рассмотрим теперь наиболее интересные частные случаи соотношения (2.17), а также следствия из него.

Начнем со случая $\mu = \nu = \lambda = 0$, заметив предварительно, что на основании формул 8.962 (1) и 8.911 (2) из [4] имеет место зависимость

$$P_m^{(0,-1/2)}(1-2x^2) = P_{2m}(\sqrt{1-x^2}) \qquad (P_m(z) \text{ — многочлен Лежандра}) \tag{3.1}$$

Принимая во внимание (2.12), (2.13) и (3.1), из (2.17) получим

$$a\int_0^1 W_0^\circ(at,\, a\tau)\, \frac{\tau P_{2m}(\sqrt{1-\tau^2})}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = \frac{\pi}{2}\, \frac{(2m-1)!!^2}{2m!!^2} P_{2m}(\sqrt{1-t^2}) \tag{3.2}$$

что совпадает с результатом работы [5], где дано непосредственное доказательство соотношения (3.2).

Случай $\mu = \pm {}^1/_2$, $\lambda = {}^1/_2$. В первую очередь отметим, что

$$\pi \sqrt{xy} W^{\nu}_{\mp 1/2}(x, y) = \Gamma(\nu) \cos {}^1/_2 \nu\pi [\,|x-y|^{-\nu} \pm (x+y)^{-\nu}] \tag{3.3}$$

Чтобы убедиться в этом, следует учесть (2.2), а также формулы 3.762 и 8.463 из [4]. Примем во внимание также, что следствием формул 8.962 (1), 8.932 (3) из [4] являются следующие соотношения: (3.4)

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(m + {}^1/_2\nu) P_m^{(-{}^1/_2,\, -\omega)}(1 - 2t^2) = (-1)^m \Gamma({}^1/_2\nu)\,\Gamma(m + {}^1/_2)\, C_{2m}^{\nu/2}(t)$$

$$\sqrt{\pi}\,(1 + m + {}^1/_2\nu)\, t P_m^{({}^1/_2,\, -\omega)}(1 - 2t^2) = (-1)^m \Gamma({}^1/_2\nu)\,\Gamma(m + {}^3/_2)\, C_{2m+1}^{\nu/2}(t)$$

($C_m^{\alpha}(t)$ — многочлен Гегенбауэра)

Приняв во внимание (2.12), (2.13), положим в (2.17) $\mu = \mp {}^1/_2$, $\lambda = {}^1/_2$. В результате использования (3.3) и (3.4), а также известных функциональных свойств гамма-функции будем иметь

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{|x-y|^{\nu}} \pm \frac{1}{(x+y)^{\nu}}\right] \frac{C_{\pm}^{\nu/2}(y)}{\sqrt{(1-y^2)^{1-\nu}}}\, dy = \frac{\pi\Gamma(\nu + n_{\pm})}{\cos {}^1/_2 \nu\pi\, \Gamma(\nu)\,(n_{\pm})!} C_{\pm}^{\nu/2}(x) \qquad (3.5)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1,\ C_+^{\alpha} = C_{2m}^{\alpha},\ C_-^{\alpha} = C_{2m+1}^{\alpha},\ n_+ = 2m,\ n_- = 2m + 1,\ m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Отсюда нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$\int_{-1}^1 \frac{C_m^{\nu/2}(y)\, dy}{|x-y|^{\nu} \sqrt{(1-y^2)^{1-\nu}}} = \frac{\pi\Gamma(m+\nu)}{\cos {}^1/_2 \nu\pi\, \Gamma(\nu)\, m!} C_m^{\nu/2}(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \qquad (3.6)$$

Вычтем, далее, от левой и правой частей (3.6) соответственно левую и правую части следующего соотношения ([4], стр. 841)

$$\frac{\Gamma({}^1/_2\nu)}{\nu} \int_{-1}^1 \frac{C_m^{\nu/2}(y)}{\sqrt{(1-y^2)^{1-\nu}}}\, dy = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}\,\Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2\nu)\,\nu^{-2} & (m = 0) \\ 0 & (m = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

После этого устремим $\nu \to 0$, используя ([4], стр. 1044)

$$\lim_{\nu\to 0} \Gamma({}^1/_2\nu)\, C_m^{\nu/2}(x) = \frac{2}{m} T_m(x) \qquad (T_m(x) \text{ — многочлен Чебышева})$$

а также

$$\ln \frac{1}{|x-y|} = \lim_{\nu\to 0} \left(\frac{1}{|x-y|^{\nu}} - 1\right) \frac{1}{\nu} \qquad (3.7)$$

В результате указанных операций получим известное соотношение [6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \begin{cases} \ln 2 T_0(y) & (m = 0) \\ m^{-1} T_m(y) & (m = 1, 2, \ldots) \end{cases} \qquad (3.8)$$

При выводе следствия из соотношения (2.17) будем опираться на известную теорему ([7], стр. 263) о представимости ядра симметричного интегрального оператора в виде ряда по произведениям его ортонормированных собственных функций. После приведения оператора (2.12) к симметричному уже упоминавшимся приемом ([3], стр. 111) его ортонормированными собственными функциями в соответствии с (2.14) — (2.17) будут следующие функции:

$$t^{\mu+\lambda} \left[\frac{2(1 + 2m + \mu - \omega)\, m!\, \Gamma(1 + m + \mu - \omega)}{\Gamma(1 + m + \mu)\,\Gamma(1 + m - \omega)\,(1 - t^2)^{\omega}}\, t^{1-2\lambda}\right]^{1/2} P_m^{\mu}(t) \qquad (3.9)$$

Здесь использована формула 7.3911 из [4]. Следовательно, следствием соотношения (2.17) и упомянутой теоремы будет следующее разложение:

$$\frac{a^{1+\nu} W_\mu{}^\nu (at, a\tau)}{2^{\nu-1} (t\tau)^\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2 (1+m+\mu-\omega) P_m{}^\mu (t) P_m{}^\mu (\tau)}{\Gamma^2 (1+m+\mu)(1+2m+\mu-\omega)^{-1}} \tag{3.10}$$

Откуда, как частные случаи или как следствия соотношений (3.2), (3.5), (3.6), (3.8), вытекают следующие разложения:

$$a \int_0^\infty J_0 (axs) J_0 (ays)\, ds =$$

$$= \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!^2 P_{2m}(\sqrt{1-x^2})\, P_{2m}(\sqrt{1-y^2})}{2m!!^2 (4m+1)^{-1}} \qquad (0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$$

$$\frac{1}{|x-y|^\nu} \pm \frac{1}{(x+y)^\nu} = \frac{2^\nu \Gamma^2 (^1/_2 \nu)}{\cos {^1/_2} \nu\pi \Gamma (\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_\pm{}^{\nu/2} (x)\, C_\pm{}^{\nu/2} (y)}{(n_\pm + {^1/_2}\nu)^{-1}} \qquad (0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$$

$$(C_+{}^\alpha = C_{2m}^\alpha, \quad C_-{}^\alpha = C_{2m+1}{}^\alpha, \quad n_+ = 2m, \quad n_- = 2m+1)$$

$$\frac{1}{|x-y|^\nu} = \frac{2^{\nu-1} \Gamma^2 (^1/_2 \nu)}{\cos {^1/_2} \nu\pi \Gamma (\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m{}^{\nu/2} (x)\, C_m{}^{\nu/2} (y)}{(m + {^1/_2} \nu)^{-1}} \qquad (-1 \leqslant x, y \leqslant 1)$$

$$\ln \frac{1}{|x-y|} = \ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m (x)\, T_m (y)}{m} \qquad (-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1).$$

Заметим, что фигурирующие здесь ряды, в том числе и ряд, содержащийся в (3.10), сходятся в среднем [7].

§ 4. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\int_0^a K_{\mu,\gamma}{}^{\nu,\lambda} (x, y)\, \varphi (y)\, dy = f (x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{4.1}$$

К этому интегральному уравнению при $\gamma = \mu = n$, $\varepsilon = \lambda = 0$, как это видно из [1, 5, 8], можно свести контактные задачи теории упругости с круговой областью контакта для основания в виде обычного полупространства ($\nu = 0$) или полупространства с переменным по степенному закону модулем упругости ($\nu \neq 0$), а также контактные задачи нелинейной теории ползучести (в первом приближении) с той же областью контакта.

Покажем, что соответствующие перечисленным выше плоские задачи тоже можно свести к тому же интегральному уравнению (4.1).

Н. Х. Арутюняном [9] показано, что плоская контактная задача нелинейной теории ползучести (в первом приближении) сводится к интегральному уравнению

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{|x-y|^\nu}\, p^* (y)\, dy = f (x) \qquad (|x| \leqslant a) \tag{4.2}$$

К этому же интегральному уравнению сведена Л. А. Галиным плоская контактная задача теории упругости для полупространства с переменным по степенному закону модулем упругости.

Если обозначить через $p_+^*(x)$ решение уравнения (4.2) для четной правой части $f_+(x)$, а через $p_-^*(x)$ — для нечетной правой части $f_-(x)$, то, очевидно, отыскание решения уравнения (4.2) равносильно построению решений следующих двух уравнений

$$\int_0^a \left[\frac{1}{|x-y|^\nu} \pm \frac{1}{(x+y)^\nu}\right] p_\pm^*(y)\, dy = f_\pm(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \qquad (4.3)$$

Откуда, учитывая (3.3) и (2.1), следует, что названные выше плоские контактные задачи в симметричном случае сводятся к интегральному уравнению (4.1) при $\gamma = \mu = -{}^1/_2$, $\lambda = {}^1/_2$, $\varepsilon = 0$, а в случае косой симметрии — к тому же уравнению при $\gamma = \mu = {}^1/_2$, $\lambda = {}^1/_2$, $\varepsilon = 0$.

Что же касается плоских контактных задач для обычного полупространства, которые, как известно [10], равносильны решению следующих интегральных уравнений

$$\int_0^a \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \pm \ln \frac{1}{x+y}\right] p_\pm(y)\, dy = f_\pm(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \qquad (4.4)$$

то они тоже не выходят за рамки уравнения (4.1), ибо в силу (3.7) их решения могут быть получены предельным переходом из решений уравнений (4.3).

Таким образом, использование полученного в § 2 соотношения (2.17) и его частных случаев позволяет для всех упоминавшихся выше контактных задач получить решение в виде рядов по классическим многочленам. Такого вида решение будет использовано в § 5.

Здесь же мы построим решение интегрального уравнения (4.1) в виде квадратур. Тем самым будет получена общая формула, выражающая решение как пространственных контактных задач с круговой областью контакта, так и плоских с одним участком контакта.

Прежде всего заметим, что уравнение (4.1) можно свести к интегральному уравнению Винера — Хопфа первого рода. Действительно, полагая в (4.1) (4.5)

$$x = ae^{-\xi}, \quad y = ae^{-\eta}, \quad \varphi(ae^{-\xi})\, ae^{-\xi} = \chi(\xi), \quad f(ae^{-\xi})\, a^{\nu+\varepsilon} e^{-(\nu+\varepsilon)\xi} = g(\xi)$$

и учитывая (2.3), будем иметь

$$\int_0^\infty l(\xi - \eta)\, \chi(\eta)\, d\eta = g(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi < \infty) \qquad (4.6)$$

где $l(t)$ определяется второй формулой (2.4).

Для получения решения уравнения (4.6) достаточно получить таковое для более простого уравнения [1]

$$\int_0^\infty l(\xi - \eta)\, \chi_\zeta(\eta)\, d\eta = e^{i\zeta\xi} \qquad (\xi, \operatorname{Im} \zeta \geqslant 0) \qquad (4.7)$$

после чего воспользоваться формулой

$$\chi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G(-\zeta)\, \chi_\zeta(\xi)\, d\zeta, \qquad G(u) = \int_0^\infty g(\xi)\, e^{i\xi u} d\xi \qquad (4.8)$$

Применяя для решения уравнения (4.7) прием, описанный в работе [1], найдем (ср. также [5])

$$\varphi_\zeta(x)=\frac{1}{x}\chi_\zeta\left(\ln\frac{a}{x}\right)=\frac{\Psi_-(-\zeta)\,x^{\gamma+\lambda+\varepsilon}}{\Gamma(^1/_2[1+\mu-\gamma+\nu])}\left\{\frac{a^{-\gamma-\nu-\lambda-\varepsilon}}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\mu+\gamma-\nu}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+\nu+\lambda+\varepsilon+i\zeta}{a^{-i\zeta}}\int_x^a\frac{t^{-1-\mu-\nu-\lambda-\varepsilon-i\zeta}dt}{\sqrt{(t^2-x^2)^{1-\mu+\gamma-\nu}}}\right\}\qquad(0\leqslant x\leqslant a)\qquad(4.9)$$

$$(\Psi_-(-\zeta)=2^{1-\nu}\Gamma(1+{}^1/_2[\mu-\nu-\lambda-\varepsilon-i\zeta])\,\Gamma^{-1}(^1/_2[1+\gamma-\lambda-\varepsilon-i\zeta]))$$

Найдя решение $\chi_\zeta(\xi)$ уравнения (4.6) для специальной правой части, можно получить решение для общего случая, воспользовавшись формулой (4.8). Однако более удобным оказывается (ср. [1]) воспользоваться для этой цели известным результатом М. Г. Крейна [11]. Приняв во внимание (2.1), уравнение (4.1) можно записать и так

$$\int_0^a W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x,y)\,\varphi^*(y)\,dy=f^*(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant a)\qquad(4.10)$$

где

$$\varphi^*(x)=x^{1-\lambda-\varepsilon}\varphi(x),\qquad f^*(x)=x^{-\lambda}f(x)$$

Можно убедиться, что функция $\varphi_\zeta(x)\,x^{1-\lambda-\varepsilon}$ представляет собой решение уравнения (4.10) при

$$f^*(x)=a^{i\zeta}x^{-\nu-\lambda-\varepsilon-i\zeta}$$

и, стало быть, решение интегрального уравнения

$$\int_0^a W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x,y)\,q_\mu^{\gamma}(y,a)\,dy=1\qquad(0\leqslant x\leqslant a)\qquad(4.11)$$

будет определяться формулой

$$q_\mu^{\nu}(y;\ a)=y^{1-\lambda-\varepsilon}\,[a^{-i\zeta}\varphi_\zeta(y)]_{\zeta=i(\nu+\lambda+\varepsilon)}\qquad(4.12)$$

Нетрудно видеть, приняв во внимание (2.2), что решение интегрального уравнения, союзного уравнению (4.11), будет определяться теми же формулами (4.9), (4.12), но при этом следует поменять местами параметры μ и γ.

Получив решение $q_\mu^{\gamma}(y;a)$ интегрального уравнения (4.11) и союзного ему $q_\gamma^{\mu}(y;a)$, для построения решения уравнения (4.10) или (4.1) с произвольной правой частью можно воспользоваться формулами М. Г. Крейна [11]. В результате вычислений (ср. [1]) будем иметь[1]

$$\varphi(x)=\frac{2^{1-\nu}x^{\gamma+\lambda+\varepsilon}}{\Gamma(^1/_2[1+\mu-\gamma+\nu])\,\Gamma(^1/_2[1-\mu+\gamma+\nu])}\left\{\frac{\Phi(a)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\mu+\gamma-\nu}}}-\right.\qquad(4.13)$$

$$\left.-\int_x^a\frac{\Phi'(u)\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{1-\mu+\gamma-\nu}}}\right\},\qquad\Phi(a)=a^{-\mu-\gamma-\nu}\frac{d}{da}\int_0^a\frac{s^{1+\mu-\lambda}f(s)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{1+\mu-\gamma-\nu}}}$$

---

[1] Интегральное уравнение (4.10) при $\mu=\gamma$ решено также Н. И. Ахиезером, В. А. Щербиной [12] и независимо от них В. И. Моссаковским и Н. А. Ростовцевым [2] (при ином, чем здесь, представлении ядра). Методы решения этих авторов можно обобщить и на случай $\mu\neq\gamma$.

Формальный способ получения формулы (4.13) можно обосновать, если принять, что $0 \leqslant \nu < 1$, $|\mu - \gamma| < 1 + \nu$, и потребовать непрерывность функции $x^{1+\mu-\lambda} f(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Подставляя соответствующие значения параметров в полученную формулу (4.13), будем получать решения упомянутых в начале параграфа контактных задач. Например, чтобы получить решение $p_+^*(x)$ уравнения (4.2) с четной правой частью, следует положить $\gamma = \mu = -{}^1/_2$, $\lambda = {}^1/_2$, $\varepsilon = 0$ (приняв во внимание (4.3) и (3.3)); в результате будем иметь

$$p_+^*(x) = \frac{2^{1-\nu}\cos{}^1/_2\,\nu\pi\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma^2({}^1/_2 + {}^1/_2\nu)}\left[\frac{\Phi(a)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} - \int_x^a \frac{\Phi'(u)\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{1-\nu}}}\right] \qquad (4.14)$$

$$\Phi(a) = a^{1-\nu}\frac{d}{da}\int_0^a \frac{f_+(s)\,ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{1-\nu}}}$$

что совпадает с результатом, полученным Н. Х. Арутюняном [9], если в его формуле исправить неточность, возникшую в результате пропуска множителя ${}^1/_2$ в формуле для $M(a)$.

Найдем еще решение для плоской контактной задачи в случае обычного полупространства, т. е. решения интегральных уравнений (4.4). Если учесть (3.7), можно убедиться, что

$$p_\pm(x) = \lim_{\nu\to 0} p_\nu^\pm(x) \qquad (4.15)$$

где $p_\nu^\pm(x)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\int_0^a \left[\frac{1}{|x-y|^\nu} \pm \frac{1}{(x+y)^\nu}\right] p_\nu^\pm(y)\,dy = \gamma_\nu^\pm + \nu f_\pm(x) \qquad (4.16)$$

$$\gamma_\nu^+ = 2\int_0^a p_\nu^+(y)\,dy, \qquad \gamma_\nu^- = 0$$

Решения же последних легко находятся путем использования общей формулы (4.13). Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательный результат

$$p_+(x) = \frac{2}{\pi^2}\left\{\left[\Phi_+(a) - \frac{1}{\ln{}^1/_2 a}\int_0^a \frac{f_+(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}}\right]\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_x^a \frac{\Phi_+'(u)\,du}{\sqrt{x^2-u^2}}\right\}$$

$$p_-(x) = \frac{2x}{\pi^2}\left[\frac{\Phi_-(a)}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_x^a \frac{\Phi_-'(u)\,du}{\sqrt{x^2-u^2}}\right] \qquad (4.17)$$

$$\Phi_\pm(a) = a^{\pm 1}\frac{d}{da}\int_0^a \sqrt{\frac{s^{1\mp 1}}{a^2-s^2}}\, f_\pm(s)\,ds$$

Полученное решение $p_+(x)$ для симметричного случая легко приводится к форме, найденной Н. А. Ростовцевым [10] и М. Г. Крейном [11, 13]. Формула для $p_-(x)$ (кососимметричный случай) совпадает с результатом М. Г. Крейна [11, 13].

—→ Преимуществом метода, предложенного здесь, является то, что он позволяет решать уравнение (4.10) или (4.1) и в случае, когда в (2.2) содержится произведение функций более общего типа, чем $J_\mu(x)$, а также, когда ядро представляет собой сумму функций типа (2.2).

§ 5. Применим полученное в § 2 соотношение (2.17) к контактным задачам для основания общего типа, введенного в работах [1, 5, 6]. В последней из указанных работ показано, что контактную задачу с круговой областью контакта можно свести к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^\alpha K_n(x, y)\, y p_n^*(y)\, dy = g_n^*(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{5.1}$$

где

$$K_\mu(x, y) = \int\limits_0^\infty G(t)\, J_\mu(tx)\, J_\mu(ty)\, dt \tag{5.2}$$

Функция $G(t)$, конкретный вид которой определяется типом основания, обладает асимптотикой

$$G(t) = t^\nu [1 + o(1)], \qquad t \to \infty \tag{5.3}$$

С другой стороны, как это видно из работы [6], плоскую контактную задачу с одним участком контакта $(-a, a)$ можно свести к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} v(x - y)\, p^*(y)\, dy = g^*(x) \qquad (|x| \leqslant \alpha), \qquad v(t) = \int\limits_0^\infty G(t) \cos t\tau \frac{d\tau}{\tau}$$

Расчленив плоскую задачу на симметричную и кососимметричную, последнее интегральное уравнение таким же путем, как и (4.2), приведем к следующим двум

$$\int\limits_0^\alpha K_{\mp 1/2}(x, y) \sqrt{xy}\, p_\pm^*(y)\, dy = g_\pm^*(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \alpha)$$

Введем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^\alpha K_\mu(x, y)\, (xy)^\lambda\, y \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \alpha) \tag{5.4}$$

Легко видеть, что оно будет общим как для контактных задач с круговой областью контакта

$$p_n^*(x) = [\varphi(x)]_{\lambda=0,\ \mu=n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

так и для плоских (с одним участком контакта)

$$p_\pm^*(x) = [x\varphi(x)]_{\lambda=1/2,\ \mu=\mp 1/2}$$

Для приближенного решения уравнения (5.4) воспользуемся тем же способом, что и в работе [5], основанном на выделении из ядра сингулярной его части и в аппроксимации оставшейся непрерывной части многочленами.

Принимая во внимание асимптотику (5.3), ядро (5.2) можно представить в виде

$$K_\mu(x, y) \approx W_\mu^\nu(x, y) - (xy)^\mu \sum_{k=0}^N A_k M_k(x, y) \tag{5.5}$$

где сингулярный член определяется формулой (2.2), а непрерывная часть аппроксимирована отрезком ряда по многочленам вида

$$M_k(x, y) = \sum_{j=0}^k a_{kj} x^{2(k-j)} y^{2j} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{5.6}$$

Подставив (5.5) в (5.4) и положив

$$x = \alpha\xi, \qquad y = \alpha\eta, \qquad \alpha^{1-\nu+2\lambda}\varphi(\alpha\xi) = \chi(\xi)$$

взамен (5.4) получим следующее приближенное уравнение:

$$\alpha^{1+\nu}\int_0^1\left[W_\mu{}^\nu(\alpha\xi,\alpha\eta)-\left(\frac{\xi\eta}{\alpha^{-2}}\right)^\mu\sum_{k=0}^N A_kM_k(\alpha\xi,\alpha\eta)\right](\xi\eta)^\lambda\eta\chi(\eta)\,d\eta=f(\alpha\xi)\qquad(0\leqslant\xi\leqslant 1)\tag{5.7}$$

решение которого будем искать в виде ряда

$$\chi(\eta)=\sum_{m=0}^\infty Y_m\frac{\eta^{\mu-\lambda}P_m{}^\mu(\eta)}{(1-\eta^2)^\omega}\qquad\left(\omega=\frac{1-\nu}{2}\right)\tag{5.8}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты Y_m, подставим (5.8) в (5.7) и воспользуемся соотношением (2.17). Затем, используя ортогональность многочленов Якоби, проинтегрируем обе части уравнения (5.7) по ξ в промежутке (0,1) с весом

$$\xi^{1+\mu-\lambda}(1-\xi^2)^{-\omega}P_l{}^\mu(\xi)$$

в результате получим

$$\lambda_lY_l-\alpha^{1+\nu+2\mu}\sum_{m=0}^{N-l}Y_m\sum_{\max(m,\,l)}^N A_k\alpha^{2k}B_{mk}{}^{(l)}=f_l\qquad(l=0,1,2\ldots N)\tag{5.9}$$

$$Y_l=\lambda_l^{-1}f_l\qquad(N\leqslant l<\infty)$$

где

$$\lambda_l=\frac{2^{\nu-2}\Gamma^2(1+l-\omega)}{l!^2(1+2l+\mu-\omega)},\qquad B_{mk}{}^{(l)}=\sum_{j=m}^{k-l}a_{kj}b_{k+j}{}^{(l)}b_j{}^{(m)}$$

$$b_n{}^{(k)}=\int_0^1\frac{\xi^{1+2n+2\mu}P_k{}^\mu(\xi)}{(1-\xi^2)^\omega}d\xi=\begin{cases}0 & (k>n)\\ \dfrac{(-1)^kn!\,\Gamma(1+n+\mu)\,\Gamma(1+k-\omega)}{k!\,(n-k)!\,2\Gamma(2+k+n+\mu-\omega)} & (k\leqslant n)\end{cases}$$

$$f_l=\int_0^1\frac{\xi^{1+\mu-\lambda}f(\alpha\xi)}{(1-\xi^2)^\omega}P_l{}^\mu(\xi)\,d\xi\qquad(l=0,1,2\ldots)$$

При вычислении интеграла, определяющего $b_n{}^{(k)}$, в нем была сделана замена $1-2\xi^2=x$, после чего была использована формула 7.391 (4) из [4]. Существенно отметить, что система (5.9) имеет треугольную матрицу коэффициентов.

Помимо решения уравнения (5.7) в виде бесконечного ряда (оно будет таковым только в случае, если правая часть не многочлен), можно получить решение и в виде квадратур, воспользовавшись теми же соображениями, что и в § 4 работы [5].

Полезно отметить также, что если воспользоваться описанным в той же работе приемом получения аппроксимации ядра (5.2) в виде (5.5), то в (5.9) следует положить

$$a_{kj}=\frac{k!\,\Gamma(1+k+\mu)}{j!\,(k-j)!\,\Gamma(1+k-j+\mu)\,\Gamma(1+j+\mu)},\qquad A_k=\frac{(-1)^kC^{(\nu)}_{2(k+\mu)}}{4^{k+\mu}k!\,\Gamma(1+k+\mu)}$$

$$C_r{}^{(\nu)}=\int_0^A[s^\nu-G(s)]\,s^rds\quad(r=-1,0,1,2\ldots),\qquad C_{-1}{}^{(\nu)}=\frac{A^\nu-1}{\nu}-\int_0^A\frac{G(t)}{t}dt$$

Число A имеет здесь тот же смысл, что и в цитируемой работе.

Разумеется, этот прием (удобный, когда функция $G(t)$ быстро приближается к t^ν при $t\to\infty$) не является единственным для получения аппроксимации (5.5).

Отметим также, что в некоторых случаях может оказаться целесообразным разлагать непрерывную часть ядра (5.2) не в ряд по многочленам типа (5.6), а в двойной ряд по многочленам Якоби (и, в частности, по многочленам Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева).

§ 6. Разложения, полученные в § 3, полезны при решении некоторых интегральных уравнений второго рода. Покажем это на примере уравнения [14]

$$\varphi(\xi)+\frac{c}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{2|\tau-\xi|}\varphi(\tau)\,d\tau=f(\xi), \qquad -1<\xi<1 \tag{6.1}$$

Обозначив решение уравнения (6.1) при $f(\xi)\equiv 1$ через $\chi(\xi)$, подставим туда разложение для логарифма (§ 3). В результате почленного интегрирования получим

$$\chi(\xi)=1-\frac{2c}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}X_m T(\xi) \qquad \left(X_m=\frac{1}{m}\int_{-1}^{1}\chi(\tau)\,T_m(\tau)\,d\tau\right) \tag{6.2}$$

Умножив обе части последнего соотношения на $T_n(\xi)$ и соответствующим образом проинтегрировав, получим следующую бесконечную систему

$$nX_n=A_{n0}-\frac{2c}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}X_m \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots\,\infty) \tag{6.3}$$

$A_{nm}=0 \quad (n+m=1,\,3,\,5,\,\ldots)$,

$$A_{nm}=[1-(m+n)^2]^{-1}+[1-(m-n)^2]^{-1} \qquad (n+m=2,4,6,\ldots)$$

Рассмотрев отдельную четную систему (6.3), т. е. случай $n=2q$ и нечетную $n=2q-1$ можно обнаружить, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}=\frac{1}{4q^2-1} \qquad (q=1,\,2,\,3,\ldots\,\infty)$$

Приняв во внимание последнее, легко получить условие регулярности бесконечной системы (6.3) в виде $c<1.5\pi$. Найдя приближенное решение системы (6.3) (например, путем ее урезывания), получим в соответствии с (6.2) таковое и для интегрального уравнения (6.1) при $f(\xi)\equiv 1$. Что же касается решения для общего случая правой части, то его нетрудно получить, воспользовавшись формулами [11].

В заключение автор благодарит Н. А. Ростовцева за ряд ценных замечаний, сделанных при рецензировании настоящей работы.

Поступила 1 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Ростовцев Н. А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. Гостехиздат, 1951.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
5. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, 1962, т XXVI, вып. 1.
6. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, 1961, № 3.
7. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.
8. Кузнецов А. И. Вдавливание жестких штампов в полупространство со степенным упрочнением и при нелинейной ползучести материала. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
9. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
10. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.
11. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений 1-го и 2-го рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
12. Ахиезер Н. И., Щербина В. А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Зап. Матем. отд. физ.-матем. факультета и Харьковск. матем. об-ва, 1957, т. XXV, сер. 4.
13. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 6.
14. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости, М.— Л., Гостехиздат, 1949.