Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян

(Ереван)

Приводится решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения.

В качестве исходной физической гипотезы принимается теория установившейся ползучести, уравнение которой выражается зависимостью

$$\varepsilon_i = A\sigma_i^m \tag{0.1}$$

Здесь $\varepsilon_i$ — интенсивность скоростей деформаций, $\sigma_i$ — интенсивность напряжений, $m$ — показатель ползучести, $A$ — коэффициент ползучести.

Отметим, что выбор теории установившейся ползучести в качестве исходной физической гипотезы ни в коей мере не связан с сущностью излагаемого здесь метода решения контактных задач теории ползучести. Можно было исходить и из теории деформационного упрочнения [1] или из теории пластической наследственности [2].

Контактная задача с учетом сил трения здесь решается в условиях установившейся ползучести только для простоты изложения.

**§ 1. Равновесие полуплоскости при одновременном действии вертикальной и горизонтальной сил, приложенных к ее поверхности, в условиях установившейся ползучести.** Рассмотрим задачу о равновесии полуплоскости, нагруженной одновременно вертикальной и горизонтальной силами, приложенными к ее поверхности с учетом ползучести материала при степенном законе связи (0.1) между напряжениями и скоростями деформации.

Поместим начало цилиндрической системы координат $r, \theta, z$ в точке приложения сосредоточенных сил $P$ и $Q$ к полуплоскости и направим оси $r, \theta, z$, как показано на фиг. 1.

Согласно теории установившейся ползучести

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_r - \sigma), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_\theta - \sigma)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{r\theta}, \qquad \varepsilon_z = 0, \qquad \sigma = \sigma_z + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \tag{1.1}$$

Эти уравнения выведены в предположении несжимаемости материала

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \tag{1.2}$$

При этом

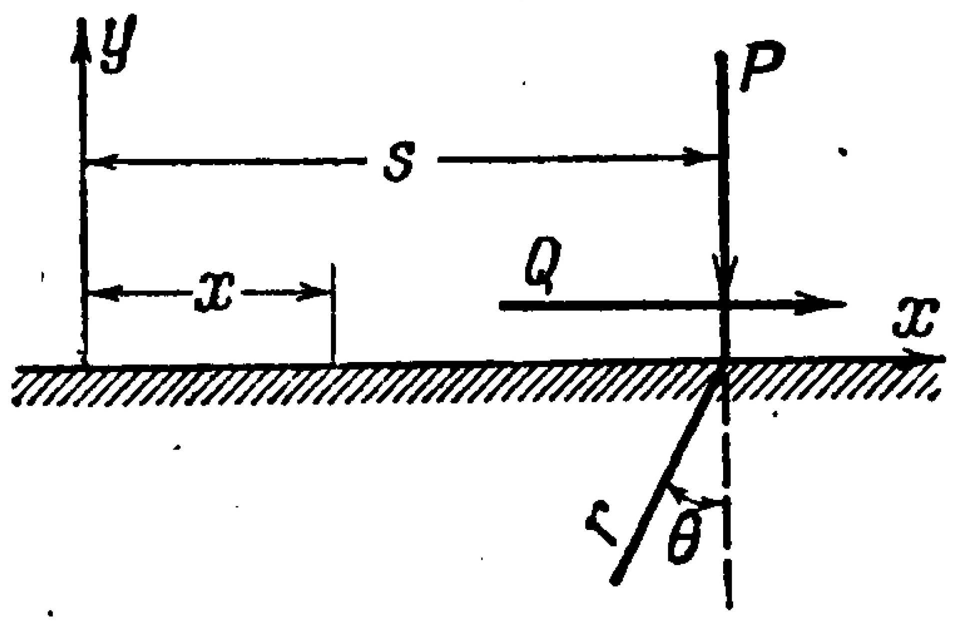
$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{r\theta}^2} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + 6\gamma_{r\theta}^2} \tag{1.4}$$

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах $r, \theta, z$ применительно к данной задаче имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0 \tag{1.5}$$

Зависимости между компонентами скорости деформаций и компонентами вектора скорости смещений будут




Фиг. 1

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \tag{1.6}$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

где $u, v, w$ — компоненты скорости смещений вдоль координатных осей $r, \theta, z$, которые в дальнейшем для простоты будем называть просто смещениями.

Тогда дифференциальное уравнение неразрывности деформации будет

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r^2\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - 2\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{1.7}$$

Граничными условиями задачи будут

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \pm {}^1/_2\pi \tag{1.8}$$

т. е. на свободной поверхности полуплоскости нет внешних усилий и

$$P = -\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \sigma_r r \cos\theta \, d\theta, \qquad Q = -\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \sigma_r r \sin\theta \, d\theta \tag{1.9}$$

для любого сечения полуплоскости, ограниченного цилиндрической поверхностью $r = \text{const}$.

Пусть между интенсивностями напряжений и скоростью деформации существует зависимость вида

$$\sigma_i = K_0 \varepsilon_i^{\mu} \qquad (0 < \mu < 1)$$

$$\left(K_0 = \frac{1}{A^{\mu}}, \mu = \frac{1}{m}\right) \tag{1.10}$$

Здесь $K_0$— константа ползучести, $\mu$ — показатель ползучести, определяемый из опытов при испытании на простую ползучесть.

Будем искать точное решение поставленной задачи в перемещениях в следующей форме:

$$u = \varkappa\,[f_1(r)\,\chi'(\theta) + f_0'(\theta)]$$

$$v = \varkappa\,[f_2(r)\,\chi(\theta) - f_0(\theta)]$$

$$w = 0 \; (\varkappa \pm 1) \tag{1.11}$$

*Таблица 1*

| $\mu$ | $k$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0.6366197 |
| | 0.1 | —0.1 | 0.6366197 |
| 0.70 | 0 | 0 | 0.5772424 |
| | 0.1 | —0.1289357 | 0.5798148 |
| 0.65 | 0 | 0 | 0.5611840 |
| | 0.1 | —0.1515839 | 0.5636824 |
| 0.30 | 0 | 0.094387 | 0.3984148 |
| | 0.1 | 0.276217 | 0.4014432 |
| 0.15 | 0 | —0.00741579 | 0.3241649 |
| | 0.1 | 0.4367790 | 0.328777 |
| 0.20 | 0 | 0.2364984 | 0.3480877 |
| | 0.1 | 0.3558958 | 0.3520133 |
| 0.25 | 0 | 0.5701044 | 0.3727948 |
| | 0.1 | 0.3046570 | 0.3761803 |

Здесь $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\chi(\theta)$ и $f_0(\theta)$ — некоторые однозначные и непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости

$$-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi \text{ и } r > 0$$

Полагая касательное напряжение $\tau_{r\theta}(t)$ равным нулю во всей полуплоскости и пользуясь соотношениями (1.1), (1.2), (1.6), для определения функций $f_0(\theta)$, $\chi(\theta)$, $f_1(r)$ и $f_2(r)$ получим

$$f_0''(\theta)+f_0(\theta)=0,\quad r^2f_1''(r)+rf_1'(r)-(1-\lambda^2)f_1(r)=0$$
$$\chi''(\theta)+\lambda^2\chi(\theta)=0,\qquad f_2(r)=-[rf_1'(r)+f_1(r)] \tag{1.12}$$

где $\lambda$ — параметр, подлежащий определению в дальнейшем.

Решая уравнения (1.12) и удовлетворяя граничным условиям (1.8), а также закону ползучести (1.1) и уравнениям равновесия (1.5), получим

$$\lambda^2=(2\mu-1)/\mu^2,\qquad \sigma_\theta=0 \tag{1.13}$$

Тогда для определения перемещения точек границы полуплоскости (т. е. при $\theta=\pm{}^1/_2\pi$) окончательно будем иметь следующие формулы:

$$u|_{\theta=-{}^1/_2\pi}=B_1P^mr^{1-m}-C_5,\qquad u|_{\theta=+{}^1/_2\pi}=B_2P^mr^{1-m}+C_5 \tag{1.14}$$
$$v|_{\theta=-{}^1/_2\pi}=A_1P^mr^{1-m}-C_6,\qquad v|_{\theta={}^1/_2\pi}=A_2P^mr^{1-m}+C_6\qquad (0<\mu<1)$$

где

$$A_1=g_1(a_2-a_1),\qquad B_1=g_2(-b_1+b_2)\qquad \left(g_1=\frac{(m-2)D_4^m}{(2K_0)^m(m-1)\lambda}\right)$$
$$A_2=-g_1(a_2+a_1),\qquad B_2=g_2(b_1+b_2)$$

$$a_1=D_3\eta_3({}^1/_2\pi,\mu),\qquad a_2=\eta_4({}^1/_2\pi,\mu)\qquad \left(g_2=-\frac{D_4^m}{(2K_0)^m(m-1)\lambda}\right)$$
$$b_1=D_3\eta_3'({}^1/_2\pi,\mu),\qquad b_2=\eta_4'({}^1/_2\pi,\mu)$$

$$\eta_3(\theta,\mu)=\cos l\theta,\quad \eta_4(\theta,\mu)=\sin l\theta,\quad l^2=(2\mu-1)/\mu^2\quad (\mu>{}^1/_2) \tag{1.15}$$

$$\eta_3(\theta,\mu)=\operatorname{ch}\beta\theta,\quad \eta_4(\theta,\mu)=\operatorname{sh}\beta\theta,\quad \beta^2=(1-2\mu)/\mu^2\quad (\mu<{}^1/_2) \tag{1.16}$$

Далее, пользуясь соотношениями (1.13), (1.1), (1.6) и (1.10), находим выражение $\sigma_r$. Подставляя найденное выражение в (1.9), получим систему уравнений для определения постоянных $D_3$ и $D_4$:

$$\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}(-D_3\sin l\theta+\cos l\theta)^\mu(k\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta=0\qquad (\mu>{}^1/_2) \tag{1.17}$$

$$D_4=\left[\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}(-D_3\sin l\theta+\cos l\theta)^\mu\cos\theta\,d\theta\right]^{-1}\qquad (k=Q/P) \tag{1.18}$$

или

$$\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}(D_3\operatorname{sh}\beta\theta+\operatorname{ch}\beta\theta)^\mu(k\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta=0$$

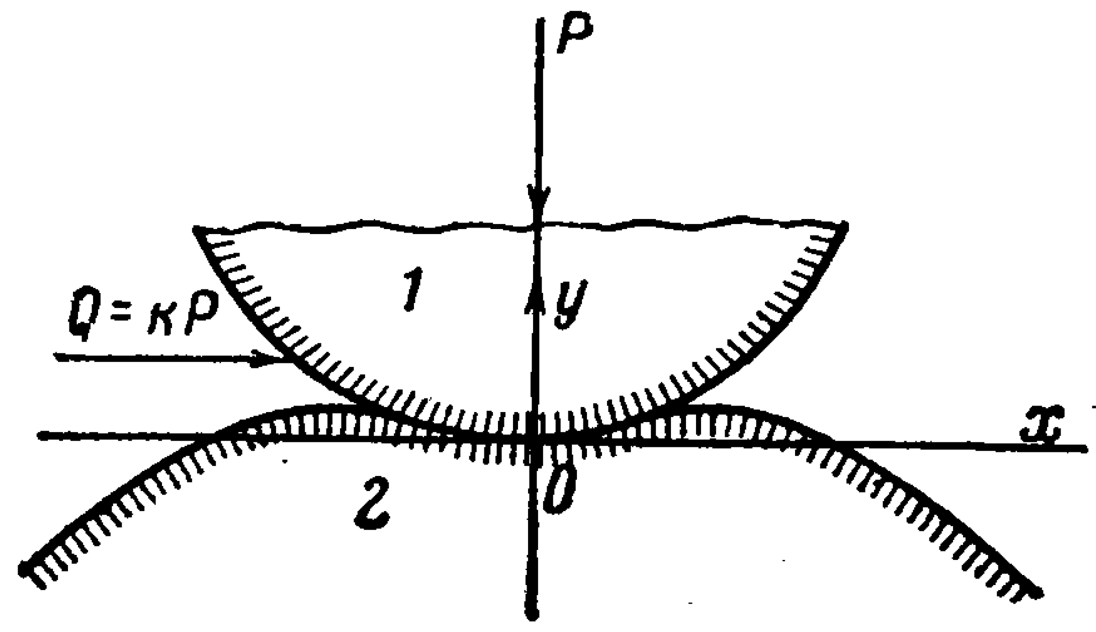
$$D_4=\left[\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}(D_3\operatorname{sh}\beta\theta+\operatorname{ch}\beta\theta)^\mu\cos\theta\,d\theta\right]^{-1}\qquad (\mu<{}^1/_2) \tag{1.19}$$

Выше, в табл. 1, приводится ряд значений для $D_3$ и $D_4$ при различных значениях показателя ползучести $\mu$ для $k=0$ и $k=0.1$, вычисленных на электронной машине «Арагац» в Вычислительном центре АН Армянской ССР.

**§ 2. Плоская контактная задача теории ползучести с учетом сил трения.** 1°. Постановка задачи и вывод основного уравнения. Переходим теперь к выводу основного уравнения контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения.

Пусть два соприкасающихся между собой в точке или по линии тела, обладающие свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых перпендикулярна к оси $x$ и проходит через начало координат (фиг. 2).

Далее, допустим, что одно из этих сжимаемых тел (например, тело 2) закреплено и что между телами отсутствует сила сцепления и действуют только силы кулонова трения.



Фиг. 2

При этом будем полагать, как обычно, что сжимаемое тело 1 находится в состоянии предельного равновесия.

Соотношение, которому должны удовлетворять перемещения точек области контакта этих тел, имеет вид [3]

$$v_1 + v_2 = \delta - f_1^*(x) - f_2^*(x) \qquad (2.1)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ — сближение тел в направлении $y$, а $f_1^*(x)$ и $f_2^*(x)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела.

На участке контакта этих тел нормальное давление обозначим через $p(x)$, а силу кулонова трения $q(x) = kp(x)$, где $k$ — коэффициент трения. Так как обычно область контакта бывает мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, то можно считать, что перемещения на участке этих тел будут такими же, как у граничных точек двух полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального давления $p(x)$ и силы кулонова трения $q(x) = kp(x)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела.

Разобьем эпюру давления $p(x)$, действующего на участке контакта $S$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, на элементарные полоски шириной $\Delta s_i$ и высотой $p(s_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим действие одной из этих полосок (например, $i$-й) на нижнюю полуплоскость.

Тогда в точке $x = s_i$ границы полуплоскости будут приложены вертикальная и горизонтальная силы

$$P_i = p(s_i)\,\Delta s_i, \qquad Q_i = kp(s_i)\Delta s_i$$

Граничная точка этой полуплоскости с координатой $x$ получит в направлении оси $oy$ перемещение $v$, определяемое, согласно (1.14), формулой

$$v = g_1\,[a_2 - \operatorname{sign}(s_i - x)\,a_1]\,|s_i - x|^{1-m} P_i^m + C \qquad (2.2)$$

или в другой форме

$$v^* = h_i p(s_i)\,\Delta s_i, \qquad v^* = (v - C)^{\mu} \qquad (m = 1/\mu) \qquad (2.3)$$
$$h_i = g_1^{\mu}\,[a_2 - \operatorname{sign}(s_i - x)\,a_1]^{\mu}\,|s_i - x|^{\mu - 1}$$

В дальнейшем $v^*(x)$ будем называть обобщенным перемещением точек границы полуплоскости.

Заметим, что, в отличие от истинного перемещения $v$, обобщенное перемещение $v^*$ линейно зависит от приложенной силы.

При одновременном действии системы сил $P_i = p(s_i)\,\Delta s_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ мы не в праве, строго говоря, использовать полученное выше решение (2.3) в качестве функции Грина для сформулированной здесь нелинейной задачи. В силу нелинейности задачи будем иметь

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} h_i p(s_i)\,\Delta s_i + A_n \tag{2.4}$$

или

$$v = \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i p\,(s_i)\,\Delta s_i + A_n\Big]^m + C \tag{2.5}$$

где величина $A_n$, вообще говоря, при произвольном $m$ отлична от нуля вследствие нелинейности взаимодействия сил. Точное решение поставленной здесь задачи представляет в настоящее время непреодолимую математическую трудность принципиального характера. Для получения приближенного решения воспользуемся отмеченной выше линейной зависимостью обобщенного перемещения $v^*$ от действующей силы и поступим следующим образом.

Как следует из линейности задачи [3], при определении давления под штампом при помощи зависимости (3.65) работы [3], в случае $m = 1$ величина $A_n \equiv 0$. При $m = 0$, как это следует из работы [3], распределение давления под штампом, получающееся в предположении $A_n = 0$, совпадает с законом распределения, соответствующим известному решению Прандтля [5].

Естественно поэтому предполагать, что и при произвольном $m$ в интервале $0 < m < 1$ отличие точного и приближенного решений, полученных в предположении $A_n \equiv 0$, будет невелико. Поэтому в соотношениях (2.4) и (2.5) примем $A_n = 0$ при произвольном $m$ в интервале $0 < m < 1$, т. е.

$$v^* = g_1^{\mu} \sum_{i=1}^{n} [a_2 - \operatorname{sign}\,(s_i - x)\,a_1](s_i - x)^{\mu-1}\,p\,(s_i)\,\Delta s_i \tag{2.6}$$

Подчеркнем еще раз, что линейная зависимость от приложенной силы, на чем основана возможность для приближенной суперпозиции обобщенных перемещений $v^*$ на площадке контакта $S$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, не имеет места для истинных перемещений $v$ ни в одной точке тела.

Переходя в выражении (2.6) к пределу $\Delta s \to 0$, для определения перемещений $v$ точек контакта $S$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ получим окончательно

$$v = g_1 \Big[\int_S \frac{[(a_2 - \operatorname{sign}\,(s - x)\,a_1]^{\mu}\,p\,(s)\,ds}{|\,s - x\,|^{1-\mu}}\Big]^m + C \qquad \Big(m = \frac{1}{\mu}\Big) \tag{2.7}$$

Здесь постоянные $a_1$, $a_2$, $g_1$ определяются согласно (1.14).

Пользуясь (2.1) и (2.7), для определения давления получим следующее сингулярное интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int\limits_S \frac{[a_2 - \operatorname{sign}(s-x)\, a_1]^{\mu}\, p(s)\, ds}{|s-x|^{1-\mu}} = F(x, \gamma) \qquad (\gamma = \text{const}) \tag{2.8}$$

Здесь

$$F(x, \gamma) = [\gamma - f_0(x)]^{\mu}, \qquad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{2g_1} \tag{2.9}$$

Постоянная $\gamma$ в (2.8) подлежит определению в дальнейшем.

Таким образом, сингулярное интегральное уравнение (2.8) является основным уравнением плоской контактной задачи теории нелинейной ползучести с учетом сил трения, когда между интенсивностями скорости деформации и напряжения существует зависимость вида (1.10).

2°. *Решение основного интегрального уравнения плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения.* Положим, что областью контакта $S$ между телами после их сжатия является отрезок $-a \leqslant x \leqslant a$ оси $x$. Тогда основное интегральное уравнение (2.8) примет вид:

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{[a_2 - \operatorname{sign}(s-x)\, a_1]^{\mu}\, p(s) ds}{|s-x|^{1-\mu}} = F(x, \gamma) \tag{2.10}$$

Здесь $F(x, \gamma)$ — непрерывная функция, $2a$ — ширина контакта, а $\gamma$ — некоторая постоянная, которая при заданной ширине контакта определяется из уравнения равновесия

$$P = \int\limits_{-a}^{a} p(x)\, dx \tag{2.11}$$

где $P$ — равнодействующая внешних сил, действующих на сжимаемое тело. Общее решение уравнения (2.10), согласно [4], имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{M'(a)} \left[ \frac{d}{dx} \int\limits_{-a}^{x} g(s, x) F(s, \gamma)\, ds \right]_{x=a} g^*(x, a) - \\ - \int\limits_{x}^{a} g^*(x, u) \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int\limits_{0}^{u} g(s, u) F(s, \gamma)\, ds \right] du \tag{2.12}$$

Здесь $g(s, a)$ решение уравнения

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{[a_2 - \operatorname{sign}(s-x)\, a_1]^{\mu}\, g(s, a)\, ds}{|s-x|^{1-\mu}} = 1 \tag{2.13}$$

а $g^*(s, a)$ — решение транспонированного уравнения

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{[a_2 + \operatorname{sign}(s-x)\, a_1]^{\mu}\, g^*(s, a)\, ds}{|s-x|^{1-\mu}} = 1 \tag{2.14}$$

при этом

$$M(a) = \int\limits_{-a}^{a} g(s, a)\, ds \tag{2.15}$$

Итак, если известны решения уравнений (2.13) и (2.14), то определение контактного давления $p(x)$, согласно (2.12), сводится к квадратурам.

3°. *О давлении жесткого штампа на полуплоскость в условиях установившейся ползучести с учетом сил трения.* Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость, находящуюся в условиях установившейся ползучести, с учетом сил трения.

Пусть жесткий штамп прижимается к полуплоскости силой (фиг. 3). Будем полагать, что штамп находится в состоянии предельного равновесия, т. е. в направлении оси $x$ на него действует горизонтальная сила $Q = kP$. Тогда, согласно (2.9), для этого случая будем иметь

$$f_0(x) = 0, \qquad F(x, \gamma) = \gamma^\mu \tag{2.16}$$

и интегральное уравнение (2.10) примет следующий вид:

$$\int_{-a}^{a} \frac{[a_2 - \operatorname{sign}(s - x)\, a_1]^\mu\, p(s)\, ds}{|s - x|^{1-\mu}} = \gamma^\mu \tag{2.17}$$

В силу (2.13) и (2.17), очевидно, имеем

$$p(x) = \gamma^\mu g(x, a) \tag{2.18}$$

Подставляя это выражение $p(x)$ в (2.11) и (2.18), находим

$$\gamma^\mu = P\left(\int_{-a}^{a} g(x, a)\, dx\right)^{-1}, \qquad p(x) = Pg(x, a)\left(\int_{-a}^{a} g(x, a)\, dx\right)^{-1} \tag{2.19}$$

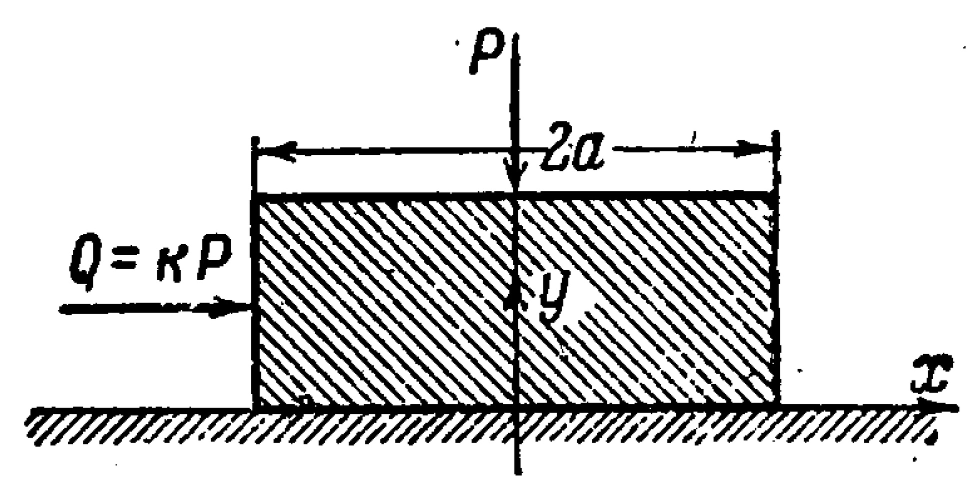
Перейдем теперь к определению функции $g(s, a)$, т. е. к решению сингулярного интегрального уравнения (2.13).

Решение интегрального уравнения (2.13) будем искать в форме

$$g(s, a) = \frac{N}{\sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} \left(\frac{a + s}{a - s}\right)^{1/2\mu - \rho} \tag{2.20}$$

где $N$, $\rho$ — неизвестные величины, причем $0 < \rho < \mu$. Подставляя выражение $g(s, a)$ из (2.20) в уравнение (2.13), получим

$$\int_{-a}^{x} \frac{(a_2 + a_1)^\mu N}{(x - s)^{1-\mu} \sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} \left(\frac{a + s}{a - s}\right)^{1/2\mu - \rho} ds + \int_{x}^{a} \frac{(a_2 - a_1)^\mu}{(s - x)^{1-\mu} \sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} \left(\frac{a + s}{a - s}\right)^{1/2\mu - \rho} ds \tag{2.21}$$




Фиг. 3

Нетрудно показать, что для выполнения равенства (2.21) необходимо и достаточно, чтобы постоянные $N$ и $\rho$ имели следующие значения[1]

$$N = \frac{H}{\pi}, \qquad \rho = \frac{1}{\pi} \arcsin (a_1 + a_2)^\mu H \tag{2.22}$$

где

$$H = \frac{\sin \pi\mu}{\sqrt{(a_2 + a_1)^{2\mu} + 2(a_2^2 - a_1^2)^\mu \cos \pi\mu + (a_2 - a_1)^{2\mu}}} \tag{2.23}$$

---

[1] Отметим, что интегральное уравнение (2.14) можно решить методом, развитым в работах [3,4]. Здесь параметры $N$ и $\rho$ определены другим способом, который авторам любезно указал И. Д. Заславский.

Подставляя выражение $g(s, a)$ из (2.20) в (2.19), после некоторых преобразований получим окончательно для определения давления $p(x)$ на площадке контакта под штампом следующую формулу:

$$p(x) = \frac{\Gamma(^1/_2(3-\mu))\,\Gamma(1-{}^1/_2\mu)\,\Gamma(\mu-\rho)\sin\pi(\mu-\rho)}{a^{1-\mu}\Gamma(1-\rho)} \times$$

$$\times \frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{^1/_2\mu-\rho} \qquad (2.24)$$

Здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция, а $\rho$ — постоянная, которая определяется по формуле (2.22).

Нетрудно видеть, что если не учитывать силы трения, то будет $a_1 = 0$ и, следовательно, $\rho = {}^1/_2\mu$. Тогда из (2.24) получим

$$p(x) = \frac{\Gamma(^1/_2(3-\mu))\Gamma(^1/_2\mu)\sin(^1/_2\pi\mu)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}\,\frac{P}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}} \qquad (2.25)$$

что совпадает с решением задачи о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость, находящуюся в условиях установившейся ползучести без учета трения, полученным в работе [3].

В качестве приложения рассмотрим численный пример определения давления жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость с учетом сил трения в условиях нелинейной ползучести.

В табл. 2 приведены значения давления $\frac{P(x)}{\alpha}$ $\left(\alpha = \frac{P}{a\pi}\right)$ в точках $x = {}^1/_4a$, $x = {}^1/_2a$ и $x = {}^3/_4a$ при различных значениях показателя ползучести $\mu$ для $k = 0$ и $k = 0.1$.

*Таблица 2*

| $\mu$ | $k$ | $x = {}^1/_4a$ | $x = {}^1/_2a$ | $x = {}^3/_4a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.0360 | 1.1500 | 1.5100 |
| | 0.1 | 1.0360 | 1.1500 | 1.5100 |
| 0.70 | 0 | 1.2216 | 1.3209 | 1.5950 |
| | 0.1 | 1.2262 | 1.3325 | 1.6212 |
| 0.65 | 0 | 1.2501 | 1.3443 | 1.6024 |
| | 0.1 | 1.2582 | 1.3637 | 1.6431 |
| 0.30 | 0 | 1.466 | 1.638 | 2.144 |
| | 0.1 | 0.974 | 1.072 | 0.982 |
| 0.15 | 0 | 1.5406 | 1.7228 | 2.2557 |
| | 0.1 | 1.3112 | 1.4120 | 1.5859 |
| 0.20 | 0 | 1.5190 | 1.6986 | 2.2241 |
| | 0.1 | 1.1049 | 1.4075 | 1.1975 |
| 0.25 | 0 | 2.4978 | 1.6749 | 2.193 |
| | 0.1 | 1.0345 | 1.2437 | 1.081 |

Поступила 9 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Odqvist F. Engineering theories of metallic creep, Memorie Symposium la plasticita nella scienza della costruzioni in onore d. A. Danusso, Bologna, 1956.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10, 81—91.
3. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5, 901—924.
4. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3, 413—416.
5 Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.