Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

О ФОРМАХ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПЕРВОНАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ НЕУПРУГИХ ТЕЛАХ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ВОПРОСА)

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Теорию тензоров, зависящих от одного скалярного аргумента, можно назвать теорией тензорных кривых. Ниже излагаются некоторые свойства таких кривых, причем имея в виду применение результатов к проблемам механики сплошных сред (в частности, к вопросу о связи между напряжениями и деформациями в неупругих твердых телах), приводится рассмотрение только трехмерных симметричных тензоров второго ранга. Для простоты вида формул компоненты тензоров задаются в ортогональных декартовых системах координат.

§ 1. Трехмерный симметричный тензор второго ранга как элемент шестимерного пространства. Рассмотрим множество трехмерных симметричных тензоров второго ранга

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \qquad T_{ij} = T_{ji} \tag{1.1}$$

Оно образует шестимерное линейное метрическое пространство, в котором скалярное произведение его элементов A и B определено равенством

$$(AB) = A_{ij}B_{ij} \tag{1.2}$$

Норма порождается скалярным произведением, т. е.

$$\| A \| = \sqrt{A_{ij}A_{ij}} \tag{1.3}$$

а расстояние между точками равно

$$\rho\,(AB) = \sqrt{(A_{ij} - B_{ij})\,(A_{ij} - B_{ij})} \tag{1.4}$$

Помимо этого элементы H_6 подчиняются условию

$$A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj} \in H_6 \tag{1.5}$$

вытекающему из правила умножения тензоров (совпадающего с правилом перемножения матриц).

Не будь этого последнего требования, компоненты произвольного тензора можно было бы занумеровать в любом порядке, например

$$T_{11} = T_1, \quad T_{22} = T_2, \quad T_{33} = T_3, \quad \sqrt{2}T_{12} = T_4$$
$$\sqrt{2}T_{13} = T_5, \quad \sqrt{2}\,T_{23} = T_6 \tag{1.6}$$

и рассматривать затем T_j как компоненты вектора в шестимерном эвклидовом пространстве. Однако условие (1.5) исключает эту возможность и заставляет рассматривать H_6 как специального вида пространство (пространство симметричных тензоров второго ранга), основным свойствам которого и будут посвящены первые четыре параграфа работы.

Шестимерность H_6 вытекает из того, что любой трехмерный симметричный тензор второго ранга может быть представлен в виде (см., например, [1])

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^{6} t_{(m)} h_{ij}^{(m)} \tag{1.7}$$

где $h_{ij}^{(m)}$ суть шесть произвольно выбранных линейно независимых трехмерных тензоров второго ранга, а $t_{(m)}$ — шесть инвариантных коэффициентов. Выражение (1.7) будем называть разложением T_{ij} в тензорном базисе $h_{ij}^{(m)}$, а $t_{(m)}$ составляющими T_{ij} по тензорам этого базиса.

Определение $t_{(m)}$ при заданных T_{ij} и $h_{ij}^{(m)}$ сводится, вообще говоря, к решению системы из шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными. Эта задача, однако, весьма упрощается, если считать, что базис $h_{ij}^{(m)}$ ортонормирован, т. е. что

$$h_{ij}^{(m)} h_{ij}^{(n)} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{1.8}$$

При этом $t_{(m)}$ непосредственно определяются формулами

$$t_{(m)} = T_{ij} h_{ij}^{(m)} \tag{1.9}$$

Очевидно, что любые шесть симметричных взаимно ортогональных тензоров второго ранга линейно независимы, т. е. образуют базис. Действительно, умножив выражение

$$\sum_{m=1}^{6} \alpha_{(m)} h_{ij}^{(m)} = 0 \tag{1.10}$$

скалярно на все $h_{ij}^{(m)}$ (последовательно), получим, что $\alpha_{(m)} = 0$. Столь же очевидно, что не может быть отличного от нуля тензора, ортогонального ко всем базисным тензорам. Это вытекает из (1.9), согласно которой все составляющие тензора, ортогонального к базисным тензорам, равны нулю. В дальнейшем будем считать базисные тензоры ортонормированными (если противное не будет специально оговорено).

Рассмотрим наряду с $h_{ij}^{(m)}$ другой базис $\check{h}_{ij}^{(m)}$ и представим его тензоры в виде разложений по тензорам первого базиса (и наоборот)

$$\check{h}_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{6} \lambda_{(nm)} h_{ij}^{(m)}, \qquad h_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{6} \lambda_{(mn)} \check{h}_{ij}^{(m)} \tag{1.11}$$

Из (1.8) и аналогичных им равенств

$$\check{h}_{ij}^{(m)} \check{h}_{ij}^{(n)} = \delta_{mn} \tag{1.12}$$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{6} \lambda_{(mk)} \lambda_{(kn)} = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{(km)} \lambda_{(kn)} = \delta_{mn} \tag{1.13}$$

т. е. коэффициенты $\lambda_{(mn)}$ обладают свойствами, идентичными свойствам косинусов углов между осями двух взаимно ортогональных декартовых систем координат в шестимерном эвклидовом пространстве.

Так как

$$h_{ij}^{(m)}\,\delta_{ij} = h_{ii}^{(m)} = (h_m) \tag{1.14}$$

то разложение единичного тензора по тензорам произвольного ортонормированного базиса имеет вид:

$$\delta_{ij} = \sum_{m=1}^{6} (h_m)\, h_{ij}^{(m)} \tag{1.15}$$

Умножив это равенство скалярно на δ_{ij}, находим

$$\sum_{m=1}^{6} (h_m)^2 = 3 \tag{1.16}$$

Данное соотношение связывает линейные инварианты тензоров ортонормированного базиса и позволяет выразить один из них через пять остальных.

Возведем первое из равенств (1.11) в квадрат (в тензорном смысле). Тогда будем иметь

$$\check{h}_{ik}^{(m)}\,\check{h}_{kj}^{(m)} = \sum_{p=1}^{6}\sum_{q=1}^{6} \lambda_{(mp)}\,\lambda_{(mq)}\,h_{ik}^{(p)}\,h_{kj}^{(q)} \tag{1.17}$$

Просуммировав (1.17) по всем m с учетом (1.13), получаем

$$\sum_{m=1}^{6} h_{ik}^{(m)}\,h_{kj}^{(m)} = \sum_{m=1}^{6} \check{h}_{ik}^{(m)}\,\check{h}_{kj}^{(m)} = C_{ij} \tag{1.18}$$

где C_{ij} — постоянный симметричный тензор второго ранга, одинаковый для всех ортонормированных тензорных базисов. Ввиду изотропии трехмерного эвклидова пространства (отсутствия в нем предпочтительных направлений) данный тензор может быть только шаровым, т. е.

$$C_{ij} = C\,\delta_{ij} \tag{1.19}$$

Подставив (1.19) в (1.18) и произведя свертывание по индексам i, j (с учетом нормированности базисных тензоров), находим, что инвариантный коэффициент $C = 2$. Таким образом, окончательно

$$\sum_{m=1}^{6} h_{ik}^{(m)}\,h_{kj}^{(m)} = 2\delta_{ij} \tag{1.20}$$

Формулы (1.20) и (1.16) выражают основное тензорное и основное скалярное свойства ортонормированных тензорных базисов. Пользуясь ими, можно выразить любой из тензоров базиса через пять остальных и единичный тензор δ_{ij}.

Действительно, пусть заданы пять ортонормированных тензоров $h_{ij}^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4, 5$). Тогда в силу (1.20) можно написать

$$h_{ik}\,h_{kj} = \Phi_{ij} \tag{1.21}$$

где $h_{ij} = h_{ij}^{(6)}$ есть искомый шестой тензор базиса, а

$$\Phi_{ij} = 2\delta_{ij} - \sum_{m=1}^{5} h_{ik}^{(m)}\,h_{kj}^{(m)}, \qquad \Phi_{ii} = (\Phi) = 1 \tag{1.22}$$

есть известный тензор. Возведем равенство (1.21) в квадрат

$$h_{ik}h_{kp}h_{pq}h_{qj} = \Phi_{ik}\Phi_{kj}, \tag{1.23}$$

и воспользуемся для его преобразования теоремой Гамильтона—Кэйли, согласно которой (см., например, [2], стр. 108) (1.24)

$$h_{ik}h_{kp}h_{pq}h_{qj} = (h)\left[\frac{1}{6}(h)^3 - \frac{1}{2}(h) + \frac{1}{3}(h^3)\right]\delta_{ij} + \frac{1}{3}\left[(h^3) - (h)^3\right]h_{ij} + \frac{1}{2}\left[1 + (h)^2\right]h_{ik}h_{kj}$$

где

$$(h) = h_{ii}, \qquad (h^2) = h_{ij}h_{ij} = 1, \qquad (h^3) = h_{ik}h_{kj}h_{ij}$$

Подставив (1.24) в (1.23) и учтя (1.21), находим (1.26)

$$[(h^3) - (h^3)]\,h_{ij} = 3\Phi_{ik}\Phi_{kj} - \frac{3}{2}\left[1 + (h)^2\right]\Phi_{ij} - (h)\left[\frac{1}{2}(h)^3 - \frac{3}{2}(h) + (h^3)\right]\delta_{ij}$$

Входящий сюда первый инвариант $h_{ii} = (h)$ с точностью до знака определяется из равенства (1.16). Что же касается инварианта (h^3), то для него, после умножения (1.26) скалярно на δ_{ij}, получим следующее выражение через известные величины

$$(h^3) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(h)}\left[(\Phi^2) - \frac{1}{2} + (h)^2 - \frac{1}{6}(h)^4\right] \tag{1.27}$$

Тем самым формула (1.26) может рассматриваться как определение (с точностью до знака) тензора h_{ij} по пяти заданным ортонормированным тензорам $h_{ij}^{(m)}$.

Исключение составляет случай, когда, согласно (1.16), получается, что $(h) = 0$. При этом (1.26) принимает вид

$$(h^3)\,h_{ij} = 3\Phi_{ik}\Phi_{kj} - \frac{3}{2}\Phi_{ij} \tag{1.28}$$

и рассуждать надо несколько иначе.

Перемножив скалярно равенства (1.21) и (1.28), имеем

$$(h^3)^2 = 3(\Phi^3) - \frac{3}{2}(\Phi^2) = 3\left[(\Phi^3) - \frac{1}{4}\right] \tag{1.29}$$

Введя это выражение (h^3) в (1.29), приходим к формуле, определяющей h_{ij} через заданные тензоры, в том частном случае, когда h_{ij} оказывается девиатором

$$h_{ij} = \pm\sqrt{3}\,\frac{\Phi_{ik}\Phi_{kj} - {}^1/_2\Phi_{ij}}{\sqrt{(\Phi^3) - {}^1/_4}} \tag{1.30}$$

В [3] было показано, что у любого девиатора D_{ij} инварианты $D_{ij}D_{ij} = (D^2)$, $D_{ik}D_{kj}D_{ij} = (D^3)$ подчиняются неравенствам

$$-1 \leqslant \sqrt{6}\,\frac{(D^3)}{(D^2)^{3/2}} \leqslant 1 \tag{1.31}$$

Отсюда с учетом того, что, согласно (1.26), при $(h) = 0$ $(\Phi^2) = {}^1/_2$, можно вывести

$$(\Phi^3) - \frac{1}{4} \geqslant 0 \tag{1.32}$$

и, следовательно, радикал, входящий в (1.30), всегда веществен. Таким образом, задача отыскания нормированного тензора, ортогонального к пяти ортонормированным тензорам, всегда имеет решение.

§ 2. О подпространствах в H_6. Отправляясь от произвольного ортонормированного базиса $h_{ij}^{(m)}$, можно выделить из H_6 два взаимноортогональных подпространства H_n и H_{6-n}. К первому будут относиться все тензоры, представимые в виде

$$T_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} t_{(k)}^{(1)}\,h_{ij}^{(k)} \tag{2.1}$$

а ко второму все тензоры, представимые в виде

$$T_{ij}^{(2)} = \sum_{k=n+1}^{6} t_{(k)}^{(2)}\,h_{ij}^{(k)} \tag{2.2}$$

Тензоры $h_{ij}^{(m)}$ $(m \leqslant n)$ образуют ортонормированный базис в H_n, а тензоры $h_{ij}^{(m)}$ $(m \geqslant n+1)$ образуют ортонормированный базис в H_{6-n}.

Преобразование одного ортонормированного базиса в другой в H_n и H_{6-n} осуществляется по формулам

$$\check{h}_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{(mk)}^{(1)} h_{ij}^{(k)}, \qquad \check{h}_{ij}^{(m)} = \sum_{k=n+1}^{6} \lambda_{(mk)}^{(2)} h_{ij}^{(k)} \tag{2.3}$$

причем коэффициенты $\lambda_{(mk)}^{(1)}$, $\lambda_{mk}^{(2)}$ подчиняются равенствам

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{(pk)}^{(1)} \lambda_{(qk)}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{(kp)}^{(1)} \lambda_{(kq)}^{(1)} = \delta_{pq} \\ \sum_{k=n+1}^{6} \lambda_{(pk)}^{(2)} \lambda_{(qk)}^{(2)} = \sum_{k=n+1}^{6} \lambda_{(kp)}^{(2)} \lambda_{(kq)}^{(2)} = \delta_{pq} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Разумеется, возможно разделение H_6 и на большее число взаимно ортогональных подпространств. При этом любой элемент H_6 может быть представлен в виде суммы элементов, принадлежащих взаимно ортогональным подпространствам, общее число измерений которых равно шести. Рассмотрим свойства некоторых подпространств.

2.1. Девиаторное подпространство D_5. Выберем коэффициенты преобразования λ_{6m} в (1.11) так, чтобы

$$\lambda_{6m} = \frac{1}{\sqrt{3}} (h_m) \tag{2.5}$$

тогда, согласно (1.15), (1.16)

$$\check{h}_{ij}^{(6)} = \check{h}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} = \delta_{ij}^{(*)} \tag{2.6}$$

т. е. шестой тензор базиса $\check{h}_{ij}^{(m)}$ будет нормированным шаровым тензором

$$\delta_{ij}^{(*)} \delta_{ij}^{(*)} = 1, \qquad \delta_{ii}^{(*)} = \sqrt{3} \tag{2.7}$$

Остальные пять тензоров $d_{ij}^{(m)} = \check{h}_{ij}^{(m)}$ $(m = 1, 2, 3, 4, 5)$ ввиду условий

$$d_{ij}^{(m)} \delta_{ij}^{(*)} = d_{ij}^{(m)} \delta_{ij} = d_{ii}^{(m)} = 0$$

оказываются девиаторами.

Используя тензоры $d_{ij}^{(m)}$, δ_{ij}, можно разбить H_6 на два взаимно ортогональных подпространства: одномерное $\delta_{ij}^{(*)}$ (подпространство шаровых тензоров) и пятимерное D_5, все тензоры которого суть девиаторы.

Отсюда вытекает, что любой девиатор может быть представлен в виде

$$D_{ij} = \sum_{m=1}^{5} D_{(m)} d_{ij}^{(m)} \tag{2.8}$$

где $d_{ij}^{(m)}$ — пять ортонормированных девиаторов. Шестимерный базис $\delta_{ij}^{(*)}$, $d_{ij}^{(m)}$ подчиняется равенству (1.20) и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{5} d_{ik}^{(m)} d_{kj}^{(m)} = \frac{5}{3} \delta_{ij} \tag{2.9}$$

Эта формула позволяет выразить любой из пяти ортонормированных девиаторов (например, $d_{ij}^{(5)} = d_{ij}$) через четыре остальных и δ_{ij}. Соответствующие выкладки уже были даны в конце предыдущего параграфа.

Они приводят к формуле (1.30), в которой под Φ_{ij} в данном случае надо подразумевать

$$\Phi_{ij} = \frac{5}{3}\delta_{ij} - \sum_{m=1}^{4} d_{ik}^{(m)} d_{kj}^{(m)} \tag{2.10}$$

Следует подчеркнуть, что пятимерное девиаторное пространство D_5 не имеет ничего общего с пятимерным векторным пространством, рассматривавшимся в работах [4,5] и др.

В цитированных работах на декартовых осях пятимерного пространства откладываются некоторые линейные комбинации компонентов тензоров в декартовой системе координат трехмерного пространства. Эти линейные комбинации трактуются затем как компоненты пятимерных векторов. Последнее приводит, однако, к тому, что операции в пятимерном пространстве утрачивают инвариантный характер и, как правило, имеют смысл только при одновременном фиксировании определенных систем координат как в трехмерном, так и в пятимерном пространствах. Последнее видно уже из формулировки теоремы (1) в [4]. Подробности см. в [6-9].

2.2. Подпространство девиаторов, имеющих одно общее главное направление. Осесимметричным назовем тензор $\Omega_{ij} \in H_6$, у которого равны два его главных значения. Для такого тензора вполне определенным является лишь одно из главных направлений, каковое будем называть его осью.

Если нормированный девиатор осесимметричен, то он подчиняется равенству

$$\Omega_{ij} = \pm\sqrt{6}\left[\Omega_{ik}\Omega_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right] \tag{2.11}$$

где верхний знак относится к случаю, когда Ω_{ij} — девиатор типа растяжения, а нижний когда Ω_{ij} типа сжатия. Формулу (2.11) можно проверить, если ее отнести к главным осям Ω_{ij} и учесть, что

$$\Omega_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \Omega_2 = \Omega_3 = \mp\frac{1}{\sqrt{6}} \tag{2.12}$$

В дальнейшем, для определенности, под обозначением Ω_{ij} будем подразумевать нормированные девиаторы типа растяжения. Из (2.11) вытекает, что для таких девиаторов

$$(\Omega^3) = \Omega_{ik}\Omega_{kj}\Omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{2.13}$$

Если имеется произвольный нормированный девиатор c_{ij}, то он может быть связан с Ω_{ij}, ось которого совпадает с одним из главных направлений c_{ij}, формулой

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{6}\,(c^2 - 1/6)}\left[c c_{ij} + c_{ik}c_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right] \tag{2.14}$$

где c — главное значение c_{ij}, соответствующее оси Ω_{ij}. Равенство (2.14) можно проверить, отнеся его к главным осям c_{ij}.

Из (2.14) следует, что, если два нормированных девиатора $c_{ij}^{(1)}$ и $c_{ij}^{(2)}$ имеют одно общее главное направление, то между ними существует зависимость

$$\frac{1}{c_1^2 - 1/6}\left[c_1 c_{ij}^{(1)} + c_{ik}^{(1)} c_{kj}^{(1)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right] = \frac{1}{c_2^2 - 1/6}\left[c_2 c_{ij}^{(2)} + c_{ik}^{(2)} c_{kj}^{(2)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right] \tag{2.15}$$

где c_1, c_2 суть главные значения $c_{ij}^{(1)}$, $c_{ij}^{(2)}$, соответствующие их общему главному направлению.

Выясним условия ортогональности девиаторов $c_{ij}^{(1)}$ и $c_{ij}^{(2)}$. Таблица конусов углов между их главными осями имеет вид:

	$c_1^{(2)}$	$c_2^{(2)}$	$c_3^{(2)} = c_2$
$c_1^{(1)}$	$\cos\gamma_{12}$	$\sin\gamma_{12}$	0
$c_2^{(2)}$	$-\sin\gamma_{12}$	$\cos\gamma_{12}$	0
$c_3^{(1)} = c_1$	0	0	1

Здесь γ_{12} — угол между главными осями $c_1^{(1)}$ и $c_1^{(2)}$. Отсюда составляющие тензора $c_{ij}^{(2)}$ по главным осям $c_{ij}^{(1)}$ выражаются формулами

$$c_{11}^{(2)} = c_1^{(2)} \cos^2\gamma_{12} + c_2^{(2)} \sin^2\gamma_{12} \qquad (2.16)$$

$$c_{22}^{(2)} = c_1^{(2)} \sin^2\gamma_{12} + c_2^{(2)} \cos^2\gamma_{12} \qquad (2.17)$$

$$c_{33}^{(2)} = c_3^{(2)} = c_2$$

Подчиняя (2.17) требованию $c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)} = 0$, приходим к формуле

$$\cos 2\gamma_{12} = -\alpha_1\alpha_2 \qquad \left(\alpha_k = \sqrt{3}\,\frac{c_1^{(k)} + c_2^{(k)}}{c_1^{(k)} - c_2^{(k)}}\right) \qquad (2.18)$$

Если $c_{ij}^{(1)}$ и $c_{ij}^{(2)}$ нормированы, то

$$\alpha_k = -\sqrt{3}\,\frac{c_3^{(k)}}{\sqrt{2-3\,(c_3^{(k)})^2}} = -\sqrt{3}\,\frac{c_k}{\sqrt{2-3c_k^2}} \qquad (2.19)$$

Как видно из (2.18), существует бесчисленное множество нормированных девиаторов $c_{ij}^{(2)}$, имеющих одно общее главное направление с заданным нормированным девиатором $c_{ij}^{(1)}$ и к нему ортогональных. Рассмотрим произвольную пару таких тензоров и попытаемся подобрать к ним еще один нормированный девиатор, ортогональный к ним обоим и имеющий с ними общее главное направление. Тогда, помимо (2.18), будем иметь еще два аналогичных равенства

$$\cos 2\gamma_{13} = -\alpha_1\alpha_3, \quad \cos 2\gamma_{23} = -\alpha_2\alpha_3 \qquad (\gamma_{23} = \gamma_{12} - \gamma_{13}) \qquad (2.20)$$

Используя (2.18) и (2.20), получим

$$\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 = 1 - 2\,\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \qquad (2.21)$$

Отсюда

$$\alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{1-\alpha_1^2\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1^2\alpha_2^2}} \qquad (2.22)$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что перемена знака перед α_3 равносильна перемене знака перед $c_{ij}^{(3)}$. Тем самым оказывается, что каждой паре ортонормированных девиаторов $c_{ij}^{(1)}$, $c_{ij}^{(2)}$, имеющих общее главное направление, соответствует единственный (с точностью до знака) ортогональный к ним обоим и имеющий с ними общее главное направление нормированный девиатор $c_{ij}^{(3)}$. Из изложенного также вытекает, что в любом девиаторном базисе $d_{ij}^{(m)}$ не более трех его тензоров могут иметь одно общее главное направление.

Относительно множества $D_3^{(*)}$ девиаторов, имеющих одно общее главное направление $\Omega_{ij}^{(*)}$, справедливы следующие утверждения:

а) любая линейная комбинация таких девиаторов $c_{ij} \in D_3{}^*$,

б) всякие четыре девиатора, имеющие общее главное направление линейно зависимы, в) любой $c_{ij} \in D_3{}^*$ представим в виде

$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{3} c_{(m)}\, c_{ij}^{(m)} \tag{2.23}$$

где $c_{ij}^{(m)}$ — три ортонормированных девиатора из $D_3{}^*$,

г) из (а), (б), (в) следует, что каждое множество $D_3{}^*$ является трехмерным подпространством D_5 и H_6.

д) всякому осесимметричному девиатору Ω_{ij} может быть сопоставлено некоторое $D_3{}^*$. Его элементами будут все девиаторы, имеющие общее главное направление, совпадающее с осью $\Omega^*{}_{ij}\,(\Omega^*)$,

е) любой симметричный тензор второго ранга, образованный путем перемножения элементов какого-либо $D_3{}^*$, как, например

$$c_{ik}^{(1)} c_{kj}^{(1)}, \qquad c_{ik}^{(1)} c_{kj}^{(2)} + c_{ik}^{(2)} c_{kj}^{(1)}, \qquad c_{ik}^{(1)} c_{kp}^{(1)} c_{pj}^{(2)} + c_{ik}^{(2)} c_{kp}^{(1)} c_{pj}^{(1)}, \ldots \tag{2.24}$$

имеет главное направление, совпадающее с Ω^*.

Преобразование одного ортонормированного базиса $c_{ij}^{(m)}$ в другой $\check{c}_{ij}^{(m)}$ осуществляется по формулам

$$\check{c}_{ij}^{(m)} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_{(mn)}\, c_{ij}^{(n)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{3} \lambda_{mk} \lambda_{nk} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{km} \lambda_{kn} = \delta_{mn}\right) \tag{2.25}$$

Из (2.25) следует, что

$$\sum_{m=1}^{3} c_{ik}^{(m)} c_{kj}^{(m)} = \sum_{m=1}^{3} \check{c}_{ik}^{(m)} \check{c}_{kj}^{(m)} = A_{ij} \tag{2.26}$$

где A_{ij} — тензор, остающийся инвариантным при любых преобразованиях (2.25) в соответствующем $D_3{}^*$.

Путем элементарных выкладок можно установить, что всякий сдвиговой девиатор S_{ij} (т. е. такой тензор, у которого главные значения суть $S_1 = -S_2$, $S_3 = 0$) ортогонален к осесимметричному тензору Ω_{ij}, если ось последнего перпендикулярна плоскости сдвига. С другой стороны, согласно (2.18) два сдвиговых девиатора $S_{ij}^{(1)}$, $S_{ij}^{(2)}$ (с общей плоскостью сдвига) ортогональны, если угол между их главными направлениями $\gamma_{12} = {}^1/_4\pi$. Отсюда простейшей совокупностью ортонормированных девиаторов, имеющих общее главное направление Ω^*, являются $\Omega_{ij}{}^*$ и два взаимно ортогональных нормированных девиатора сдвигового типа $S_{ij}^{(1)}$, $S_{ij}^{(2)}$, плоскость сдвига которых перпендикулярна к Ω^*. Используя этот простейший базис, можно определить A_{ij}.

При этом надо учесть, что, согласно (2.14)

$$S_{ik}^{(1)} S_{kj}^{(1)} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij} = S_{ik}^{(2)} S_{kj}^{(2)} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,\Omega_{ij}^* \tag{2.27}$$

Положив в (2.27)

$$c_{ij}^{(1)} = \Omega_{ij}{}^*, \quad c_{ij}^{(2)} = S_{ij}^{(1)}, \quad c_{ij}^{(3)} = S_{ij}^{(2)} \tag{2.28}$$

находим

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\Omega_{ij}{}^* \tag{2.29}$$

Представим Ω^*_{ij} в виде разложения по базисным девиаторам $c_{ij}^{(m)}$

$$\Omega_{ij}^* = \sum_{m=1}^{3} \Omega_{(m)} c_{ij}^{(m)}, \qquad \Omega_{(m)} = \Omega_{ij}^* c_{ij}^{(m)} \tag{2.30}$$

Но, согласно (2.14)

$$\sqrt{6}\,\Omega_{(m)} = \frac{1}{c_m^2 - {}^1/_6}\left[c_m + (c_m^3)\right] \tag{2.31}$$

На основании теоремы Гамильтона — Кэйли

$$c_m^3 = \frac{1}{2} c_m + \frac{1}{3}(c_m^3) \tag{2.32}$$

Отсюда

$$\Omega_{(m)} = \sqrt{{}^3/_2}\, c_m \tag{2.33}$$

Тем самым

$$\Omega_{ij}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{3} c_m c_{ij}^{(m)} \tag{2.34}$$

Следствием из данной формулы является равенство

$$\sum_{m=1}^{3} c_m^2 = \frac{2}{3} \tag{2.35}$$

Подставив (2.34) в (2.29), а (2.29) затем в (2.26), получим уравнение

$$\sum_{m=1}^{3}\left[c_{ik}^{(m)} c_{kj}^{(m)} + \frac{1}{2} c_m c_{ij}^{(m)}\right] = \delta_{ij} \tag{2.36}$$

связывающее три ортонормированных девиатора, имеющих общее главное направление. Это уравнение (в совокупности с (2.35)) позволяет выразить один из таких девиаторов через два других и δ_{ij} (с точностью до знака).

Не будем, однако, на этом останавливаться, поскольку аналогичные выкладки уже были показаны в § 1.

2.3. Подпространство соосных девиаторов. Если два девиатора a_{ij}, b_{ij} соосны, то они, как известно, связаны равенством

$$b_{ij} = A_1 a_{ij} + A_2\left[a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3}(a^2)\delta_{ij}\right] \tag{2.37}$$

где A_1, A_2 — скалярные коэффициенты, которые могут быть выражены через инварианты девиаторов a_{ij}, b_{ij} (см., например, [3]).

Считая, что a_{ij}, b_{ij} нормированы и взаимно ортогональны, получаем

$$b_{ij} = \pm\left[\operatorname{tg}\gamma\, a_{ij} - \sqrt{6}\sec\gamma\,\left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\right] \tag{2.38}$$

где

$$\sin\gamma = \sqrt{6}\,(a^3) = \sqrt{6}\, a_{ik} a_{kj} a_{ij} \tag{2.39}$$

Заметим, что для любого девиатора справедливо неравенство (1.32), а следовательно, для нормированных девиаторов

$$-1 \leqslant \sqrt{6}\,(a^3) \leqslant 1 \tag{2.40}$$

Тем самым всякому нормированному девиатору a_{ij} соответствует единственный (с точностью до знака) соосный и ортогональный ему нормированный девиатор b_{ij}. Исключение составляет случай

$$\sin\gamma = \pm 1, \qquad (a^3) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \tag{2.41}$$

При этом a_{ij} оказывается осесимметричным девиатором и подчиняется равенству (2.11), ввиду чего правая часть (2.33) становится неопределенностью типа $0/0$. Эта неопределенность раскрыта быть не может. Дело в том, что в данном случае имеется бесчисленное множество девиаторов соосных и ортогональных к a_{ij}. Ими будут все девиаторы сдвигового типа, у которых плоскость сдвига перпендикулярна оси a_{ij}, см. 2.2. Однако любая пара таких девиаторов не будет одна другой соосной. Поэтому хотя в данном случае и существует произвол в выборе нормированного девиатора, соосного и ортогонального к a_{ij}, однако утверждение, что не существует трех взаимно ортогональных нормированных соосных девиаторов, остается в силе.

Относительно множества D_2^* соосных девиаторов справедливы утверждения:

1. Любая линейная комбинация таких девиаторов $A_{ij}^* \in D_2^*$.

2. Любой мультипликативный тензор, составленный из таких девиаторов, соосен элементам D_2^*.

3. Всякое D_2^* является двухмерным подпространством в H_6 и D_5, а также подпространством в любом D_3^*, у которого Ω^* совпадает с одним из главных направлений девиаторов, принадлежащих рассматриваемому D_2^*.

§ 3. О числе тензоров, достаточном для образования базиса в H_6. Базис в H_6 состоит из шести линейно независимых симметричных тензоров второго ранга. Однако нелинейные зависимости между базисными тензорами не исключаются. В связи с этим возникает вопрос о наименьшем числе тензоров, достаточном для образования базиса. Попутно затронем и вопрос образования тензорных базисов из векторов.

3.1. Диадные базисы. Рассмотрим множество Λ трехмерных симметричных тензоров второго ранга, имеющих вид

$$g_{ij} = э_i e_j + э_j e_i \tag{3.1}$$

где $э_i$, e_i — два произвольных трехмерных вектора. Инварианты g_{ij} выражаются через инварианты векторов $э_i$, e_i следующим образом:

$$g_{ii} = (g) = 2эe\cos\varphi, \qquad g_{ij}g_{ij} = (g^2) = 2э^2e^2(1+\cos^2\varphi) \tag{3.2}$$
$$g_{ik}g_{kj}g_{ij} = (g^3) = 2э^3e^3(3+\cos^2\varphi)\cos\varphi$$

где

$$э = \sqrt{э_i э_i}, \qquad e = \sqrt{e_i e_i}, \qquad \cos\varphi = \frac{э_i e_i}{эe} \tag{3.3}$$

Из (3.2) вытекает, что в форме (3.1) представимы лишь такие симметричные тензоры второго ранга, у которых инварианты подчиняются соотношению

$$2(g^3) = (g)[3(g^2) - (g)^2] \tag{3.4}$$

Положив здесь $(g) = 0$, получаем $(g^3) = 0$, т. е. из всего множества девиаторов в диадной форме (3.1) представимы только тензоры сдвигового типа. Не могут быть выражены в форме (3.1) шаровые тензоры.

Множество Λ, будучи частью множества элементов, входящих в пространство H_6, не является его подпространством, поскольку $g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)}$, вообще говоря, не есть элемент Λ.

Взяв три взаимно ортогональных единичных вектора $э^{(1)}$, $э^{(2)}$, $э^{(3)}$, можно составить из них шесть симметричных тензоров второго ранга

$$g_{ij}^{(m)} = э_i^{(m)} э_j^{(m)}, \quad g_{ij}^{(3+m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [э_i^{(p)} э_j^{(q)} + э_i^{(q)} э_i^{(p)}] \tag{3.5}$$

где m, p, q принимают значения 1, 2, 3, причем $m \neq p \neq q$.

Отнеся тензоры (3.5) к осям, направления которых совпадают с $э^{(1)}$, $э^{(2)}$, $э^{(3)}$, легко установить, что

$$g_{ij}^{(k)} g_{ij}^{(l)} = \delta_{kl} \tag{3.6}$$

т. е. тензоры (3.5) образуют в H_6 ортонормированный диадный базис. Составляющие произвольного $T \in H_6$ по тензорам такого базиса равны

$$t_{(m)} = T_{mm}, \qquad t_{3+m} = \sqrt{2} T_{pq} \tag{3.7}$$

где T_{ij} — компоненты тензора T в декартовой системе координат, оси которой совпадают с $э^{(1)}$, $э^{(2)}$, $э^{(3)}$. Если $э^{(m)}$ неортогональны, то утрачивают взаимную ортогональность и $g_{ij}^{(k)}$ (3.5). Тем не менее и в этом случае они остаются линейно независимыми (при условии, что $э^{(m)}$ не компланарны) и могут быть использованы в качестве шести базисных тензоров.

В монографии [1] последовательно проведено представление тензоров любого ранга в виде разложений по мультипликативным тензорам, образованным из базисных векторов (в частности, по диадам, если рассматривается тензор второго ранга), причем используются как ортогональные, так и неортогональные тензорные базисы. Это представление весьма удобно при дифференцировании тензоров, отнесенных к подвижным системам координат.

3.2. Базисы, образованные из мультипликативных тензоров второго ранга. Очевидно, что нельзя сконструировать базис в H_6, имея всего лишь один симметричный тензор a_{ij}. Действительно, из этого тензора может быть построен единственный, вообще говоря, линейно от него независимый, симметричный тензор $a_{ik}a_{kj}$. Всякий другой мультипликативный тензор, как, например, $a_{ik}a_{kp}a_{pj}$, $a_{ik}a_{kp}a_{pq}a_{qj} \ldots$ ввиду теоремы Гамильтона — Кэйли, выражается через δ_{ij}, a_{ij}, $a_{ik}a_{kj}$. Поэтому число тензоров, необходимое для образования базиса, не может быть меньше двух.

Выясним достаточность этого количества.

Пусть имеются два линейно независимых тензора a_{ij}, b_{ij}. Из них можно построить следующие шесть симметричных тензоров:

$$\begin{gathered} a_{ik}a_{kj}, \quad b_{ik}b_{kj}, \quad a_{ik}b_{kj} + b_{ik}a_{kj}, \quad a_{ik}a_{kp}b_{pj} + b_{ik}a_{kp}a_{pj} \\ b_{ik}b_{kp}a_{pj} + a_{ik}b_{kp}b_{pj}, \quad a_{ik}a_{kp}b_{pq}b_{qj} + b_{ik}b_{kp}a_{pq}a_{q} \end{gathered} \tag{3.8}$$

Все прочие мультипликативные симметричные тензоры второго ранга, образованные из a_{ij} и b_{ij}, будут выражаться через девять тензоров δ_{ij},

a_{ij}, b_{ij} и (3.8) на основании теоремы Гамильтона — Кэйли, обобщенной на случай двух тензоров [10]. Более того, можно утверждать, что и между упомянутыми девятью тензорами всегда имеются n линейных зависимостей, где n не менее трех, поскольку указанные девять тензоров являются элементами H_6.

Ясно, что при $n > 3$ образовать базис из этих девяти тензоров невозможно, так как среди них не будет шести линейно независимых. Нетрудно привести примеры, соответствующие данному случаю. В частности, если a_{ij} и b_{ij} имеют одно общее главное направление Ω^*, то и все образованные из них симметричные тензоры будут иметь это же самое главное направление. Они будут принадлежать четырехмерному подпространству D_3^*, δ_{ij}, и, следовательно, каждые пять из них будут линейно зависимыми (§ 2).

Тем самым, если у a_{ij}, b_{ij} совпадает хотя бы одно из главных направлений, построить тензорный базис из них нельзя. Более того, это невозможно и при задании трех таких тензоров. Если же у a_{ij}, b_{ij} нет ни одного общего главного направления, то, как это показано в [11], коэффициенты в выражении

$$\begin{aligned} T_{ij} = \alpha_0\delta_{ij} + \alpha_1 a_{ij} + \alpha_2 b_{ij} + \alpha_3 a_{ik}a_{kj} + \alpha_4 b_{ik}b_{kj} + \\ + \alpha_5 (a_{ik}b_{kj} + b_{ik}a_{kj}) + \alpha_6 (a_{ik}a_{kp}b_{pj} + b_{ik}a_{kp}a_{pj}) + \\ + \alpha_7 (b_{ik}b_{kp}a_{pj} + a_{ik}b_{kp}b_{pj}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

всегда могут быть выбраны так, чтобы равенство (3.9) выполнялось каков бы ни был тензор T_{ij}.

Последнее равносильно утверждению, что в рассматриваемом случае среди девяти тензоров δ_{ij}, a_{ij}, b_{ij} (3.8) всегда имеются шесть линейно независимых, из которых может быть образован базис в H_6.

Из вышеизложенного следуют два вывода:

1. Для построения базиса в H_6 достаточно иметь три трехмерных вектора, при условии, что они некомпланарны.

2. Для построения базиса в H_6 достаточно иметь два трехмерных симметричных тензора второго ранга, при условии, что они не имеют общего главного направления.

§ 4. Обобщение формул Серре—Френе. Рассмотрим тензор $R_{ij} \in H_6$, являющийся функцией одного скалярного параметра λ. Производная

$$\frac{dR_{ij}}{d\lambda} = r_{ij} \tag{4.1}$$

вообще говоря, не будет нормированным тензором. Однако, если перейти к новому аргументу

$$s = \int_0^\lambda \sqrt{\frac{dR_{ij}}{d\lambda}\frac{dR_{ij}}{d\lambda}}\, d\lambda \tag{4.2}$$

то тензор

$$\frac{dR_{ij}}{ds} = r_{ij}^{(1)} \tag{4.3}$$

окажется нормированным.

Аргумент s, выбранный указанным образом, назовем длиной тензорной кривой R_{ij}, а $r_{ij}^{(1)}$ нормированным касательным тензором к ней. Составим, далее, следующую цепочку реккурентных формул

$$\frac{dr_{ij}^{(1)}}{ds} = \varkappa_1 r_{ij}^{(2)}, \qquad \frac{dr_{ij}^{(2)}}{ds} = -\varkappa_1 r_{ij}^{(1)} + \varkappa_2 r_{ij}^{(3)}$$

$$\frac{dr_{ij}^{(3)}}{ds} = -\varkappa_2 r_{ij}^{(2)} + \varkappa_3 r_{ij}^{(4)}, \ldots, \quad \frac{dr_{ij}^{(k)}}{ds} = -\varkappa_{k-1} r_{ij}^{(k-1)} + \varkappa_k r_{ij}^{(k+1)}, \ldots \tag{4.4}$$

В каждую из них входит один тензор и один скалярный коэффициент, которых нет в предыдущих формулах. Тем самым по существу формулы (4.4) будут определением тензоров $r_{ij}^{(k)}$ ($k \geqslant 2$) по заданному формулой (4.3) тензору $r_{ij}^{(1)}$.

Что же касается скалярных коэффициентов $\varkappa_k$, то их выберем так, чтобы все введенные тензоры были нормированными. Покажем, что при этом

$$r_{ij}^{(m)} r_{ij}^{(n)} = \delta_{mn} \tag{4.5}$$

т. е. что $r_{ij}^{(m)}$ не только нормированы, но и взаимно ортогональны.

Действительно, умножив первую из формул (4.4) скалярно на $r_{ij}^{(1)}$, получим

$$r_{ij}^{(1)} \frac{dr_{ij}^{(1)}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(1)}) = 0 = \varkappa_1 r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(2)} \tag{4.6}$$

Отсюда, если $\varkappa_1 \neq 0$, то

$$r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(2)} = 0 \tag{4.7}$$

Умножим, далее, вторую из формул (4.4) скалярно сначала на $r_{ij}^{(1)}$, а затем на $r_{ij}^{(2)}$. Тогда будем иметь

$$r_{ij}^{(1)} \frac{dr_{ij}^{(2)}}{ds} = \frac{d}{ds} (r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(2)}) - r_{ij}^{(2)} \frac{dr_{ij}^{(1)}}{ds} = -\varkappa_1 = -\varkappa_1 + \varkappa_2 r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(3)} \tag{4.8}$$

$$r_{ij}^{(2)} \frac{dr_{ij}^{(2)}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (r_{ij}^{(2)} r_{ij}^{(2)}) = 0 = \varkappa_2 r_{ij}^{(2)} r_{ij}^{(3)} \tag{4.9}$$

Отсюда, если $\varkappa_2 \neq 0$, то

$$r_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(3)} = r_{ij}^{(2)} r_{ij}^{(3)} = 0 \tag{4.10}$$

Путем совершенно аналогичных рассуждений приходим к выводу, что все входящие в (4.4) тензоры взаимно ортогональны. Но тогда данная цепочка формул не может продолжаться бесконечно; из того, что не существует более шести взаимно ортогональных симметричных тензоров второго ранга, следует, что она должна оборваться не позднее чем на шестой формуле, т. е. $\varkappa_6 = 0$ (хотя может обрываться в частных случаях и раньше).

Таким образом, для любой тензорной кривой в H_6 справедливы соотношения (4.11)

$$\frac{dr_{ij}^{(1)}}{ds} = \varkappa_1 r_{ij}^{(2)}, \quad \frac{dr_{ij}^{(2)}}{ds} = -\varkappa_1 r_{ij}^{(1)} + \varkappa_2 r_{ij}^{(3)}, \quad \frac{dr_{ij}^{(3)}}{ds} = -\varkappa_2 r_{ij}^{(2)} + \varkappa_3 r_{ij}^{(4)}$$

$$\frac{dr_{ij}^{(4)}}{ds} = -\varkappa_3 r_{ij}^{(3)} + \varkappa_4 r_{ij}^{(5)}, \quad \frac{dr_{ij}^{(5)}}{ds} = -\varkappa_4 r_{ij}^{(4)} + \varkappa_5 r_{ij}^{(6)}, \quad \frac{dr_{ij}^{(6)}}{ds} = -\varkappa_5 r_{ij}^{(5)}$$

представляющие собой обобщение формул Серре—Френе. Они позволяют определить для каждой тензорной кривой $R_{ij}(s)$ естественный репер $r_{ij}^{(m)}$, т. е. совокупность шести ортонормированных тензоров, в каждой точке кривой.

Если заданы параметры кривизны тензорной кривой

$$\varkappa_m = \varkappa_m(s) \qquad (m = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{4.12}$$

то (4.11) становятся системой из шести линейных уравнений в обыкновенных производных, неизвестными в которой являются тензоры $r_{ij}^{(m)}$. Общее решение ее может быть написано в виде

$$r_{ij}^{(m)} = \sum_{n=1}^{6} C_{ij}^{(n)} f_{(mn)} \tag{4.13}$$

где $C_{ij}^{(n)}$ — шесть постоянных тензоров, играющих роль констант интегрирования, а тридцать шесть скалярных функций $f_{(mn)}$ аргумента s суть произвольным образом выбранные частные решения следующих шести систем уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{df_{(1n)}}{ds} = \varkappa_1 f_{(2n)}, && \frac{df_{(2n)}}{ds} = -\varkappa_1 f_{(1n)} + \varkappa_2 f_{(3n)} \\
&\frac{df_{(3n)}}{ds} = -\varkappa_2 f_{(2n)} + \varkappa_3 f_{(4n)}, && \frac{df_{(4n)}}{ds} = -\varkappa_3 f_{(3n)} + \varkappa_4 f_{(5n)} \\
&\frac{df_{(5n)}}{ds} = -\varkappa_4 f_{(4n)} + \varkappa_5 f_{(6n)}, && \frac{df_{(6n)}}{ds} = -\varkappa_5 f_{(5n)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Если взять в качестве $f_{(mn)}$ частные решения систем (4.14), подчиняющиеся начальным условиям

$$f_{(mn)} = \delta_{mn} \quad \text{при } s = 0 \tag{4.15}$$

то окажется, что

$$C_{ij}^{(m)} = r_{ij}^{(m)}(0) \tag{4.16}$$

Тем самым при указанном выборе $f_{(mn)}$ тензорные константы $C_{ij}^{(m)}$ будут образовывать ортонормированный базис, совпадающий с «естественным репером» тензорной кривой в точке $s = 0$. Формулы (4.13) в данном частном случае могут трактоваться как преобразование этого постоянного базиса в «естественный репер», построенный в произвольной точке s.

В соответствии с этим при указанном выборе начальных значений для $f_{(mn)}$

$$\sum_{k=1}^{6} f_{(mk)} f_{(nk)} = \sum_{k=1}^{6} f_{(km)} f_{(kn)} = \delta_{mn} \tag{4.17}$$

Как уже упоминалось, цепочка (4.4) может обрываться и раньше, чем на шестой формуле.

Так, например, если $R_{ij}(s)$ является девиатором, то и все $r_{ij}^{(m)}$ тоже будут девиаторами. При этом цепочка (4.4) должна оборваться не позднее чем на пятой формуле, поскольку не существует более пяти ортонормированных девиаторов (§ 2). Таким образом, для девиаторных кривых (представляющих для дальнейшего наибольший интерес) всегда $\varkappa_5 = 0$, т. е. они являются частным видом пятимерных тензорных кривых, принадлежащих подпространству D_5. Если $R_{ij}(s)$ не только девиатор, но и сохраняет в процессе своего изменения одно из главных направлений Ω^*, то цепочка (4.4) должна оборваться на третьей формуле (т. е. $\varkappa_3 = 0$). Последнее вытекает из того, что не существует более трех ортонормированных девиаторов, имеющих одно общее главное направление (§ 2). Тензорные кривые этого класса будут, следовательно, частным видом трехмерных тензорных кривых. Если же в процессе изменения девиатор $R_{ij}(s)$ сохраняет все три своих главных направления, то (4.4) обрывается на второй формуле, так как не существует более двух соосных ортонормированных девиаторов. В этом случае $\varkappa_2 = 0$ и $R_{ij}(s)$ будет частным видом «плоской» (двумерной) тензорной кривой.

Сходство теории тензорных кривых с теорией векторных кривых очевидно. Но есть и некоторые различия между этими теориями. Например, формулы Серре—Френе для трехмерной векторной кривой в общем случае квадратур не имеют, а уравнения (4.11) всегда имеют квадратуру. Ею является выражение

$$\sum_{m=1}^{6} r_{ik}^{(m)} r_{kj}^{(m)} = A_{ij} = \text{const} \tag{4.18}$$

которое может быть получено путем тензорного умножения уравнений (4.11) на $r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \ldots, r_{ij}^{(6)}$ (соответственно) и суммирования затем всех уравнений. Необходимость существования квадратуры (4.18) является следствием (1.20).

§ 5. Некоторые приложения к вопросу о связи между напряжениями и деформациями в неупругих твердых телах. В физике часто встречаются проблемы, связанные с установлением зависимостей между векторными или тензорными кривыми. Классическим примером является второй закон механики Ньютона, который можно трактовать как изотропную связь между векторной кривой $\mathbf{r}(t)$ (траекторией материальной точки) и другой векторной кривой $\mathbf{F}(t)$ (силой).

На форму такого рода законов всегда налагаются некоторые ограничения геометрического характера, обусловленные конечномерностью пространства. Так, например, независимо от каких-либо физических соображений можно утверждать, что вектор силы представим в форме

$$\mathbf{F} = F_1\boldsymbol{\tau} + F_2\boldsymbol{\nu} + F_3\boldsymbol{\beta} \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ — единичные векторы касательной, нормали и бинормали к траектории, а F_1, F_2, F_3 — проекции силы на них.

Выражение (5.1) преобразуется к виду

$$\mathbf{F} = \frac{1}{v}\left(F_1 - F_2\frac{\dot v}{\sqrt{w^2 - \dot v^2}}\right)\dot{\mathbf{r}} + \frac{F_2}{\sqrt{w^2-\dot v^2}}\ddot{\mathbf{r}} + F_3\frac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{v\sqrt{w^2-\dot v^2}} \tag{5.2}$$

где

$$v = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}},\quad w = \sqrt{\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}}$$

Потребовав, чтобы правая часть (5.2) оставалась инвариантной при замене $\mathbf{r}$ на

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t \tag{5.3}$$

где $\mathbf{v}_0$ — постоянный вектор, т. е. предположив существование инерциальных систем отсчета, получим, что

$$\mathbf{F} = f\ddot{\mathbf{r}} \tag{5.4}$$

где f есть инвариант, который ввиду сделанного предположения может быть функцией любых инвариантов производных от вектора $\mathbf{r}$, кроме тех, в которые входит $\dot{\mathbf{r}}$. Если помимо этого потребовать, чтобы интеграл

$$\int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^{r_1} f\ddot{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1} f d(v^2) \tag{5.5}$$

зависел только от значений инвариантов движения в точках r_0 и r_1, то окажется, что $f = m = \text{const}$, и (5.4) станет общеизвестной формулировкой второго закона механики, а (5.5) окажется интегралом живой силы.

В изложенных рассуждениях есть две стороны — геометрическая и физическая. Первая позволяет сузить поиск возможных форм связи между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ до трехчленной формулы (5.2), исключив тем самым из рассмотрения все производные вектора r по времени, начиная с третьей. Вторая вводит две гипотезы, основанные на опыте, приводящие к существенному упрощению (5.2).

Из этого примера видно, что не приходится преувеличивать роль геометрических соображений при установлении связи между векторными (а следовательно, и между тензорными) кривыми. Решающее значение, разумеется, имеют соображения, основывающиеся на анализе физики рассматриваемого явления.

Тем не менее некоторую пользу может принести и предварительное исследование геометрической стороны проблемы.

Рассмотрим связь между тензором напряжения σ_{ij} и тензором деформации ε_{ij} в неупругих твердых телах, т. е. по существу вопрос о формулировке уравнений состояния для таких тел. В отличие от упругого тела в данном случае нет взаимного однозначного соответствия между σ_{ij} и ε_{ij} в каждый момент времени t. Однако (если фиксировать температурный режим процесса деформирования, считая его, например, изотермическим) можно утверждать, что задание тензорной кривой $\sigma_{ij}(t)$ однозначно определяет тензорную кривую $\varepsilon_{ij}(t)$. При этом в начальный момент времени $t = 0$ тело будем считать недеформированным ($\varepsilon_{ij}(0) = 0$) и свободным от напряжений ($\sigma_{ij}(0) = 0$). Кроме того, будем считать тело первоначально изотропным, полагая, что в уравнения состояния его материала не входят каких-либо иных тензоров, кроме σ_{ij}, ε_{ij} и их производных по времени.

Представим ε_{ij}, σ_{ij} в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}' + \tfrac{1}{3} e\delta_{ij} = E\text{э}_{ij} + \tfrac{1}{3} e\delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}' + \tfrac{1}{3}\sigma\delta_{ij} = Ss_{ij} + \tfrac{1}{3}\sigma\delta_{ij} \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$e = \varepsilon_{ii}, \qquad \sigma = \sigma_{ii}, \qquad E = \sqrt{\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}'}, \qquad S = \sqrt{\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'} \tag{5.7}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}'\sigma_{ij}'$ девиаторы тензоров деформации и напряжения, а нормированные тензоры э_{ij}, s_{ij} определяются формулами

$$\text{э}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}'}{E}, \qquad s_{ij} = \frac{\sigma_{ij}'}{S} \tag{5.8}$$

Выражения (5.6) представляют тензорные кривые $\varepsilon_{ij}(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ через их проекции на девиаторное пространство D_5 и одномерное пространство δ_{ij}. Пусть заданы $э_{ij}(t) = э_{ij}^{(1)}(t)$ и $E(t)$, $e(t)$, что, согласно (5.6), (5.7), равносильно заданию $\varepsilon_{ij}(t)$.

Следуя предыдущему параграфу, можно написать

$$\begin{aligned} &\dot{э}_{ij}^{(1)} = \varkappa_1 э_{ij}^{(2)}, \qquad \dot{э}_{ij}^{(2)} = -\varkappa_1 э_{ij}^{(1)} + \varkappa_2 э_{ij}^{(3)} \\ &\dot{э}_{ij}^{(3)} = -\varkappa_2 э_{ij}^{(2)} + \varkappa_3 э_{ij}^{(4)}, \qquad \dot{э}_{ij}^{(4)} = -\varkappa_3 э_{ij}^{(3)} + \varkappa_4 э_{ij}^{(5)} \\ &\dot{э}_{ij}^{(5)} = -\varkappa_4 э_{ij}^{(4)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $э_{ij}^{(m)}$ суть пять девиаторов, образующих в D_5 ортонормированный базис, являющийся «естественным репером» тензорной кривой

$$R_{ij}(t) = \int_0^t э_{ij}^{(1)}\, dt \tag{5.10}$$

Представим девиатор напряжения σ_{ij}' в виде разложения в данном репере

$$\sigma_{ij}' = \sum_{m=1}^{5} S_{(m)} э_{ij}^{(m)} \tag{5.11}$$

Так как тело считается первоначально изотропным, то коэффициенты в этом разложении могут быть функциями (или функционалами) только инвариантов тензоров ε_{ij} и σ_{ij} и их производных по времени.

Девиаторы $э_{ij}^{(m)}$ выражаются через ε_{ij}' и первые его четыре производных по времени. Поэтому (5.11) можно привести к виду

$$\sigma_{ij}' = \sum_{m=0}^{4} f_{(m)} \frac{d^m \varepsilon_{ij}'}{dt^m} \tag{5.12}$$

где $f_{(m)}$, как и $S_{(m)}$, — функции (или функционалы) от инвариантов тензоров σ_{ij}, ε_{ij} и их производных.

Таков, на первый взгляд, наиболее общий вид соотношений между напряжениями и деформациями в первоначально-изотропном теле. Однако легко привести примеры, показывающие недостаточную общность (5.12). Рассмотрим хотя бы случай одномерного деформирования

$$э_{ij}^{(1)} = э_{ij}^{(0)} = \mathrm{const}, \qquad \varepsilon_{ij}' = E(t)\, э_{ij}^{(0)} \tag{5.13}$$

Эта простейшая деформация характеризуется единственным девиатором $э_{ij}^{(0)}$. Из него, однако, может быть сконструирован еще один, вообще говоря, линейно от него независящий девиатор

$$э_{ik}^{(0)} э_{kj}^{(0)} - {}^1/_3 \delta_{ij}$$

Поэтому тензорная структура соотношений между девиаторами напряжения и деформации в данном случае должна иметь вид

$$\sigma_{ij}' = F_1 э_{ij}^{(0)} + F_2 [э_{ik}^{(0)} э_{kj}^{(0)} - {}^1/_3\, \delta_{ij}] = f_1 \varepsilon_{ij}' + f_2 [\varepsilon_{ik}' \varepsilon_{kj}' - {}^1/_3 E^2 \delta_{ij}] \tag{5.14}$$

где f_1, f_2 зависят от инвариантов ε, e, их производных по времени и от третьего инварианта девиатора ε_{ij}'.

Между тем для того же случая (5.12) дает всего лишь линейную зависимость

$$\sigma_{ij}' = f_1 \varepsilon_{ij}' \tag{5.15}$$

Суть противоречия между (5.14) и (5.15) состоит в том, что будучи вполне общими для пятимерных кривых $\varepsilon_{ij}'(t)$, у которых все пять девиаторов, образующих «естественный репер», вполне определенны, формулы (5.12) утрачивают общность, будучи применены к случаю l-мерных кривых ($l < 5$), так как хотя при этом имеется только l девиаторов $э_{ij}^{(m)}$, однако из них, как правило, можно сконструировать еще k линейно независимых от них и один от другого девиаторов ($l + k \leqslant 5$). Поэтому из того факта, что кривая ε_{ij} будет l-мерной, вовсе не следует, что l-мерной должна быть и кривая σ_{ij}', как это получается, если принять (5.12): последняя может принадлежать и к подпространству большего числа измерений.

Если кривая $\varepsilon_{ij}'(t)$ двумерна, то

$$э_{ij}^{(1)} = э_{ij}^{(10)} \cos\varphi + э_{ij}^{(20)} \sin\varphi, \qquad э_{ij}^{(2)} = -\, э_{ij}^{(10)} \sin\varphi + э_{ij}^{(20)} \cos\varphi \tag{5.16}$$

$$\varphi = \varphi(t), \qquad \varphi(0) = 0$$

и процесс деформации характеризуется двумя девиаторами $э_{ij}^{(10)}$, $э_{ij}^{(20)}$ задающими «плоскость» в D_5. При этом, как видно из § 3, тензорная структура связи между σ_{ij}', ε_{ij}' будет зависеть от свойств этих тензоров, а именно, если $э_{ij}^{(10)}$, $э_{ij}^{(20)}$ соосны, то указанные соотношения представимы в виде

$$\sigma_{ij}' = f_1 \varepsilon_{ij}' + f_2 (\varepsilon_{ik}'\varepsilon_{kj}' - {}^1/_3 E^2 \delta_{ij}) \tag{5.17}$$

Если $э_{ij}^{(10)}$, $э_{ij}^{(20)}$ имеют одно общее главное направление, то

$$\sigma_{ij}' = f_1 \varepsilon_{ij}' + f_2 \dot{\varepsilon}_{ij}' + f_3 \omega_{ij} \tag{5.18}$$

где ω_{ij} — девиатор линейно независимый от ε_{ij}', $\dot{\varepsilon}_{ij}'$, являющийся функцией этих двух тензоров. Как он может быть построен, было показано в 2.2. Наконец, если ε_{ij}', $\dot{\varepsilon}_{ij}'$ не имеют общего главного направления, то, как это следует из 3.2, тензорная структура кривой записывается в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}' = f_0 \delta_{ij} + f_1 \varepsilon_{ij}' + f_2 \dot{\varepsilon}_{ij}' + f_3 \varepsilon_{ik}'\varepsilon_{kj}' + f_4 \dot{\varepsilon}_{ik}'\dot{\varepsilon}_{kj}' + \\ + f_5 (\varepsilon_{ik}'\dot{\varepsilon}_{kj}' + \dot{\varepsilon}_{ik}'\varepsilon_{kj}') + f_6 (\varepsilon_{ik}'\varepsilon_{kp}'\dot{\varepsilon}_{pj}' + \dot{\varepsilon}_{ik}'\varepsilon_{kp}'\varepsilon_{pj}') + \\ + f_7 (\dot{\varepsilon}_{ik}'\varepsilon_{kp}'\varepsilon_{pj}' + \varepsilon_{ik}'\dot{\varepsilon}_{kp}'\dot{\varepsilon}_{pj}')\end{aligned} \tag{5.19}$$

Таким образом, «двумерной» кривой деформирования может соответствовать и двумерная (5.17) и трехмерная (5.18) и в общем случае пятимерная (5.19) кривые девиатора напряжения.

Особо следует остановиться на таком деформировании, когда ε_{ij}' в процессе своего изменения сохраняет одно главное направление. Данный случай интересен, поскольку исследование пластического поведения материалов обычно проводится на трубчатых образцах, причем выполняется указанное выше условие.

Кривая деформирования $\varepsilon'_{ij}(t)$ в этом случае оказывается трехмерной, т. е.

$$\begin{aligned} э_{ij}^{(1)} &= f_{11}э_{ij}^{(10)} + f_{12}э_{ij}^{(20)} + f_{13}э_{ij}^{(30)} \\ э_{ij}^{(2)} &= f_{21}э_{ij}^{(10)} + f_{22}э_{ij}^{(20)} + f_{23}э_{ij}^{(30)} \\ э_{ij}^{(3)} &= f_{31}э_{ij}^{(10)} + f_{32}э_{ij}^{(20)} + f_{33}э_{ij}^{(30)} \end{aligned} \tag{5.20}$$

и процесс деформирования характеризуется тремя девиаторами $э_{ij}^{(10)}$, $э_{ij}^{(20)}$, $э_{ij}^{(30)}$, имеющими одно общее главное направление. Один из них, как было показано в 2.2, всегда может быть выражен через два других, так что независимыми в (5.20) являются только два девиатора. Из 2.2, помимо этого следует, что из трех девиаторов, имеющих общее главное направление, нельзя сконструировать ни одного девиатора, который был бы от них линейно независимым, ввиду чего тензорная структура для $\sigma_{ij}(t)$ в рассматриваемом случае будет выражаться формулой (5.18), т. е. девиатор напряжения, как и девиатор деформации, оказывается трехмерной тензорной кривой.

Таким образом, основные геометрические свойства соотношений между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах представляются выясненными. Дальнейший прогресс в данном направлении вряд ли принес бы пользу, так как одни лишь геометрические соображения явно недостаточны для решения рассматриваемой проблемы. Только путем анализа явлений, протекающих при необратимом деформировании твердых тел, и создания соответствующих физических моделей можно подойти к установлению законов, описывающих такого рода деформации. По существу именно этим путем и развивается современная теория пластичности и ее основное направление — теория течения.

Поступила I VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
2. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Гостехиздат, М., 1955.
3. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругих телах. ПММ, 1951, т. XV, вып. 2.
4. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и деформациями в механике сплошных сред. ПММ, 1954, т. XXIII, вып. 6.
5. Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
6. Ивлев Д. Д. О постулате изотропии в теории пластичности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
7. Новожилов В. В. Об одном направлении в теории пластичности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
8. Ильюшин А. А. Еще о постулате изотропии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
9. Новожилов В. В. И еще о постулате изотропии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
10. Rivlin R. S., Erichsen I. L. Stress-deformation relation for isotropic materials. J. Rational Mech. and Analysis, 1955, v. 4, No 2.
11. Rivlin R. S. Further remarks of the stress-deformation relations for isotropic materials. J. Rational Mech. and Anal., 1955, v. 4, No 5.