Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

О МОМЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

Г. И. Баренблатт, Г. Г. Черный
(Москва)

Известно, что отсутствие в ряде случаев непрерывных решений уравнений движения в рамках избранной модели сплошной среды приводит к необходимости введения поверхностей разрыва, на которых характеристики среды и движения претерпевают скачкообразные изменения. Поверхности разрыва в механике сплошных сред используются также как удобная аппроксимация относительно узких зон, где движение или среда обладают свойствами, существенно отличными от основного поля. В том и другом случае на поверхностях разрыва должны выполняться условия, позволяющие связать непрерывные решения по обе стороны поверхности. Эти условия физически означают, как правило, задание определенной величины сосредоточенных воздействий на поверхностях разрыва (силы, источники вещества, энергии и т. д.) или, в частности, отсутствие на этих поверхностях сосредоточенных воздействий. Если поверхности разрыва приближенно представляют относительно тонкие области, в которых движение или среда обладают свойствами, отличными от основного поля, то для определения величины сосредоточенных воздействий необходимо, вообще говоря, исследовать внутреннюю структуру этих тонких областей. Обыкновенно динамические условия на поверхностях разрыва выводятся из законов сохранения массы, энергии и импульса, взятых в интегральной форме; впервые для произвольной сплошной среды это было сделано в классической работе Н. Е. Кочина [1].

Для идеальных сред соотношения сохранения массы, энергии и импульса доставляют во многих случаях необходимое при определении решений число условий на поверхностях разрыва. Иначе обстоит дело в случае диссипативных сред: для таких сред одних соотношений сохранения массы, энергии и импульса недостаточно. В работе [2] это обстоятельство было отмечено применительно к вязкой жидкости. В качестве дополнительных условий на поверхности разрыва в пограничном слое вязкой теплопроводной жидкости в [2] были приняты условия непрерывности тангенциальной компоненты скорости и температуры.

В предлагаемой работе показывается, что дополнительные соотношения для диссипативной среды можно получить как моментные соотношения достаточно высоких порядков. В частности, показывается, что таким образом можно получить условия непрерывности скорости и температуры в вязкой теплопроводной жидкости. Показывается также, что в пограничном слое не существует поверхностей разрыва продольной составляющей скорости.

Отсутствие разрывов касательной составляющей скорости специфично для ньютоновской вязкой жидкости; в других диссипативных средах такие разрывы существовать могут. В статье приводится пример диссипативной среды, в которой разрывы скорости, имевшие место в начальный момент, не исчезают мгновенно, а экспоненциально затухают со временем. Аналогичные обстоятельства могут иметь место и для разрывов температуры.

Получение дополнительных соотношений на поверхностях разрыва приобретает особое значение для различных моделей сред со сложной (включающей высшие производные) структурой зависимости напряжений от деформаций, скоростей деформаций и т. д. Актуальность подобных моделей в последнее время возросла в связи с появлением большого количества новых материалов.

§ 1. Рассмотрим сначала простейшие примеры. Распределение составляющих скорости u, v и давления p в несжимаемой вязкой жидкости (фиг. 1)

$$u = u_1 \quad (y > 0), \qquad u = u_2 \quad (y < 0), \qquad v = 0, \qquad p \equiv \text{const} \tag{1.1}$$

как нетрудно показать, удовлетворяет уравнениям Навье—Стокса вне поверхности разрыва, а также условиям сохранения массы, энергии и импульса на поверхности разрыва $y = 0$.

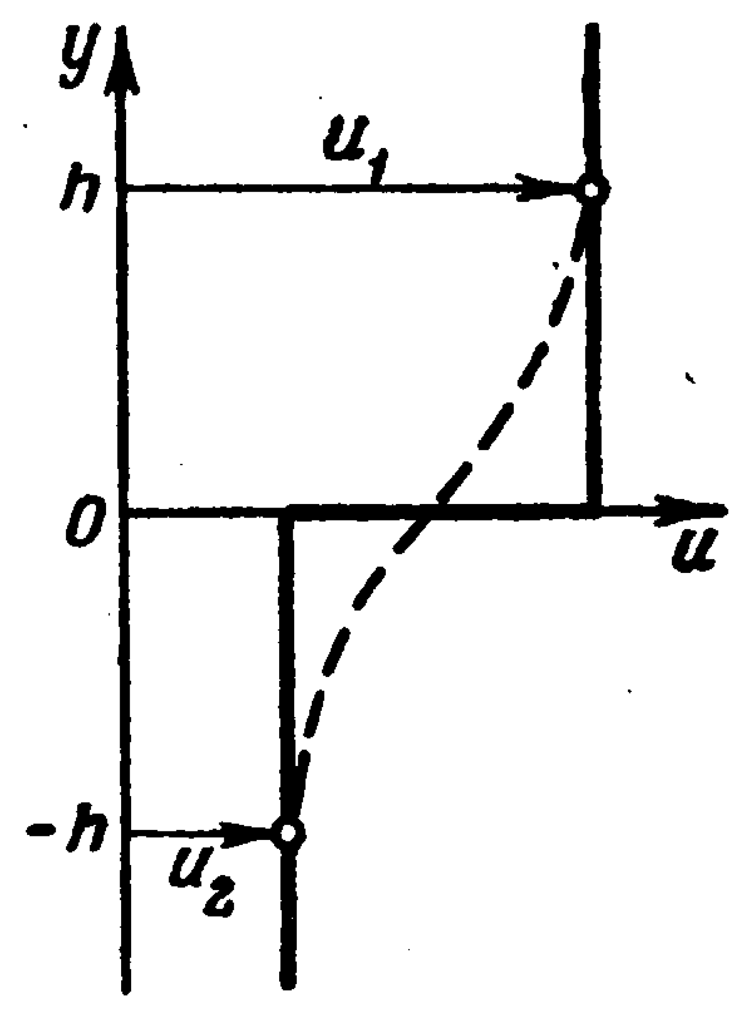
Легко видеть, однако, что это распределение не осуществляется, если на поверхности разрыва при помощи тех или иных специальных средств не приложены внешние силы, главный вектор которых равен нулю, а главный момент отличен от нуля. Для того чтобы это обнаружить, заметим, что свойства жидкости в сколь угодно тонком переходном слое такие же, как в основном потоке. Поэтому распределение (1.1) является предельным для распределения, в котором по-прежнему $v \equiv 0$ и $p = \text{const}$, а распределение продольной скорости u представляет собой гладкую функцию y, монотонно изменяющуюся от u_1 до u_2 на участке $-h \leqslant y \leqslant h$ и остающуюся постоянной вне этого участка. Здесь h — произвольное малое число. Очевидно, что любое такое распределение можно осуществить в вязкой жидкости, прикладывая к ней внешние объемные силы f_x, направленные вдоль оси x и распределенные по закону

$$f_x = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\mu = \text{const}) \tag{1.2}$$

(заметим, что обобщение на случай $\mu \neq \text{const}$ не составляет труда).

Из (1.2) и предположенного характера зависимости u от y следует, что $f_x = 0$ при $|y| > h$. Интегрируя (1.2) и замечая, что $\partial u / \partial y = 0$ при $y = \pm h$, $u(h) = u_1$, $u(-h) = u_2$, находим

$$\int_{-h}^{h} f_x \, dy = 0, \qquad \int_{-h}^{h} f_x y \, dy = \mu (u_1 - u_2) \tag{1.3}$$



Фиг. 1

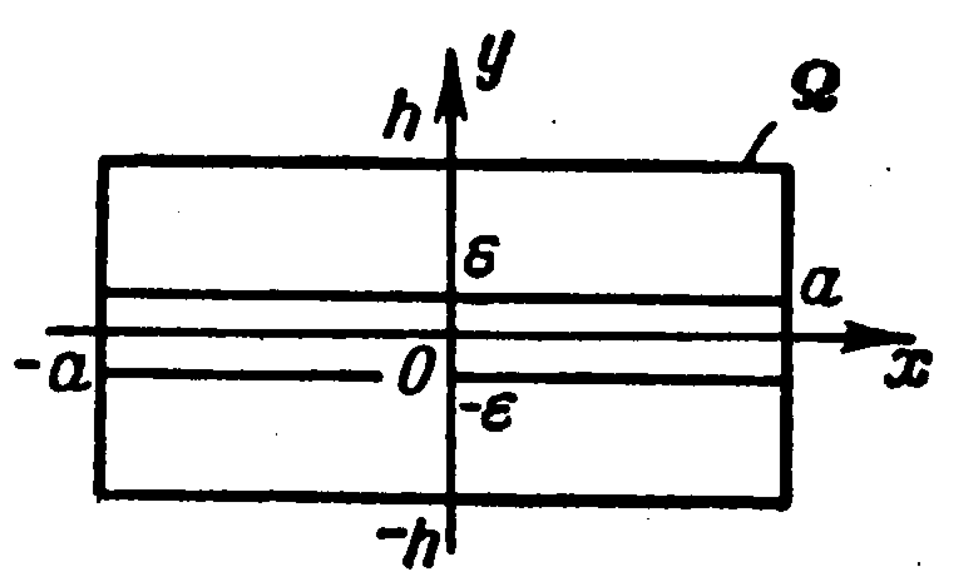
Таким образом, главный вектор системы сил, приложенных к жидкости, равен нулю, а главный момент отличен от нуля и не зависит от толщины промежуточного слоя $2h$ и закона распределения скоростей внутри этого слоя. Устремляя теперь h к нулю, получаем в пределе разрывное распределение (1.1) и убеждаемся в том, что на поверхности разрыва действует приложенная внешняя пара с моментом $\mu (u_1 - u_2)$ на единицу площади поверхности разрыва. Если внешняя пара на поверхности разрыва отсутствует, то распределение продольных скоростей в вязкой жидкости при переходе через эту поверхность меняется непрерывно.

Рассмотрим другой пример, относящийся к вязкой сжимаемой жидкости. Распределение компонент скорости, плотности и давления

$$u = u_0 + A \exp(qy / \mu), \quad \rho = \rho_1, \qquad v = v_1, \qquad p = p_0 - \rho_1 v_1^2 \quad (y > 0)$$
$$u = u_0, \qquad \rho = \rho_2, \qquad v = v_2, \qquad p = p_0 - \rho_2 v_2^2 \quad (y < 0) \tag{1.4}$$

где p_0, u_0, A — произвольные константы; ρ_1, ρ_2, v_1 и v_2 — константы, подчиненные условию $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = q$ (для определенности считаем, что $q < 0$), удовлетворяет при $y \neq 0$ уравнениям движения вязкой сжимаемой жидкости. Это распределение удовлетворяет также условиям сохранения массы, импульса и энергии на поверхности разрыва $y = 0$. Аналогично предыдущему здесь можно показать, что на поверхности разрыва действует внешняя пара с моментом на единицу площади, равным μA. Если приложенная внешняя пара отсутствует, то на поверхности $y = 0$ продольная скорость непрерывна ($A = 0$).

Однако, в отличие от предыдущего примера, помимо внешних сил, направленных вдоль оси x, и создающих упомянутую пару, в промежуточном слое существуют также внешние силы f_y, направленные по оси y. Для вычисления сосредоточенного воздействия, обусловленного этими силами, воспользуемся уравнением импульса в проекции на ось y]



Фиг. 2

$$\frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f_y \qquad (1.5)$$

Вводя, как и ранее, сглаженное на участке $-h \leqslant y \leqslant h$ распределение скорости v, из (1.5) получим

$$\int_{-h}^{h} f_y dy = \left(\rho v^2 + p - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = 0 \qquad (1.6)$$

Интегрируя соотношение (1.5), умноженное на y, получаем также

$$\int_{-h}^{h} f_y y dy = (p + \rho v^2)\, y\,\Bigg|_{-h}^{h} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} y\,\Bigg|_{-h}^{h} + \frac{4}{3}\mu (v_1 - v_2) - \int_{-h}^{h} (p + \rho v^2)\, dy \qquad (1.7)$$

Устремляя h к нулю, находим

$$\int_{-h}^{h} f_y y dy = {}^4/_3 \mu (v_1 - v_2) \qquad (1.8)$$

Таким образом, на поверхности разрыва помимо пары, связанной с разрывом продольных скоростей, имеется еще сосредоточенное воздействие, типа «центра давления» мощностью $4/3\mu(v_1 - v_2)$ на единицу площади поверхности. (Центром давления называется сосредоточенное воздействие получающееся, если создать на двух параллельных плоскостях противоположно направленные нормальные напряжения, после чего устремить расстояние между плоскостями к нулю, пропорционально увеличивая приложенные напряжения.) Если такое сосредоточенное воздействие на поверхности отсутствует, то поперечная составляющая скорости меняется непрерывно.

Приведенные примеры делают очевидным доказательство невозможности существования поверхности разрыва скоростей в вязкой сжимаемой жидкости, которая не подвергается сосредоточенным воздействиям типа пары или центра давлений.

В самом деле, уравнения импульса в проекции на оси x и y имеют вид

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f_x$$

$$\frac{\partial\rho v}{\partial t}+\frac{\partial\rho uv}{\partial x}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=f_y \qquad (1.9)$$

Не уменьшая общности, можно выбрать систему координат так, чтобы в достаточно малой окрестности Ω данной точки O поверхности разрыва эту поверхность можно было считать совпадающей с поверхностью $y = 0$.

Рассмотрим теперь (фиг. 2) область Ω $(-a \leqslant x \leqslant a, -h \leqslant y \leqslant h)$. Умножим обе части уравнений (1.9) на y и проинтегрируем по области Ω. Под знаком интеграла в левых частях проинтегрированных уравнений (1.9) будут стоять производные от разрывных функций. Для вычисления этих производных следует, как это было сделано выше, сгладить разрывные функции в узкой области $-a \leqslant x \leqslant a$, $-\varepsilon \leqslant y \leqslant \varepsilon$, затем вычислить обычным образом интегралы и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Можно показать, что результат не будет зависеть от способа сглаживания. Оценки показывают, что результат интегрирования представляется в виде

$$\int_\Omega f_x y\,dx\,dy = 2a\mu\,(u_1-u_2)+O\,(ah)+O\,(a^2)$$

$$\int_\Omega f_y y\,dx\,dy = 2a\frac{4}{3}\mu\,(v_1-v_2)+O\,(ah)+O\,(a^2)$$

где индексом 1 обозначены мгновенные значения величин в точке над поверхностью разрыва, а индексом 2 — под поверхностью разрыва; $O\,(c)$ обозначает величину порядка c. Заметим теперь, что

$$\int_\Omega f_x y dx dy = 2aM+O\,(ah)+O\,(a^2)$$

$$\int_\Omega f_y y dx dy = 2aN+O\,(ah)+O\,(a^2)$$

где M, N — соответственно мгновенная интенсивность пары и центра давления на поверхности разрыва в точке O. Подставляя эти выражения в предыдущее уравнение и переходя к пределу при $h \to 0$ и $a \to 0$, получаем

$$M=\mu\,(u_1-u_2), \qquad N={}^4/_3\mu\,(v_1-v_2) \qquad (1.10)$$

В частности, если поверхность разрыва свободна от сосредоточенных воздействий, то $M = N = 0$. Отсюда получаем условие непрерывности скоростей.

§ 2. В пограничном слое дело обстоит несколько иначе, нежели в потоке вязкой жидкости. Координаты x и y здесь перестают быть равноправными. Кроме того, они связаны с обтекаемым телом и уже нельзя, как в предыдущем параграфе, произвольно перемещать систему координат.

Уравнения неустановившегося пограничного слоя в вязкой сжимаемой жидкости имеют вид [3]

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\rho cT}{\partial t}+\frac{\partial\rho ucT}{\partial x}+\frac{\partial\rho vcT}{\partial y}-k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=q$$

где c — теплоемкость при постоянном объеме, T — температура, k — теплопроводность, q —объемная интенсивность тепловыделения. Существенно, что уравнение для компоненты скорости v, в отличие от уравнений Навье— Стокса, сильно упрощается и не содержит второй производной $\partial^2 v\,/\,\partial y^2$. Из-за этого в пограничном слое становятся возможными разрывы поперечной составляющей скорости v.

Для вывода соотношений на поверхностях разрыва будем поступать аналогично § 1, исходя непосредственно из уравнений (2.1).

Примем, что уравнение поверхности разрыва имеет вид $y=\Lambda(x, t)$. Не уменьшая общности, можно считать $\partial\Lambda/\partial t\,(x_0, t_0)>0$. Рассмотрим область Ω

$$t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau,\qquad x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$$
$$\Lambda(x, t_0-\tau)\leqslant y\leqslant\Lambda(x, t_0+\tau) \tag{2.2}$$

где a и τ — малые величины, относительный порядок малости которых будет определен позже; x_0 и t_0 — произвольные величины. В более простом стационарном случае область Ω определяется так:

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\qquad \Lambda(x_0)-h\leqslant y\leqslant\Lambda(x_0)+h)$$

Заметим, что с обеих сторон поверхности разрыва все характеристики движения представляют собой функции, непрерывные вместе со своими производными. Обозначим через $m_1(x_0, t_0)$ значение некоторой характеристики движения $m(x, y, t)$ в точке $x=x_0$, $y=\Lambda(x_0, t_0)$, $t=t_0$ непосредственно над поверхностью разрыва. Значение этой величины непосредственно под поверхностью разрыва обозначим через $m_2(x_0, t_0)$. Тогда в силу малости a и τ значения m во всех точках области Ω, лежащих под поверхностью разрыва, близки к m_2, а над поверхностью — близки к m_1.

Рассмотрим теперь интегралы вида

$$J_1=\int_\Omega\frac{\partial m}{\partial t}\,dx\,dy\,dt,\qquad J_2=\int_\Omega\frac{\partial m}{\partial x}\,dx\,dy\,dt$$
$$J_3=\int_\Omega\frac{\partial m}{\partial y}\,dx\,dy\,dt,\qquad J_4=\int_\Omega m\,dx\,dy\,dt \tag{2.3}$$

Если функция m претерпевает разрыв на поверхности $y=\Lambda(x, t)$, то производные, входящие в первые три интеграла, представляют собой обобщенные функции, так что для вычисления интегралов нужно, как это было сделано в § 1, «сгладить» функцию m в некоторой малой окрестности поверхности разрыва, обычным образом вычислить интегралы, после чего перейти к пределу. При этом нужно учесть, что величины $\partial\Lambda\,/\,\partial x$

и $\partial\Lambda / \partial t$ имеют порядок $1 / \sqrt{\mathrm{Re}}$ и что в рамках теории пограничного слоя пренебрегается величинами такого порядка сравнительно с единицей. В пределе интегралы (2.3) оказываются не зависящими от способа сглаживания и равными

$$J_1 = 4a\tau \frac{\partial\Lambda}{\partial t}(m_2 - m_1) + O(a^2\tau) + O(a\tau^2)$$

$$J_2 = 4a\tau \frac{\partial\Lambda}{\partial x}(m_2 - m_1) + O(a^2\tau) + O(a\tau^2) \tag{2.4}$$

$$J_3 = -4a\tau(m_2 - m_1) + O(a^2\tau) + O(a\tau^2)$$

$$J_4 = O(a\tau^2)$$

Для получения соотношений сохранения массы, импульса и энергии на поверхности разрыва достаточно проинтегрировать уравнения (2.1) по области Ω, перейти к пределу при $\tau \to 0$ и $a \to 0$ и учесть, что на поверхности разрыва нет сосредоточенных сил, источников массы и энергии. Проделаем это на примере закона сохранения импульсов. Остальные соотношения получаются аналогично. Интегрируя второе уравнение (2.1) по области Ω и используя (2.4), находим:

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dt = -4a\tau(p_2 - p_1) + O(a^2\tau) + O(a\tau^2) = 0 \tag{2.5}$$

Делим обе части (2.5) на $4a\tau$ и переходим к пределу при $\tau \to 0$. В полученном соотношении переходим к пределу при $a \to 0$, получаем первое соотношение сохранения импульсов на поверхности разрыва [2]

$$p_1 - p_2 = 0 \tag{2.6}$$

Далее, интегрируя первое уравнение (2.1) по области Ω и используя (2.4), получаем

$$4a\tau\left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial t}(\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1) + \frac{\partial\Lambda}{\partial x}(\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) - (\rho_2 u_2 v_2 - \rho_1 u_1 v_1) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 - \right.$$
$$\left. - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + (p_2 - p_1)\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right\} - \int_\Omega f_x\,dx\,dy\,dt + O(a\tau^2) + O(a^2\tau) = 0 \tag{2.7}$$

Заметим теперь, что

$$\int_\Omega f_x\,dx\,dy\,dt = 4a\tau F(x_0, t_0) + O(a\tau^2) + O(a^2\tau) \tag{2.8}$$

где F — интенсивность сосредоточенной силы на поверхности разрыва и, в силу (2.6), $p_1 - p_2 = 0$. Очевидно, кроме того, что $\partial\Lambda / \partial t = D$, $\partial\Lambda / \partial x = \operatorname{tg}\beta$, здесь D — скорость распространения поверхности разрыва, а β — угол ее наклона к оси x. Подставляя эти соотношения в (2.7) и переходя, аналогично предыдущему, к пределу при $\tau \to 0$ и $a \to 0$, получаем второе соотношение сохранения импульсов на поверхности разрыва в виде

$$\rho_1(D + u_1 \operatorname{tg}\beta - v_1)u_1 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + F =$$
$$= \rho_2(D + u_2 \operatorname{tg}\beta - v_2)u_2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 \tag{2.9}$$

Если сосредоточенных сил нет, то $F \equiv 0$, и соотношение (2.9) принимает вид, данный в [2].

Аналогично, интегрированием третьего и четвертого уравнений (2.1) получаются соотношения сохранения массы и энергии.

Как уже было отмечено вначале, одних только соотношений сохранения массы, энергии и импульса недостаточно для однозначного определения решения по обе стороны поверхности разрыва. Дополнительное соотношение получается из рассмотрения еще одного закона сохранения — закона сохранения момента количества движения. Для получения соотношения сохранения момента количества движения умножим обе части первого уравнения (2.1) на $y - \Lambda(x_0, t_0)$ и проинтегрируем по области Ω. Преобразовывая производные по y согласно формулам

$$[y - \Lambda(x_0, t_0)] \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \frac{\partial [y - \Lambda(x_0, t_0)] \rho u v}{\partial y} - \rho u v$$

$$[y - \Lambda(x_0, t_0)] \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [y - \Lambda(x_0, t_0)] \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right\} - \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

замечая, что функции

$$\rho u [y - \Lambda(x_0, t_0)], \quad \rho u^2 [y - \Lambda(x_0, t_0)], \quad \rho u v [y - \Lambda(x_0, t_0)]$$

$$p [y - \Lambda(x_0, t_0)], \quad \frac{\partial u}{\partial y} [y - \Lambda(x_0, t_0)]$$

вблизи поверхности разрыва непрерывны, а на самой поверхности обращаются в нуль, и используя соотношения (2.4), находим

$$4a\tau\mu (u_1 - u_2) + O(a^2\tau) + O(a\tau^2) - \int_\Omega f_x [y - \Lambda(x_0, t_0)]\, dx\, dy\, dt = 0 \quad (2.10)$$

Но, аналогично предыдущему,

$$\int_\Omega f_x [y - \Lambda(x_0, t_0)]\, dx\, dy\, dt = 4a\tau M + O(a^2\tau) + O(a\tau^2) \quad (2.11)$$

где M — интенсивность момента сосредоточенной пары на поверхности разрыва. Подставляя это в уравнение (2.10) и переходя к пределу при $\tau \to 0$ и $a \to 0$, получаем

$$\mu (u_1 - u_2) = M \quad (2.12)$$

так что скачок продольной компоненты скорости пропорционален интенсивности момента пары, приложенной на поверхности разрыва. В частности, если пара отсутствует (свободная поверхность разрыва), то продольная компонента скорости должна быть непрерывной.

Условие непрерывности температуры $T_1 = T_2$ получается почти буквальным повторением рассуждений, проведенных при выводе условия непрерывности касательных скоростей применительно к последнему уравнению системы (2.1). Вместо условия отсутствия внешней пары на поверхности разрыва здесь используется условие отсутствия сосредоточенных на поверхности так называемых «тепловых диполей». Под тепловым диполем понимается, как обычно, сосредоточенное воздействие, которое получается в пределе, если поместить на некотором расстоянии тепловые источники противоположных знаков и устремить затем расстояние между источниками к нулю, пропорционально увеличивая их мощность. Отсутствие тепловых диполей можно также трактовать как отсутствие сосредоточенного теплового сопротивления поверхности разрыва.

§ 3. Проведенные рассуждения непосредственно распространяются на весьма широкий класс диссипативных сред, для которых связь тензора напряжений с тензором скоростей деформаций записывается в виде

$$\tau_{ij} = f\left(\varepsilon_{kl}, A_\alpha \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_\alpha}, \ A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \ldots, \dot{\varepsilon}_{kl}, \ B_\alpha \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}}{\partial x_\alpha}, \ldots\right) \qquad (3.1)$$

где f — любая достаточно гладкая функция, допускаемая соображениями инвариантности. Для таких сред условий сохранения массы, энергии и импульса на поверхностях разрыва, вообще говоря, недостаточно и дополнительные условия следует получать из моментных соотношений более высоких порядков, аналогично тому, как это было сделано выше для вязкой жидкости.

Рассмотрим в качестве примера среду, для которой связь напряжений со скоростями деформаций имеет вид

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij} + A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \qquad (3.2)$$

В одномерном случае ($u = u(y, t)$, $v \equiv 0$) имеем

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \varkappa \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \qquad (3.3)$$

так что основное динамическое уравнение принимает вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \qquad (3.4)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что для определения дополнительных условий на поверхности разрыва нужно привлечь моментные соотношения не только нулевого и первого, но также второго и третьего порядков. При этом нужно использовать условие того, что поверхность разрыва свободна от сосредоточенных воздействий, или же определить эти воздействия из рассмотрения внутренней структуры тонкой области, схематизируемой поверхностью разрыва. Для поверхности разрыва, свободной от сосредоточенных воздействий, условия непрерывности скорости и ее первой производной получаются из моментных соотношений второго и третьего порядков.

Следует подчеркнуть, что отсутствие разрывов скорости, в частности мгновенное исчезновение возникших по той или иной причине разрывов, специфично для ньютоновской вязкой жидкости. В других диссипативных средах возникшие разрывы, вообще говоря, не исчезают, так что разрывы могут существовать и при отсутствии сосредоточенных воздействий на поверхности разрыва. Например, рассмотрим среду с уравнением состояния вида

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\varepsilon_{ij} + \eta\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.5)$$

В одномерном случае имеем

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial t} \qquad (3.6)$$

так что основное динамическое уравнение принимает вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \qquad (3.7)$$

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущих параграфах применительно к этому уравнению (см. также работу [4]), получим, что на свободной от сосредоточенных воздействий поверхности разрыва выполняются соотношения

$$\mu u_1 + \eta \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu u_2 + \eta \frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 \tag{3.8}$$

где индексами 1 и 2 обозначаются по-прежнему значения величин по разные стороны поверхности разрыва. Интегрируя (3.8), получаем

$$u_1 - u_2 = (u_1 - u_2)_{t=t_0} e^{-\mu(t-t_0)/\eta}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2\right]_{t=t_0} e^{-\mu(t-t_0)/\eta} \tag{3.9}$$

так что возникшие по тем или иным причинам скачки в такой среде экспоненциально затухают со временем при $\eta \neq 0$, а не исчезают мгновенно, как в ньютоновской вязкой жидкости ($\eta = 0$).

Можно заметить, что во всех случаях для обнаружения сосредоточенных воздействий на поверхностях разрыва использовался один и тот же прием «сглаживания». Введение внешних воздействий в области сглаживания математически означает, что вместо однородных уравнений рассматриваются соответствующие уравнения с правой частью. В результате предельного перехода, когда толщина области сглаживания стремилась к нулю, определялась предельная форма связи между скачками характеристик движения на поверхности разрыва и интегральными характеристиками правых частей уравнений — сосредоточенных внешних воздействий. Применение хорошо разработанной в настоящее время теории обобщенных функций [5, 6] избавляет в ряде случаев от необходимости проводить промежуточные рассуждения. Фундаментальную роль в теории обобщенных функций играет дельта-функция, представляющая собой с физической точки зрения сосредоточенное воздействие (типа сосредоточенной силы, сосредоточенного притока массы, энергии и т. п.). Последовательное дифференцирование дельта-функции приводит к сосредоточенным воздействиям других типов (моменты, тепловые диполи и т. д.).

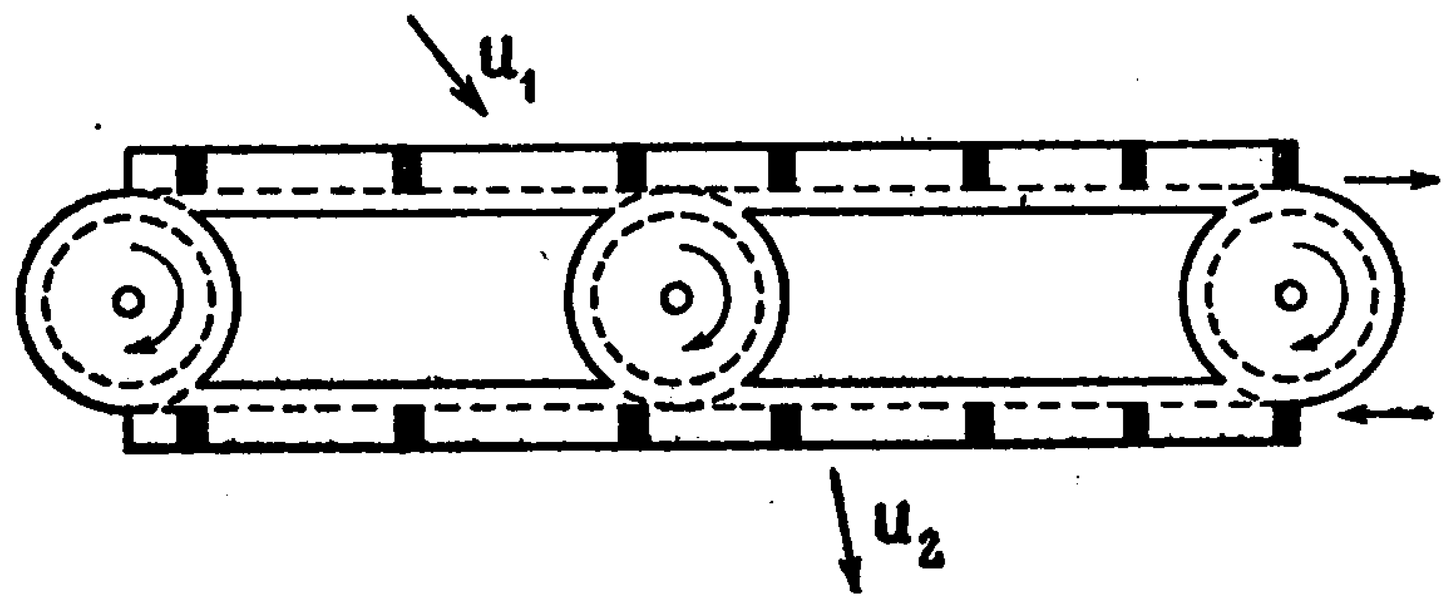
Можно показать ([6], стр. 149), что все сосредоточенные воздействия могут быть представлены линейными комбинациями дельта-функции и ее производных в правых частях соответствующих уравнений, так что эти уравнения принимают вид:

$$R(u_1, u_2 \ldots) = A\delta + B\delta' + C\delta'' + \ldots \tag{3.10}$$

где $u_1, u_2 \ldots$ — неизвестные функции, а R — дифференциальный оператор, соответствующий рассматриваемому уравнению. Поскольку порядок этого оператора ограничен, а все неизвестные функции — кусочно-гладкие, имеющие, самое большее, разрывы первого рода, число слагаемых в стоящей в правой части (3.10) линейной комбинации дельта-функции и ее производных конечно. Коэффициенты A, B, $C \ldots$ представляют собой величины приложенных к системе сосредоточенных воздействий и, по определению дельта-функции и ее производных, могут быть найдены при помощи моментных соотношений, как это и было сделано выше.

Число моментных соотношений, необходимых для однозначного определения разрывных решений, равно наивысшему допустимому в правой части (3.10) порядку производной дельта-функции.

§ 4. Как уже отмечалось выше, поверхность разрыва может схематизировать относительно тонкую область, где свойства движения или среды резко изменяются. В таких случаях сосредоточенные воздействия того или иного рода могут порождаться не только внешними причинами, но и внутренними движениями в самой тонкой области, схематизированной поверхностью разрыва. При этом для получения всех соотношений на поверхностях разрыва, в том числе и соотношений сохранения массы, энергии и импульса, необходимо провести исследование внутренней структуры области, схематизируемой поверхностью разрыва, или ввести, как это делается во многих случаях, дополнительные гипотезы о величине сосредоточенных воздействий, входящих в уравнения массы импульса и энергии и моментные соотношения.



Фиг. 3

Рассмотрим несколько примеров. При введении скачков конденсации и детонации в идеальном газе в соотношении сохранения энергии на поверхности разрыва считается заданным тепловыделение, которое в действительности определяется процессами со сложной кинетикой, происходящими в узкой зоне.

Невозможность разрывов нормальной компоненты скорости в вязкой жидкости при отсутствии сосредоточенных воздействий не противоречит, например, возможности скачков конденсации с изменением плотности в сжимаемой вязкой жидкости. Процесс конденсации вызывает такое изменение уравнений движения (за счет изменения зависимости тензора напряжений от скорости деформации), которое в пределе эквивалентно введению сосредоточенного воздействия в вязкой жидкости. Трудность изучения внутренней структуры области конденсации обходится заданием, например, скачка плотности (что равносильно заданию сосредоточенного воздействия типа центра давления). При гидравлическом рассмотрении так называемых местных сопротивлений в трубах (задвижки, сетки, диафрагмы и т. д.) их заменяют поверхностями разрыва. В соотношении сохранения импульса на такой поверхности разрыва считается заданной величина сосредоточенной силы, действующей на движущуюся жидкость. Наконец, рассмотрим движение вязкой жидкости через две близко расположенные параллельные проницаемые пластины (фиг. 3). Пластины движутся одна относительно другой при помощи роликов без скольжения, к которым приложены пары. Заменяя систему пластин с роликами поверхностью разрыва, следует задать в соотношении сохранения импульса на этой поверхности момент сосредоточенных на ней пар.

Авторы с искренней благодарностью отмечают ценные советы, высказанные Л. И. Седовым при обсуждении затронутых здесь вопросов, и дружеское внимание С. С. Григоряна и Р. Л. Салганика к их работе.

Поступила 3 VI 1963 Ин-т механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. L, 305—344, 1926. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
2. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
3. Хоуарт Л. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. ИЛ, т. I, 1955.
4. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
5. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции I. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз., М., 1958.
6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции 2. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.