

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий  
(Пермь)

Конвективная устойчивость жидкости в поле тяжести обычно исследуется в предположении, что равновесный градиент температуры не зависит от времени. Между тем возможно также и нестационарное равновесие жидкости, когда равновесная температура меняется со временем по закону, который определяется нестационарными условиями подогрева. Исследование устойчивости такого нестационарного равновесия, насколько нам известно, не производилось.

Среди различных возможных нестационарных равновесий наиболее интересен, вероятно, случай, когда равновесный градиент температуры меняется со временем периодически. Жидкость в этом случае представляет собой своеобразную колебательную систему с периодически изменяющимся параметром, и можно ожидать возникновения в таких условиях интересных явлений типа параметрического резонанса.

Ниже исследуется устойчивость равновесия плоского горизонтального слоя жидкости с периодически изменяющимся градиентом температуры. Решение этой задачи позволяет отчетливо видеть характерные особенности проблемы.

1. Рассмотрим плоский горизонтальный слой жидкости, ограниченный плоскостями  $z = \pm h$  (ось  $z$  направлена вверх). В равновесии скорость жидкости  $v = 0$ , а равновесная температура  $T_0 = T_0(z, t)$  удовлетворяет нестационарному уравнению теплопроводности

$$\partial T_0 / \partial t = \chi \partial^2 T_0 / \partial z^2 \quad (1.1)$$

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности. Будем рассматривать такие условия подогрева, когда равновесный градиент температуры в жидкости периодически меняется около некоторого среднего значения с частотой  $\omega_0$ . Ограничимся рассмотрением области низких частот, удовлетворяющих условию

$$\omega_0 \ll \chi / h^2 \quad (1.2)$$

(слабый тепловой скин-эффект). В этом случае равновесный градиент температуры не зависит от  $z$

$$\partial T_0 / \partial z = -A_0 + a_0 \varphi(t) \quad (1.3)$$

где  $\varphi(t)$  — модулирующая функция с периодом  $2\pi / \omega_0$ , а постоянные  $A_0$  и  $a_0$  определяют средний градиент температуры и глубину его модуляции.

Для исследования устойчивости нестационарного равновесия из уравнений конвекции [1] получим обычным образом уравнения малых возмущений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + v \Delta v - g\beta T \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T_0}{\partial z} = \chi \Delta T, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.5)$$

В отличие от уравнений малых возмущений стационарного равновесия здесь один из коэффициентов,  $\partial T_0 / \partial z$ , зависит от времени.

Рассматривая периодические в плоскости  $xu$  возмущения, будем считать в уравнениях (1.4) — (1.5) все величины пропорциональными  $\exp\{i(k_1x + k_2y)\}$ . Исключив  $v_x$ ,  $v_y$  и  $p$ , для зависящих от  $z$  и  $t$  частей возмущения температуры  $T$  и вертикальной скорости  $v_z$  получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_z'' - k^2 v_z) - \nu(v_z'''' - 2k^2 v_z'' + k^4 v_z) = -g\beta k^2 T \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_z T_0' = \chi(T'' - k^2 T) \quad (1.7)$$

Здесь штрихом обозначены производные по  $z$ .

Наиболее простая зависимость возмущений от  $z$  получается в случае, когда слой ограничен свободными поверхностями (условия Релея):

$$T = 0, \quad v_z = v_z'' = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (1.8)$$

Тогда, полагая

$$v_z = v(t) \cos \frac{\pi}{2h} z, \quad T = \tau(t) \cos \frac{\pi}{2h} z \quad (1.9)$$

получим, подставляя (1.9) в (1.6) и (1.7), уравнения для амплитуд  $v(t)$  и  $\tau(t)$

$$\dot{v} + \nu \kappa^2 v = \frac{g\beta k^2}{\kappa^2} \tau, \quad \dot{\tau} + \chi \kappa^2 \tau = -T_0' v \quad \left(\kappa^2 = k^2 + \frac{\pi^2}{4h^2}\right) \quad (1.10)$$

Исключая из этой системы  $\tau(t)$ , получим уравнение

$$\ddot{v} + \kappa^2 \chi \left(1 + \frac{\nu}{\chi}\right) \dot{v} + \left[\frac{g\beta k^2}{\kappa^2} T_0' + \nu \chi \kappa^4\right] v = \bar{0} \quad (1.11)$$

Выбрав единицу времени  $1 / \kappa^2 \sqrt{\nu \chi}$  и подставив  $T_0'$  из (1.3), это уравнение приведем к виду

$$\ddot{v} + 2\varepsilon \dot{v} + [1 - R + r\varphi(t)] v = 0 \quad (1.12)$$

Здесь

$$R = \frac{g\beta A_0}{\nu \chi} \frac{k^2}{\kappa^6}, \quad r = \frac{g\beta a_0}{\nu \chi} \frac{k^2}{\kappa^6}, \quad 2\varepsilon = \frac{1 + P}{\sqrt{P}}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Функция  $\varphi(t)$  в уравнении (1.12) имеет период

$$T = \frac{2\pi}{p_*} \quad \left(p_* = \frac{\omega_0}{\kappa^2 \sqrt{\nu \chi}}\right)$$

Здесь  $p_*$  — безразмерная частота модуляции.

Таким образом, поведение во времени возмущений определяется уравнением Хилла с членом, описывающим затухание.

2. Если параметрическое возбуждение отсутствует ( $r = 0$ ), получается известная задача Релея [2] об устойчивости равновесия слоя со свободными поверхностями при стационарном градиенте температуры. В этом случае все коэффициенты уравнения для  $v$  постоянны и решение зависит от времени по закону  $\exp(\lambda t)$ . Для декрементов  $\lambda$  находим

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1 + P}{2\sqrt{P}} \pm \sqrt{\frac{(1 - P)^2}{4P} + R} \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1), при подогреве сверху ( $R < 0$ ) вещественные части  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  отрицательны при всех  $R$  (возмущения затухают), причем при  $|R| < 1/4(1 - P)^2 / P$  декременты  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  вещественны (монотонное затухание); при  $|R| > 1/4(1 - P)^2 / P$  декременты  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  комплексно-сопряжены (затухающие колебания).

При подогреве снизу ( $R > 0$ ) оба декремента всегда вещественны (монотонные возмущения), причем  $\lambda_- < 0$  при всех  $R$ , а  $\lambda_+$  с ростом  $R$  растет и становится положительным, начиная с  $R = 1$ , что определяет границу устойчивости стационарного равновесия.

При наличии параметрического возбуждения задача состоит в отыскании областей устойчивости и неустойчивости решений уравнения (1.12) в зависимости от значений параметров  $R$ ,  $r$ ,  $p_*$  и  $\varepsilon$ .

Наибольший интерес представляет, очевидно, синусоидальная модуляция:  $\varphi(t) = \sin p_* t$ . В этом случае границы областей устойчивости для малых значений параметра возбуждения  $r$  можно найти при помощи метода малого параметра [3]. Наша система, однако, обладает большим затуханием: параметр  $\varepsilon$  как функция числа Прандтля  $P$  имеет минимум при  $P = 1$  ( $\nu = \chi$ ), причем  $\varepsilon_{\min} = 1$ . Поэтому интересны произвольные (не малые) значения параметра  $r$ . В этой области границы устойчивости решений уравнения (1.12) можно найти весьма просто, если заменить синусоидальную модуляцию прямоугольной. Общие свойства решений уравнения Хилла, как известно [4, 5], при такой замене почти не меняются.

Пусть модуляция происходит по прямоугольному закону (фиг. 1), на участках 1 и 2 имеем  $\varphi = \mp 1$ , и общее решение уравнения (1.12)

$$v^{(1)} = e^{-\varepsilon t} (C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t), \quad \alpha = \sqrt{1 - R - \varepsilon^2 - r} \quad (2.2)$$

$$v^{(2)} = e^{-\varepsilon t} (C_3 \sin \beta t + C_4 \cos \beta t), \quad \beta = \sqrt{1 - R - \varepsilon^2 + r} \quad (2.3)$$

При  $t = 0$  должны быть непрерывны  $v$  и  $\dot{v}$

$$v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0), \quad \dot{v}^{(1)}(0) = \dot{v}^{(2)}(0) \quad (2.4)$$

Будем искать периодические решения уравнения (1.12). Поэтому потребуем выполнения условий периодизма

$$v^{(2)}(\pi / p_*) = \pm v^{(1)}(-\pi / p_*), \quad \dot{v}^{(2)}(\pi / p_*) = \pm \dot{v}^{(1)}(-\pi / p_*) \quad (2.5)$$

Решения, удовлетворяющие (2.5), будут описывать стационарные колебания с частотами

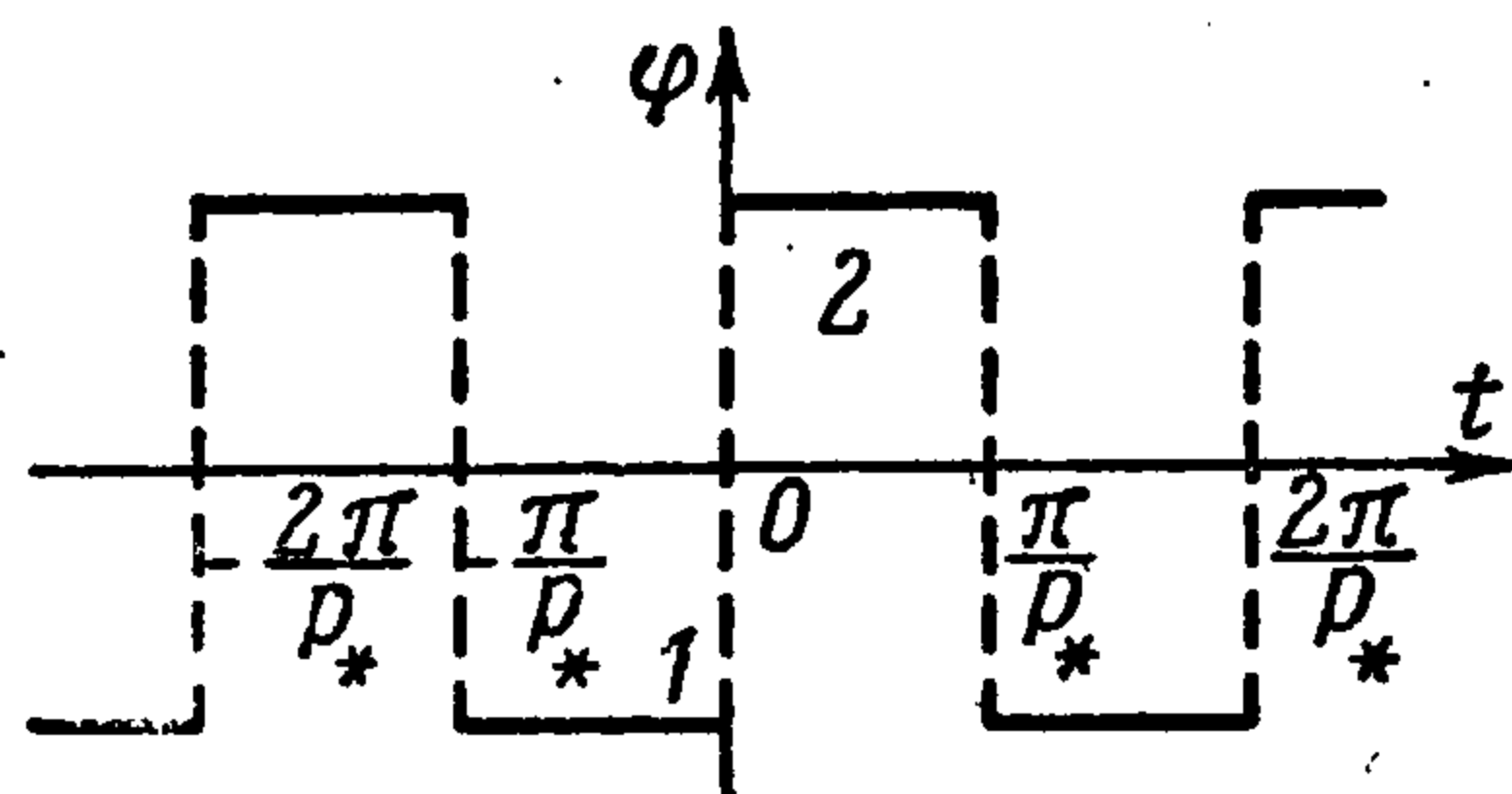
$$\Omega = n p_* \quad (2.6)$$

причем знак «плюс» в (2.5) соответствует целым, а знак «минус» — полуцелым значениям  $n$ .

Условия (2.4) и (2.5) дают систему четырех линейных однородных уравнений для постоянных  $C_i$ . Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя. Отсюда находим соотношение, при котором возможны периодические решения уравнения (1.12)

$$\cos \frac{\alpha}{p} \cos \frac{\beta}{p} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \frac{\alpha}{p} \sin \frac{\beta}{p} = \pm \operatorname{ch} \frac{2\varepsilon}{p} \quad \left(p = \frac{p_*}{\pi}\right) \quad (2.7)$$

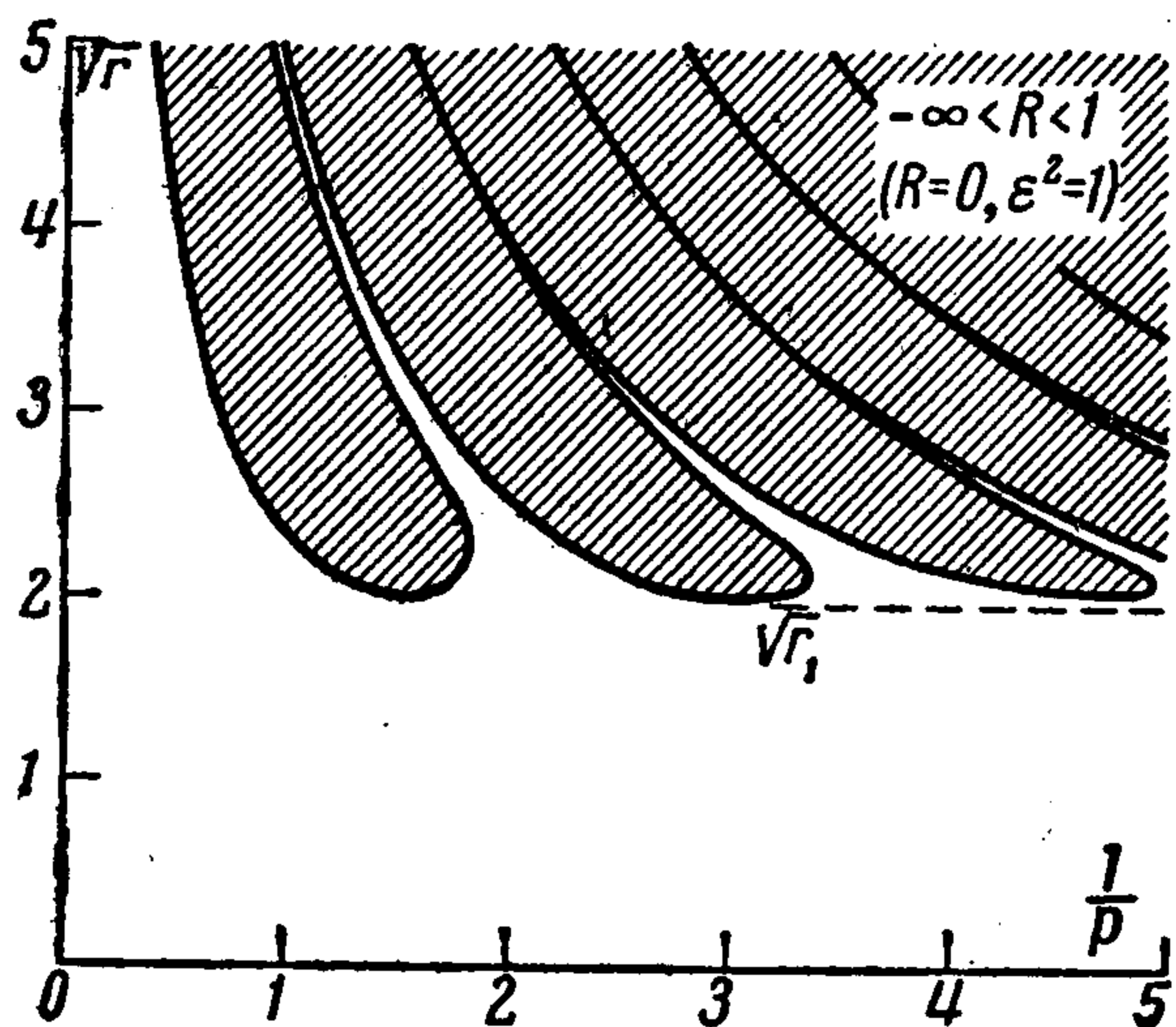
Соотношение (2.7) определяет границы устойчивости нестационарного равновесия. Устойчивому равновесию соответствуют такие значения параметров  $R$ ,  $r$ ,  $p$  и  $\varepsilon$ , при которых левая часть (2.7) лежит внутри интервала  $(-\operatorname{ch}(2\varepsilon/p), \operatorname{ch}(2\varepsilon/p))$ .



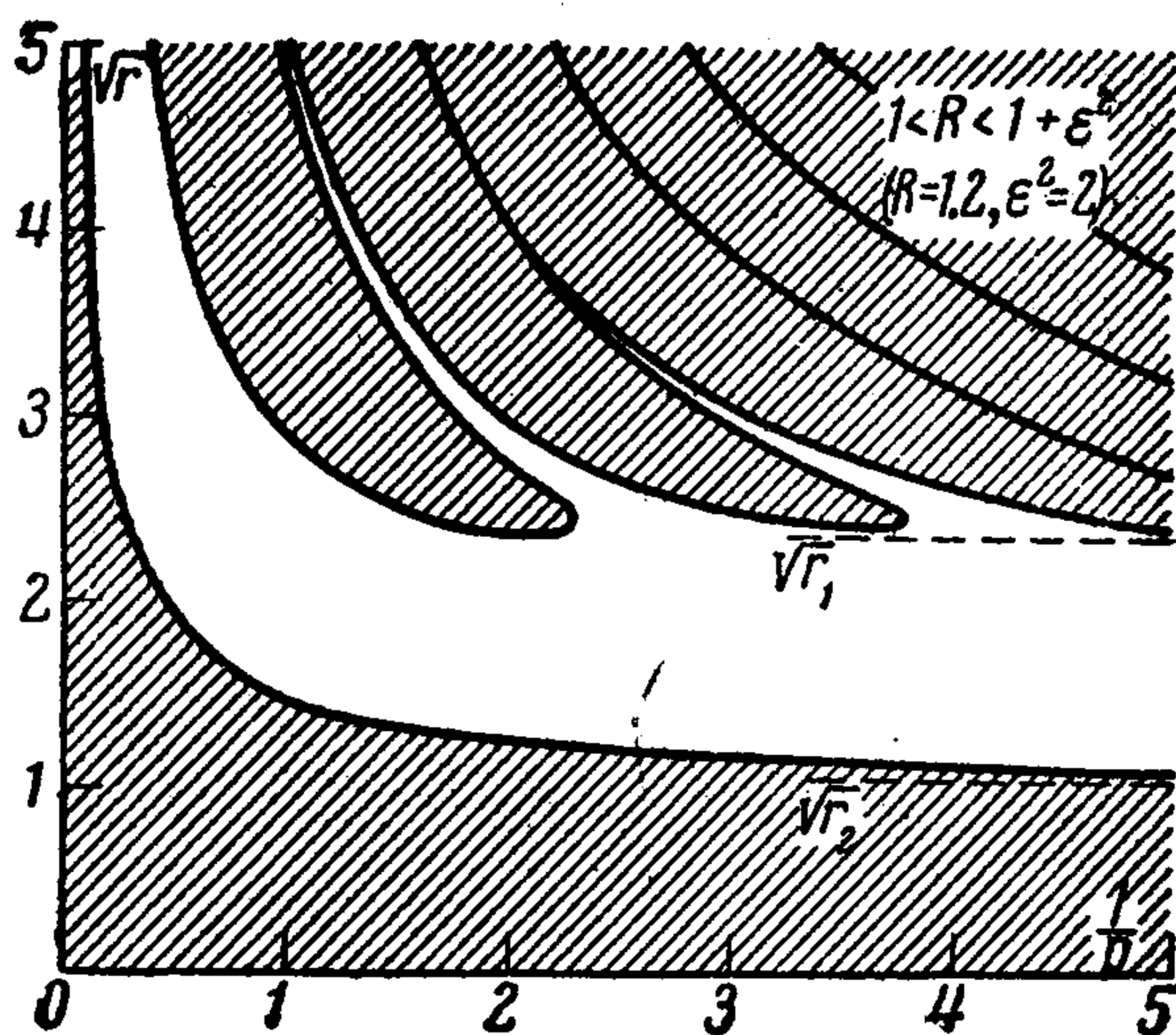
Фиг. 1

3. При фиксированных значениях коэффициента затухания  $\varepsilon$  и параметра  $R$ , определяющего средний градиент температуры, уравнение (2.7) дает связь между амплитудой  $r$  и частотой  $p$  возбуждения на границе устойчивости. Приведем результаты численного решения уравнения (2.7).

Рассмотрим сначала область  $-\infty < R < 1$ . При отсутствии возбуждения ( $r = 0$ ) таким значениям  $R$  соответствует устойчивое равновесие (произвольный подогрев сверху или подогрев снизу при градиентах температуры, меньших критического). При



Фиг. 2



Фиг. 3

наличии возбуждения ( $r \neq 0$ ) появляются области неустойчивости. На фиг. 2 для примера даны первые области неустойчивости для значений параметров  $R = 0$  и  $\varepsilon = 1$  в координатах  $(\sqrt{r}, p^{-1})$ . При малых  $r$  равновесие устойчиво при любых частотах  $p$ . При фиксированном  $r > r_1$ , где  $r_1$  — некоторое пороговое значение, появляются, как видно из фиг. 2, интервалы частот, соответствующие устойчивости и неустойчивости (области неустойчивости заштрихованы). С увеличением  $r$  интервалы устойчивости сужаются. Изображенные на фиг. 2 области неустойчивости отвечают целым и полужелым значениям  $n = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  в формуле (2.6). Уравнения линий, отделяющих при больших  $r$  соседние области неустойчивости, имеют вид<sup>1</sup>

$$\frac{\sqrt{r}}{p} = (2l + 1) \frac{\pi}{2} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

Пороговое значение параметра возбуждения

$$r_1 = 3\varepsilon^2 - (R - 1) \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь область  $R > 1$ . В статических условиях ( $r = 0$ ) равновесие при  $R > 1$  неустойчиво. Модуляция градиента температуры стабилизирует равновесие при определенных значениях частоты  $p$  и амплитуды  $r$  модуляции. Форма областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $(\sqrt{r}, p^{-1})$  оказывается разной в случаях  $R \geq 1 + \varepsilon^2$ .

Пусть  $1 < R < 1 + \varepsilon^2$ . Форма кривых устойчивости видна из фиг. 3 ( $R = 1.2$ ,  $\varepsilon^2 = 2$ ). В отличие от случая  $R < 1$ , теперь появляется еще одна область неустойчивости, — прилегающая к осям координат ( $n = 1$  в формуле (2.6)). Уравнение границы этой области при  $p^{-1} \rightarrow \infty$

$$r_2 = 2\varepsilon \sqrt{R - 1} \quad (3.3)$$

Над этой областью расположена полоса устойчивости, ширина которой (при больших  $p^{-1}$ ) равна  $r_1 - r_2$ . С ростом  $R$  полоса устойчивости сужается, так как  $r_1$  уменьшается, а  $r_2$  растет, и  $r_1 - r_2 \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow 1 + \varepsilon^2$ .

Форма кривых устойчивости для  $R > 1 + \varepsilon^2$  видна из фиг. 4 ( $R = 4$ ,  $\varepsilon^2 = 2$ ). В этом случае практически при всех значениях частоты и амплитуды возбуждения равновесие неустойчиво. Однако при  $r > r_3$  имеются узкие резонансные интервалы

<sup>1</sup> Асимптотическое поведение границ областей при больших  $r$  не зависит от параметров  $R$  и  $\varepsilon$  и всегда определяется уравнением (3.1).

частот, при которых параметрическое возбуждение приводит к стабилизации системы (здесь имеется полная аналогия с поведением астатического маятника с вибрирующим подвесом); пороговое значение

$$r_3 = \varepsilon^2 + (R - 1) \quad (3.4)$$

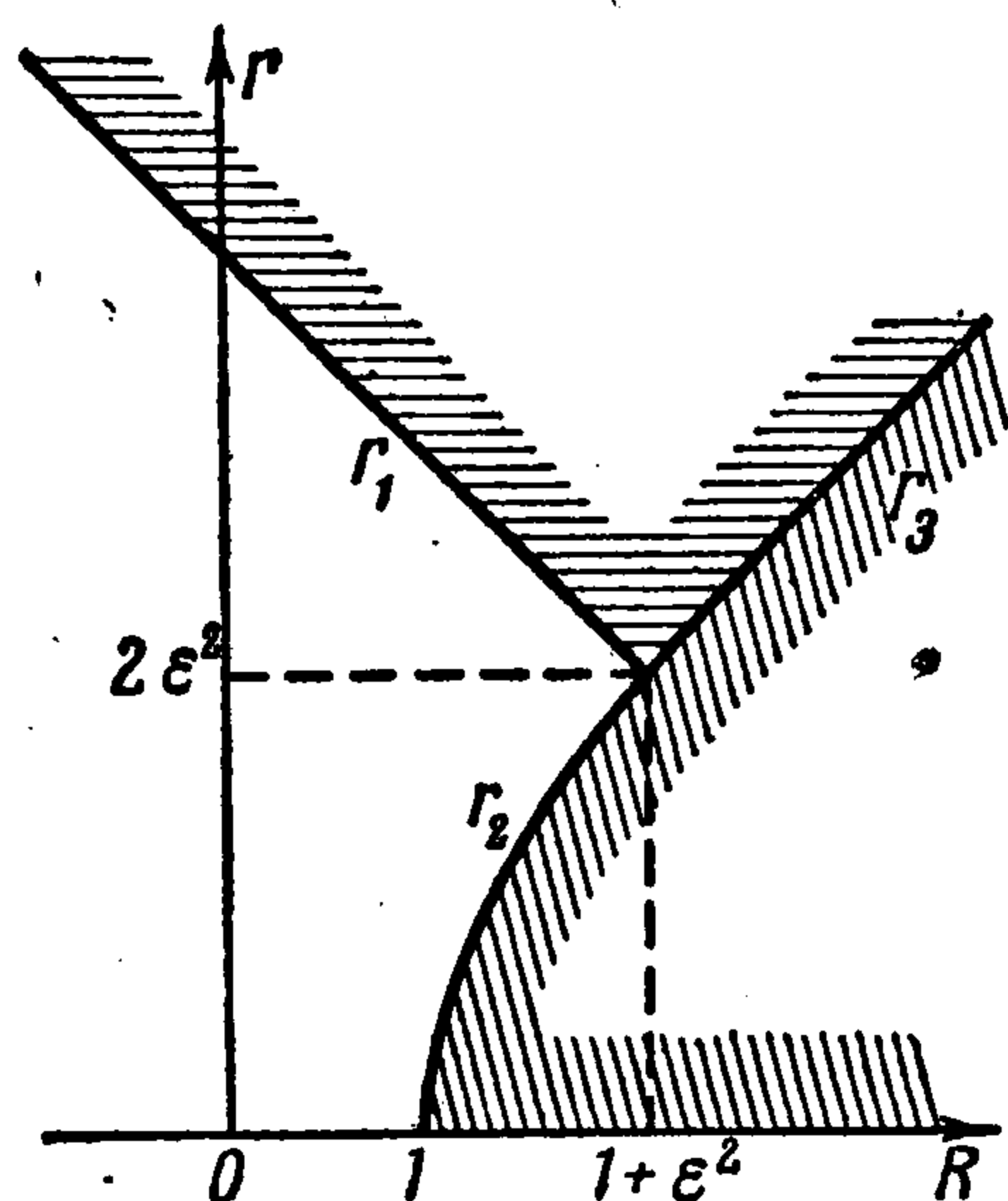
На фиг. 5 изображены пороговые значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  в зависимости от  $R$ . Из (3.2) и (3.3) можно определить наименьшее критическое значение числа Релея  $R$  в зависимости от амплитуды возбуждения  $r$  в предельном случае малых частот ( $p^{-1} \gg 1$ ). При  $r < 2\varepsilon^2$  критическое значение  $R$  возрастает квадратично с увеличением  $r$ ; при  $r > 2\varepsilon^2$  убывает линейно

$$R = 1 + \frac{r^2}{4\varepsilon^2} \quad (r < 2\varepsilon^2) \quad (3.5)$$

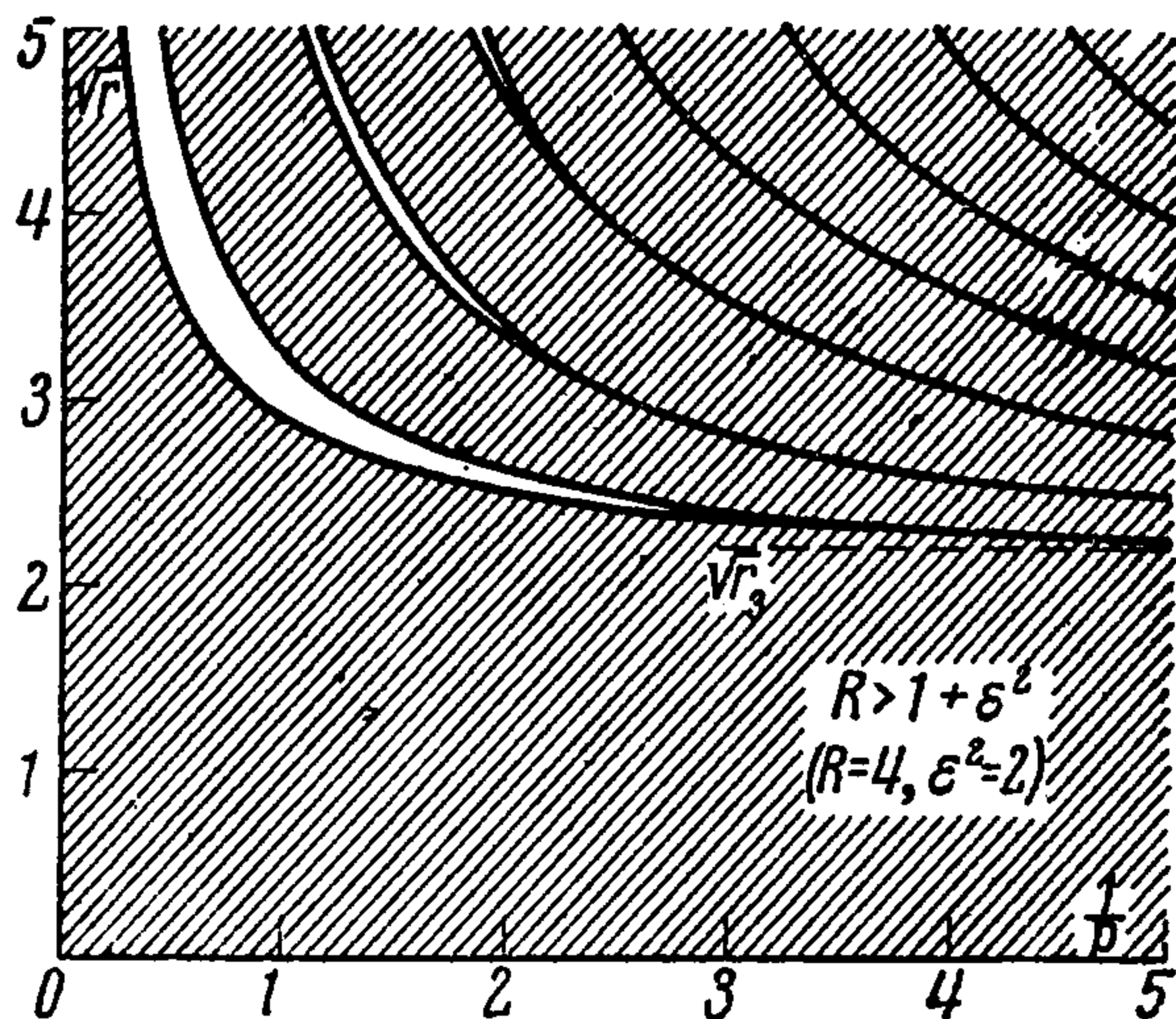
$$R = 1 + 3\varepsilon^2 - r \quad (r > 2\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

Приведем также значение критического числа  $R$  в предельном случае высоких частот ( $p^{-1} \ll 1$ ) и малых амплитуд модуляции ( $r \ll 1$ ). Разлагая левую и правую части (2.7) в ряд по степеням  $1/p$  и  $r$ , найдем

$$R = 1 + \frac{r^2}{12p^2} \quad (3.7)$$



Фиг. 5



Фиг. 4

Из полученных результатов видно, что периодическая модуляция градиента температуры существенно влияет на условия возникновения конвекции. Устойчивость или неустойчивость равновесия определяется не только средним градиентом температуры, но и сложным образом зависит от амплитуды и частоты модуляции. При определенных условиях эта зависимость имеет резонансный характер. Представляет интерес экспериментальное исследование конвективной устойчивости нестационарного равновесия жидкости, в особенности в случае периодической модуляции равновесного градиента температуры. В эксперименте едва ли возможно в чистом виде реализовать те условия, которые в данной работе были приняты в качестве упрощающих предположений: прямоугольная модуляция, свободные поверхности, отсутствие скин-эффекта. Можно думать, однако, что качественные выводы малочувствительны к этим предположениям.

Заметим в заключение, что аналогичные эффекты должны наблюдаться и при возникновении гидродинамической неустойчивости движения жидкости. Так, в работе [6] экспериментально наблюдалось влияние модуляции угловой скорости на устойчивость движения жидкости между вращающимися цилиндрами.

Поступила 27 V 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1953.
2. Rayleigh Lord. On convection currents in a horizontal layer of fluid. Phil. Mag., 1916, vol. 32, p. 529.
3. Андронов А. А., Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. ЖРФХО, ч. физ., 1927, т. 59, вып. 5—6.
4. Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, 1935.
5. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1953.
6. Donnelly R. J., Reiff F., Suhl H. Enhancement of hydrodynamic stability by modulation. Phys. Rev. Letters, 1962, vol. 9, № 9, p. 363.