Прикладная математика и механика. Т. XXVII, 1963

ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

М. Д. Ладыженский
(Москва)

Рассматривается обтекание тонкого тела гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа в случае, когда толщина пограничного слоя сравнима с толщиной тела или превосходит ее, что, согласно терминологии [1], соответствует режиму умеренного или сильного взаимодействия невязкого потока с пограничным слоем.

На основе анализа уравнений Навье — Стокса с той же относительной погрешностью Δ, с какой выводятся уравнения пограничного слоя в плоском и осесимметрическом течениях, выведены уравнения и сформулированы граничные условия для случая пространственного течения около заостренного тела. Несмотря на то, что относительное изменение давления поперек области, где существенны силы вязкости, имеет порядок Δ, существенной особенностью рассматриваемой задачи является необходимость учета этого изменения, в противоположность плоской и осесимметрической задачам.

Плоское и осесимметрическое гиперзвуковые течения [2-4] около тонкого тела разделяются достаточно четко на невязкий поток и пограничный слой; пространственное течение аналогичным образом разделяется на вязкое и невязкое.

Вследствие того, что в области вязкого течения давление в основном зависит только от координаты x, отсчитываемой по потоку, невязкий поток с допустимой погрешностью теории Δ будет осесимметрическим. Доказательство аналогично приведенному в работе [5]. Из близости невязкого течения к осесимметрическому следует, что отношение подъемной силы, действующей на тело в рассматриваемом случае, к подъемной силе тела в невязком потоке по порядку величин равно Δ, т. е. с принятой точностью может быть принято равным нулю.

В работе указано автомодельное решение полученной системы уравнений пространственного течения, которое является обобщением известного точного решения [6] уравнений осесимметрического пограничного слоя со взаимодействием. Получено асимптотическое решение уравнений автомодельного движения вблизи внешней границы области вязкого течения, что дает возможность доказать корректность поставленной задачи. В заключение рассмотрен случай обтекания тела вращения под углом атаки, много меньшим относительной толщины тела, когда возможна линеаризация относительно осесимметрического течения. В п. п. 1—3 подробно рассматривается обтекание заостренного тела, в п. 4 рассмотрен случай тела с малым затуплением.

1. Рассматривается обтекание тонкого тела произвольного поперечного сечения (все поперечные размеры много меньше длины тела), в частности тела вращения под углом атаки, гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. Используется цилиндрическая система координат x, r, ω, где ось x параллельна вектору скорости U_∞ невозмущенного потока и проходит через переднюю точку тела, r — радиус-вектор, ω — полярный угол, координаты x и r выражены в долях длины тела L. Предполагается, что уравнение поверхности тела имеет вид $r = \tau R_b(x, \omega)$, где $R_b \sim 1$ — заданная функция, $\tau \ll 1$ (в частном случае обтекания тонкого тела вращения под малым углом атаки относительная толщина тела и угол атаки имеют один и тот же порядок малости τ).

Введены следующие обозначения: uU_∞, vU_∞ и wU_∞—соответственно осевая (вдоль x), радиальная (вдоль r) и окружная составляющие скорости, $\rho\rho_\infty$ — плотность (ρ_∞ — плотность набегающего потока), $p\rho_\infty U_\infty^2$ — давление, HU_∞^2 — энтальпия торможения, $\mu\mu_0$ — коэффициент вязкости (μ_0 — коэффициент вязкости, соответствующий температуре торможения невозмущенного потока). Газ, по предположению, является совершенным, имеющим постоянное значение показателя адиабаты $\varkappa$.

Уравнения импульсов, уравнения неразрывности, энергии и состояния записываются соответственно в виде

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{4}{3R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{rR_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{R_0r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)-\frac{2}{3R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mu}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right]+\frac{1}{R_0r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3R_0r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)+$$
$$+\frac{1}{R_0r}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\tag{1.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega}-\frac{w^2}{r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{2}{3R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{4}{3R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{2}{3R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu v}{r}\right)+\frac{1}{R_0r}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)-$$
$$-\frac{2}{3R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right]+\frac{1}{R_0r}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{2\mu v}{r}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)\tag{1.2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{vw}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\omega}=\frac{1}{rR_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial w}\right)-\tag{1.3}$$
$$-\frac{2}{3rR_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)-\frac{2}{3rR_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right]+\frac{4}{3r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)+\frac{4}{3r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\omega}(\mu v)+\frac{2\mu}{r^2R_0}\frac{\partial v}{\partial\omega}+\frac{2\mu}{R_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)$$

$$\frac{\partial(\rho ru)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho rv)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial\omega}=0\tag{1.4}$$

$$\rho u\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{\rho w}{r}\frac{\partial H}{\partial\omega}=\frac{1}{rR_0}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{H}{\sigma}+\left(1-\frac{1}{2\sigma}\right)(u^2+v^2+w^2)\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{r^2R_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{H}{\sigma}+\left(1-\frac{1}{2\sigma}\right)(u^2+v^2+w^2)\right]\right\}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H}{\sigma}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-\frac{1}{2\sigma}\right)(u^2+v^2+w^2)\right]\right\}-\frac{1}{rR_0}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\mu\left[\left(\frac{\partial rw}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)\frac{w}{r}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)u\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{rR_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\mu\left[u\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\omega}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{v}{r}\left(\frac{\partial rw}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)\right]\right\}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-w\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\omega}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\right\}-\frac{2}{3rR_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu rv\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rv}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]-\tag{1.5}$$
$$-\frac{2}{3rR_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\mu w\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rv}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{3R_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu u\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rv}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]$$

$$p=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\rho h,\ \mu=\mu\left(\frac{h}{h_0}\right),\ h=H-\frac{u^2+v^2+w^2}{2},\ h_0=\frac{1}{2},\ R_0=\frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_0}\tag{1.6}$$

Здесь R_0 — число Рейнольдса, подсчитанное по температуре торможения невозмущенного потока.

Уравнение поверхности, разделяющей вязкий поток и пограничный слой, представится в виде $r=\delta R_\delta(x,\omega)$, где $\delta\ll 1$, $R_\delta\sim 1$. Предполагается, что ширина области δ, где существенны диссипативные процессы, сравнима [1] или превышает по порядку величин толщину тела; $\delta \gtrsim \tau$ (при этом выполняется условие $M_\infty\delta \gtrsim 1$), т. е. имеет место умеренное или сильное взаимодействие невязкого потока с пограничным слоем [1].

Ввиду малости плотности в области вязкого течения можно утверждать, что невязкий поток обтекает тело, поверхность которого совпадает с R_δ. Из теории малых возмущений гиперзвукового потока [1] следует, что ширина области возмущенного невязкого потока также имеет порядок δ. Отсюда для независимых переменных во всей области возмущенного потока имеем: $x \sim 1$, $r \sim \delta$, $\omega \sim 1$. Составляющая скорости u вдоль оси x всюду имеет порядок единицы. Используя приведенные оценки и приравняв по порядку величин второй и третий члены в уравнении неразрывности (1.4) первому, получаем для двух остальных составляющих скорости $v \sim \delta$, $w \sim \delta$ всюду в области возмущенного потока.

Исходя из свойств невязкого гиперзвукового обтекания, получаем для давления оценку $p \sim \delta^2$. Как известно [3, 4], в пограничном слое при гиперзвуковых скоростях энтальпия $h \cong H - u^2/2$ даже при сильном охлаждении обтекаемой поверхности имеет порядок энтальпии торможения невозмущенного потока: $h \sim {}^1/_2$ (отсюда следует $\mu \sim 1$). Используя указанные выше оценки для давления и энтальпии, из уравнения состояния (1.6) получаем $\rho \sim \delta^2/\varepsilon$, где $\varepsilon = (\varkappa - 1) / 2\varkappa$. Потребуем, чтобы погрешность теории была $\Delta = \delta^2 / \varepsilon \ll 1$. Приравняв по порядку величин один из конвективных членов (все они одного порядка) и один из наибольших вязких членов в уравнении (1.1), с учетом проведенных выше оценок ($u \sim 1$, $x \sim 1$, $\rho \sim \delta^2 / \varepsilon$, $\mu \sim 1$) имеем для области вязкого течения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{rR_0} \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad \frac{\delta^2}{\varepsilon} \sim \frac{1}{R_0 \delta^2}, \qquad \delta \sim \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^{1/4} \tag{1.7}$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) получаем, что составляющие градиента давления в радиальном и окружном направлениях имеют одинаковый порядок малости. Отсюда следует оценка для перепада давления Δp между любыми двумя точками в плоскости $x = \mathrm{const}$, лежащими в области вязкого течения (расстояние между этими точками, очевидно, по порядку величин не превышает δ)

$$\frac{\partial p}{\partial r} \sim \rho u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\delta^3}{\varepsilon}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \omega} \sim \rho u \frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{\delta^3}{\varepsilon}, \qquad \Delta p = \int \left(\frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial \omega} d\omega\right) \sim \frac{\delta^4}{\varepsilon} \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует, что $\Delta p / p \sim \delta^4 / \varepsilon\delta^2 \sim \delta^2 / \varepsilon = \Delta$, т. е. с допустимой погрешностью Δ давление можно считать зависящим только от x.

Следовательно, невязкий поток с этой же погрешностью должен быть осесимметричным, так как в области вязкого потока не могут существовать значительные изменения давления в окружном направлении.

---

[1] Если говорить о режиме $\delta \sim \tau$, то в частном случае обтекания тела вращения выполнения этого условия при нулевом угле атаки еще недостаточно для того, чтобы излагаемая теория была справедлива при наличии угла атаки $\alpha \sim \tau$. Необходимо требовать, чтобы условие $\delta \sim \tau$ выполнялось именно при наличии угла атаки во всех меридиональных плоскостях.

2. При выводе исходных уравнений и записи граничных условий не будем пользоваться малостью величины ε. Определим δ равенством $\delta = R_0^{-1/4}$. Представим независимые переменные и искомые функции для области вязкого течения в виде

$$x = x_0, \quad r = \delta r_0, \quad \omega = \omega_0, \quad u = u_0(x_0, r_0, \omega_0), \quad v = \delta v_0(x_0, r_0, \omega_0)$$
$$w = \delta w_0(x_0, r_0, \omega_0), \quad p = \delta^2 p_0(x_0) + \delta^4 p_1(x_0, r_0, \omega_0)$$
$$\rho = \delta^2 \rho_0(x_0, r_0, \omega_0), \quad H = H_0(x_0, r_0, \omega_0), \quad \delta = R_0^{-1/4} \tag{2.1}$$

где величины с индексами 0, 1 имеют порядок единицы.

Давление представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых, как следует из дальнейшего, входит в уравнения. Внешняя граница области вязкого течения, уравнение поверхности которой $r = \delta R_\delta(x, \omega)$, принимается за границу эффективного тела, обтекаемого невязким потоком. С относительной погрешностью порядка δ^2 невязкий поток должен быть осесимметрическим. Поэтому уравнение поверхности, разделяющей вязкое и невязкое течения, можно представить в виде

$$r = \delta R_\delta(x) + \delta^3 R_1(x, \omega) \quad \text{или} \quad r_0 = R_\delta(x_0) + o(\delta^2) \tag{2.2}$$

Влиянием притупленности эффективного тела (2.2) будем пренебрегать. К гиперзвуковому потоку, обтекающему эффективное тело (2.2) толщины порядка δ, применяется известная аналогия с нестационарным движением [1], справедливая с относительной погрешностью δ^2. С этой погрешностью, очевидно, величину $w \sim \delta^3$ в уравнениях невязкого течения можно положить равной нулю. Используя оценки для невязкого обтекания тонкого тела [1], имеем

$$u = 1 + o(\delta^2), \quad v = \delta v_0(x_0, r_0), \quad w = o(\delta^3) \approx 0$$
$$p = \delta^2 p_0(x_0, r_0), \quad \rho = \rho_0(x_0, r_0), \quad H = 1/2 \tag{2.3}$$

где величины с индексом 0 имеют порядок единицы, независимые переменные x, r, ω трансформируются согласно уравнению (2.1). Уравнение ударной волны с принятой точностью запишется $r = \delta R_s(x)$ или $r_0 = R_s(x_0)$.

Уравнения невязкого осесимметрического обтекания, после перехода согласно (2.3) к переменным с индексом 0, который для краткости опускается, запишутся в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho r}{\partial x} + \frac{\partial \rho r v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^{\varkappa}} + v\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = 0 \tag{2.4}$$

Граничные условия принимают вид (штрихом обозначаем производную по x). На ударной волне $r = R_s(x)$

$$v = \frac{2}{\varkappa+1} R_s' \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \delta^2 R_s'^2}\right), \quad p = \frac{2R_s'^2}{\varkappa+1}\left(1 - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa M_\infty^2 \delta^2 R_s'^2}\right)$$
$$\rho = \frac{(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)}\left(1 + \frac{2}{\varkappa-1}\frac{1}{M_\infty^2\delta^2 R_s'^2}\right) \tag{2.5}$$

на поверхности эффективного тела $r = R_\delta(x)$ ставится условие непротекания: $v = R_\delta'(x)$.

Отбрасывая в уравнениях вязкого течения (1.1) — (1.6) члены, отношение которых к оставленным имеет порядок δ^2, в новых переменных (2.1) имеем (индекс o опускается для краткости)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\omega}\right) \qquad (2.6)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega}-\frac{w^2}{r}\right)+\frac{\partial p_1}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu v}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right]+\frac{1}{r}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{2\mu v}{r}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}\right) \qquad (2.7)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{vw}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial\omega}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)-\frac{2}{3r}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial w}\right)-\frac{2}{3r}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right]+\frac{4}{3r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)+$$
$$+\frac{4}{3r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(\mu v)+\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\omega}+2\mu'\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\rho r u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho r v)}{\partial r}+\frac{\partial\rho w}{\partial\omega}=0 \qquad (2.9)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial H}{\partial\omega}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\mu}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial\omega}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)r\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\mu\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] \qquad (2.10)$$

$$p=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\rho h,\qquad \mu=\mu\left(\frac{h}{h_0}\right),\quad h=H-\frac{u^2}{2},\qquad h_0=\frac{1}{2} \qquad (2.11)$$

В случае осесимметрического течения, когда $w=0$, $\partial/\partial\omega=0$, уравнение (2.6), в котором давление следует с принятой точностью считать зависящим только от x, и уравнения (2.9), (2.10), (2.11) составляют замкнутую систему уравнений пограничного слоя с учетом поперечной кривизны. После решения этих уравнений из уравнения (2.7) может быть найдено изменение давления поперек пограничного слоя p_1. Уравнение (2.8) при этом удовлетворяется тождественно. При отсутствии осевой симметрии уравнения (2.7) и (2.8) решаются совместно с остальными.

На теле, уравнение которого $r_0=(\tau/\delta)R_b\,(x_0,\omega_0)$, выполняются обычные условия прилипания и равенства температуры газа и стенки (или условие для теплового потока к стенке) (2.12)

$$u=0,\ v=0,\ H=h_b(x,\omega)\ (\text{или}\ \partial H/\partial n=N_b(x,\omega)\ \text{при}\ r=\frac{\tau}{\delta}R_b(x,w)$$

Здесь $h_b(x,\omega)$ — отнесенная к U_∞^2 энтальпия, соответствующая заданному распределению температуры поверхности тела (соответственно $N_b(x,\omega)$ — заданное распределение теплового потока на поверхности $R_b\,(x,\omega)$, $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности тела).

На границе между вязким и невязким течениями, учитывая оценки (2.3), с принятой точностью имеем

$$u=1,\qquad v=R_\delta'(x),\qquad w=0,\qquad H={}^1/_2\quad \text{при}\ r=R_b(x) \qquad (2.13)$$

Внутри области вязкого течения $h \sim 1$, а вне ее $h \sim \delta^2$, поэтому погрешность, которая делается, если положить $h = 0$ на границе, не превышает допустимую. Условие $h = 0$ на границе пограничного слоя в плоском и осесимметрическом потоках анализировалось в работах [2—4]. Условие (2.13) для радиальной составляющей скорости v следует из требования отсутствия расхода через поверхность $r = R_\delta(x)$.

Помимо (2.13) потребуем, чтобы при приближении к поверхности $r = R_\delta(x)$ со стороны вязкого течения вязкие напряжения и тепловые потоки стремились к нулю

$$\lim \mu \frac{\partial u}{\partial x} = \lim \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \lim \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \lim \mu \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\lim \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \lim \mu \frac{\partial v}{\partial r} = \lim \mu \frac{\partial w}{\partial r} = \lim \mu \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r \to R_b \tag{2.14}$$

Запись в виде предельных соотношений обусловлена тем, что на особой поверхности $r = R_\delta(x)$ производные по r от искомых величин обращаются в бесконечность (см. п. 5).

Схема решения задачи такова: задаемся функцией $r = R_\delta(x)$ и с учетом условия непротекания и условий на ударной волне (2.5) решаем невязкую задачу (2.4), определяя давление p на поверхности $r = R_\delta(x)$ как функционал от $R_\delta(x)$. (В частном случае применимости формулы Ньютона имеем просто $p = R_\delta'^2$.) Подставляя найденное значение p в уравнение (2.6) и решая систему (2.6) — (2.11) с граничными условиями (2.12) — (2.14), определяем вязкое течение и находим $R_\delta(x)$. В соответствии с законами подобия для вязкого гиперзвукового течения [3, 4], используя удобную форму записи [8], получаем, что решение зависит от четырех безразмерных параметров $K_1 = M_\infty \delta, K_2 = \tau^2/\delta^2 = \tau^2\sqrt{R_0}$, $\varkappa$, σ и двух функций $R_b(x,\omega)$, $h_b(x,\omega)$ (или $N_b(x,\omega)$). При стремлении $M_\infty \to \infty$ решение перестает зависеть от K_1.

Система уравнений (2.6) — (2.10) второго порядка по u, v, w, H и первого порядка по p_1 (плотность ρ выражается через H согласно уравнению (2.11)). Кроме того, решение через p и граничные условия зависит от одной неизвестной функции $R_\delta(x)$. Всего, таким образом, решение исходной системы зависит от 10 произвольных функций. Одна из этих функций, зависящая от x, в качестве слагаемого входит в решение для p_1, поскольку величина p_1 стоит под знаком производной по r и ω в уравнениях (2.7) и (2.8) и на p_1 не накладывается никаких граничных условий. Эта функция, имеющая тот же порядок величины, что и p_1, может быть в принципе определена из решения в следующем приближении. Ее наличие никак не сказывается на решении для остальных параметров течения — u, v, w, p, ρ, H. Эта функция не влияет также на величины определяемых из решения силы сопротивления (вследствие малости этой функции) и подъемной силы (ввиду того, что она дает осесимметрический добавок к p_1). Для определения остальных девяти произвольных функций имеются граничные условия (2.12), (2.13), (2.14), которых как раз хватает для полного решения задачи, что будет показано в п. 5 на примере автомодельного решения.

3. Для определения порядков величин действующих на тело сил окружим тело контрольной поверхностью в виде цилиндра с образующими, параллельными вектору скорости U_∞ невозмущенного потока и торцевыми плоскостями, перпендикулярными U_∞. Задняя торцевая поверхность удалена от передней точки тела на расстояние, равное длине тела L. Введем вместо цилиндрической декартову систему координат Lx, Ly, Lz, где ось x направлена по потоку. Пусть u_xU_∞, u_yU_∞, u_zU_∞ — соответствующие компоненты скорости, остальные обозначения согласно п. 1.

Для составляющих скорости имеем $v \sim \delta, w \sim \delta$ — всюду, в невязком потоке $u = 1 + o(\delta^2)$ и $u \sim 1$ — в вязком.

Записывая уравнения импульса вязкого газа в дивергентной форме и применяя формулу Остроградского к объему газа, заключенному между контрольной поверхностью и поверхностью тела, получим для сил X, Y, Z, действующих в направлении осей координат, выражения

$$\frac{X}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} = \iint\limits_S \left(1 - \rho u_x^2 + \frac{1}{\varkappa M_\infty^2} - p + \tau_{xx}\right) dS \tag{3.1}$$

$$\frac{Y}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} = \iint\limits_S (-\rho u_x u_y + \tau_{xy})\, dS, \qquad \frac{Z}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} = \iint\limits_S (-\rho u_x u_z + \tau_{xz})\, dS$$

Здесь интегралы берутся по площади S задней торцевой плоскости, заключенной между телом и ударной волной, τ_{xx}, τ_{xy} и τ_{xz} — отнесенные к $\rho_\infty U_\infty^2$ компоненты тензора вязких напряжений.

Каждая из сил X, Y, Z представляет собой сумму сил давления и трения. Обозначим через S_* и S_{**} площади поперечного сечения областей невязкого и вязкого потока соответственно (очевидно, $S = S_* + S_{**}$). Применяя уравнение расхода к торцевым поверхностям контрольной поверхности, имеем

$$S_* + S_{**} = \iint\limits_{S_*} \rho u_x dS + \iint\limits_{S_{**}} \rho u_x dS \tag{3.2}$$

Используя оценки, приведенные в п. 1, имеем с учетом $S_* \sim S_{**} \sim \delta^2$

$$S_* + S_{**} = \iint\limits_{S_*} \rho dS + o\left(\frac{\delta^4}{\varepsilon}\right) \tag{3.3}$$

Пользуясь уравнением (3.3), оценим входящий в выражение для X интеграл

$$\iint\limits_S (1 - \rho u_x^2)\, dS = S_* + S_{**} - \iint\limits_{S_*} \rho u_x^2\, dS - \iint\limits_{S_{**}} \rho u_x^2 dS = S_* + S_{**} - \\ - \iint\limits_{S_*} \rho dS + o\left(\frac{\delta^4}{\varepsilon}\right) \sim \frac{\delta^4}{\varepsilon} \tag{3.4}$$

Оценивая остальные величины, получим

$$\tau_{xx} \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{L} \frac{1}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{R_0} \sim \frac{\delta^4}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{M_\infty^2} \lesssim \delta^2, \quad p \sim \delta^2, \quad \frac{X}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} \sim \frac{\delta^4}{\varepsilon} \tag{3.5}$$

Для вычисления подъемной силы Y оценим интеграл

$$\iint\limits_S \rho u_x v_y dS = \iint\limits_{S_*} \rho u_x v_y dS + \iint\limits_{S_{**}} \rho u_x v_y dS \sim \frac{\delta^3}{\varepsilon}\delta^2 + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\delta^3 \sim \frac{\delta^5}{\varepsilon} \tag{3.6}$$

Интеграл по S_* разбивается на два, по полукольцу $y > 0$ и по полукольцу $y < 0$. Хотя каждый из этих интегралов имеет порядок δ^3, в сумме они, будучи разного знака, дадут величину δ^5 / ε в результате того, что невязкий поток является осесимметрическим с относительной погрешностью δ^2 / ε. Интеграл по S_{**} оценивается обычным образом по значениям подынтегральных величин. Оценивая τ_{xy}, имеем для Y и для Z

$$\tau_{xy} \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{L\delta} \frac{1}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{R_0 \delta} \sim \frac{\delta^3}{\varepsilon}, \qquad \frac{Y}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} \sim \frac{Z}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} \sim \frac{\delta^5}{\varepsilon} \quad (\delta \gtrsim \tau) \tag{3.7}$$

В случае обтекания тонкого тела толщины τ под углом атаки $\alpha \sim \tau$, когда толщина области вязкого течения мала по сравнению с толщиной тела, давление в окружном направлении меняется на свой основной порядок. При этом для Y и Z имеем

$$\frac{Y}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} \sim \frac{Z}{\rho_\infty U_\infty^2 L^2} \sim \tau^3, \qquad [Y]_{\delta \gtrsim \tau} \sim \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left(\frac{\delta}{\tau}\right)^3 [Y]_{\delta \ll \tau} \approx 0$$
$$[Z]_{\delta \gtrsim \tau} \sim \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left(\frac{\delta}{\tau}\right)^3 [Z]_{\delta \ll \tau} \approx 0 \tag{3.8}$$

Если считать $\delta \sim \tau$, то с погрешностью порядка δ^2 / ε подъемной и боковой силами по сравнению с соответствующими величинами при отсутствии влияния вязкости можно пренебречь, т. е. считать $Y = Z = 0$.

Если оценок (3.8) недостаточно и требуется определить Y и Z при $\delta \gtrsim \tau$, то это можно сделать после решения задачи, сформулированной в п. п. 1, 2. При вычислении X, Y, Z нужно учитывать не только влияние сил давления (подъемная и боковая силы создаются за счет добавка к давлению Δp, зависящего от r и ω и имеющего, согласно (1.8), порядок δ^4/ε), но и сил трения, так как здесь эти силы одного порядка.

4. В случае обтекания тонкого слабозатупленного тела (Ld — диаметр затупления) образуется слой газа малой плотности (энтропийный слой). Если этот слой можно считать вязким, справедлива без изменений изложенная выше теория. Для случая невязкого энтропийного слоя, предполагая, что его толщина νL удовлетворяет неравенству $\nu \gtrsim \delta \gtrsim \tau$, из уравнений расхода и изэнтропичности получаем оценку для ν

$$d^2 \sim \rho u_x \nu^2, \qquad \rho \sim \frac{p^{1/\varkappa}}{\varepsilon} \sim \frac{\nu^{2/\varkappa}}{\varepsilon} (p \sim \nu^2,\ u_x \sim 1), \qquad \nu \sim \varepsilon^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}} d^{\frac{\varkappa}{\varkappa+1}} \tag{4.1}$$

В работе [5], где была получена эта оценка, принято $\varepsilon \sim 1$. Перепад давлений Δp поперек энтропийного слоя [5] есть $\Delta p \sim \nu^{2/\varkappa} / \varepsilon$. Для пограничного слоя $\Delta p \sim \delta^2 / \varepsilon$. Таким образом, поперек всей области, занятой пограничным и энтропийным слоями, толщина которой

$$\nu + \delta \sim \varepsilon^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}} d^{\frac{\varkappa}{\varkappa+1}} + \left(\frac{\varepsilon}{R_0}\right)^{1/4} \tag{4.2}$$

давление с погрешностью, не превышающей $\nu^{2/\varkappa} / \varepsilon$, постоянно. С этой погрешностью при угле атаки $\alpha \lesssim \nu + \delta$ подъемная сила, действующая на тело, равна нулю.

5. Предположим, что $M_\infty = \infty$, температура поверхности тела постоянна, или тело теплоизолированно. Выведенные в п. 2 уравнения в случае, когда поверхность тела (2.12) задана в виде $R_b(x, \omega) = \chi_b(\omega)\, x^{3/4}$, допускают автомодельное решение, являющееся обобщением решения [6] для осесимметрического течения (при $\chi_b = \mathrm{const}$). Пользуемся переменными (2.1), опуская индекс 0. Уравнение внешней границы области вязкого течения ищем в виде $R_\delta(x) = \eta_\delta x^{3/4}$, где η_δ — подлежащая определению постоянная величина. Уравнения (2.4) невязкого осесим-

метрического течения с граничными условиями (2.5) имеют автомодельное решение [9], для которого давление p на поверхности $R_\delta = \eta_\delta x^{3/4}$ записывается

$$p = \Psi(\varkappa)\left(\frac{dR_\delta}{dx}\right)^2 = \frac{9\Psi(\varkappa)}{16}\frac{\eta_\delta^2}{\sqrt{x}} = \frac{c\eta_\delta^2}{\sqrt{x}} \tag{5.1}$$

Согласно расчетам [10], $\Psi = 1.274$ и $c = 0.51$ при $\varkappa = 1.4$. Уравнение (5.1) дает функциональную связь между p и R_δ. Остальные искомые функции в уравнениях (2.6) — (2.11) ищем в виде

$$\begin{gathered} u = U(\eta,\omega), \qquad v = x^{-1/4}V(\eta,\omega), \qquad w = x^{-1/4}W(\eta,\omega) \\ \rho = x^{-1/4}R(\eta,\omega), \qquad H = H(\eta,\omega), \quad p_1 = P_1/x, \qquad \eta = r/x^{3/4} \end{gathered} \tag{5.2}$$

Уравнения (2.6) — (2.11) примут следующий вид

$$R\left(V - \frac{3}{4}U\eta\right)\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{W}{\eta}\frac{\partial U}{\partial\omega} - \frac{c\eta_\delta^2}{2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\eta\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial\omega}\right) \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} R\left(V - \frac{3}{4}U\eta\right)\frac{\partial V}{\partial\eta} + R\left(\frac{W}{\eta}\frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{UV}{4} - \frac{W^2}{\eta}\right) + \frac{\partial P_1}{\partial\eta} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\eta\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \\ + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu V}{\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\eta}\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{W}{\eta}\right)\right] + \frac{2\mu}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V}{\eta}\right) - \frac{2\mu}{\eta^2}\frac{\partial W}{\partial\omega} \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} R\left(V - \frac{3}{4}U\eta\right)\frac{\partial W}{\partial\eta} + R\left(\frac{W}{\eta}\frac{\partial W}{\partial\omega} - \frac{UW}{4} + \frac{VW}{\eta}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial P_1}{\partial\omega} = -\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial\omega}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{\eta}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) - \frac{2}{3\eta}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\mu\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{W}{\eta}\right] + \\ + \frac{4}{3\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial\omega}\right) + \frac{4}{3\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(\mu V) + \frac{2\mu}{\eta^2}\frac{\partial V}{\partial\omega} + 2\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{W}{\eta}\right) \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(RV\eta) + \frac{\partial(RW)}{\partial\omega} - \frac{3\eta^2}{4}\frac{\partial(RU)}{\partial\eta} - \frac{\eta RU}{2} = 0 \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} R\left(V - \frac{3}{4}U\eta\right)\frac{\partial H}{\partial\eta} + \frac{W}{\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu\eta}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial\omega}\right) + \\ + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\mu\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{U^2}{2}\right] + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\mu\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{U^2}{2}\right] \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$c\eta_\delta^2 = \frac{(\varkappa - 1)}{\varkappa}Rh, \qquad \mu = \mu\left(\frac{h}{h_0}\right), \qquad h = H - \frac{U^2}{2}, \qquad h_0 = \frac{1}{2} \tag{5.8}$$

Граничные условия на теле (2.12) и на границе вязкого слоя (2.13), (2.14) принимают соответственно вид

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0, \qquad H = h_b \qquad \text{при } \eta = (\tau/\delta)\chi_b(\omega) \tag{5.9}$$

$$\begin{gathered} U = 1, \qquad V = {}^3/_4\eta_\delta, W = 0, \qquad H = {}^1/_2 \\ \lim\mu\frac{\partial U}{\partial\eta} = \lim\mu\frac{\partial V}{\partial\eta} = \lim\mu\frac{\partial W}{\partial\eta} = \lim\mu\frac{\partial H}{\partial\eta} = 0 \quad \text{при } \eta \to \eta_b \end{gathered} \tag{5.10}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения вблизи внешней границы области вязкого течения, ограничиваясь для простоты случаем, когда число Прандтля $\sigma = 1$ и коэффициент вязкости линейно зависят от энтальпии $\mu = 2H - U^2$. На основании (5.10) вблизи $\eta = \eta_\delta$ можно ввести малые величины (характеризуем их индексом $_*$), стремящиеся к нулю при $\eta_* \to 0$

$$\eta = \eta_\delta + \eta_*, \qquad H = {}^1/_2 + H_*$$
$$U = 1 + U_*, \qquad V = {}^3/_4\eta_\delta + V_*, \qquad W = W_* \tag{5.11}$$

При этом $R \to \infty$ при $\eta_* \to 0$. Предположим (это будет подтверждено в дальнейшем), что все величины с индексом $_*$ имеют одинаковый порядок малости $o(\eta_*)$, так что производные от этих величин по η_* имеют порядок единицы. Дифференцирование по ω не меняет порядка величины. Из уравнения (5.8) следует $R \sim \eta_*^{-1/2}$; учитывая линейный характер зависимости $\mu(\eta)$, получаем $\mu \sim \eta_*$. Подставляя выражения (5.11) в уравнения (5.3) — (5.8) и пренебрегая величинами порядка η_* по сравнению с единицей, получим, что система уравнений разбивается на две группы, которые можно решать последовательно. Введем обозначение

$$V_\times = R\left(V_* - \frac{3\eta_*}{4} - \frac{3\eta_\delta U_*}{4}\right) \tag{5.12}$$

Уравнения (5.3), (5.6), (5.7), (5.8) представим в виде

$$V_\times \frac{\partial U_*}{\partial \eta_*} - \frac{c\eta_\delta^2}{2} = \frac{\partial}{\partial \eta_*}\left(\mu \frac{\partial U_*}{\partial \eta_*}\right), \qquad \frac{\partial V_\times}{\partial \eta_*} + R = 0, \qquad V_\times \frac{\partial H_*}{\partial \eta_*} = \frac{\partial}{\partial \eta_*}\left(\mu \frac{\partial H_*}{\partial \eta_*}\right)$$
$$c\eta_\delta^2 = R\,(H_* - U_*)\,(\varkappa - 1)\,/\,\varkappa, \qquad \mu = 2\,(H_* - W_*) \tag{5.13}$$

Перейдем от переменных η_*, ω к переменным ζ, ω, где переменная А. А. Дородницына ζ дается равенством

$$\zeta = \int\limits_{\eta_{*1}}^{\eta_*} R\,d\eta_*, \qquad \eta_{*1} = \eta_{*1}(\omega) \tag{5.14}$$

Здесь интеграл берется при постоянном значении ω, $\eta_{*1}(\omega)$ — произвольная функция. Уравнения (5.13) не содержат производных по ω и поэтому легко интегрируются. Из второго уравнения (5.13) получаем

$$\frac{\partial V_\times}{\partial \zeta} + 1 = 0, \qquad V_\times = -\zeta + \gamma(\omega) = -\zeta \tag{5.15}$$

Произвольную функцию $\gamma(\omega)$, появляющуюся в результате интегрирования, без ограничения общности с учетом (5.14) можно принять равной нулю, это приведет лишь к изменению функции $\eta_{*1}(\omega)$. С учетом уравнений (5.12) — (5.15) третье уравнение (5.13) и его решение запишутся

$$\lambda \frac{\partial^2 H_*}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial H_*}{\partial \zeta} = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{2\varkappa c\eta_\delta^2}{\varkappa - 1}\right) \tag{5.16}$$
$$H_* = f_1(\omega)\int\limits_\zeta^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\lambda}\right) d\zeta \approx f_1(\omega)\frac{\exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\zeta}\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2} + \ldots\right)$$

Мы потребовали, чтобы $\eta_* \to 0$ и, следовательно, $H_* \to 0$ при $\zeta \to \infty$. Нетрудно показать, что если ζ остается конечной величиной при $\eta_* \to 0$, то нарушается условие равенства нулю теплового потока и вязких напряжений на границе области вязкого течения. Таким образом, при $\eta_* \ll 1$ имеет место $\zeta \gg 1$, что дает право использовать в (5.16) и ниже асимптотические разложения.

Первое уравнение (5.13) записывается

$$\lambda \frac{\partial^2 U_*}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial U_*}{\partial \zeta} + \varepsilon (H_* - U_*) = 0 \qquad \left(\varepsilon = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\right) \tag{5.17}$$

где H_* выражается согласно (5.16). Частное решение уравнения (5.17), очевидно, $U_* = H_*$. Решение однородного уравнения, зависящее от произвольной функции $f_2(\omega)$, ищем в виде обобщенного степенного ряда по степеням ζ^{-1}, умноженного на $\exp(-\zeta^2 / 2\lambda)$. В результате получаем (с учетом $U_* \to 0$ при $\zeta \to \infty$)

$$U_* = \frac{f_1(\omega) \exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\zeta} \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2} + \ldots\right) + \tag{5.18}$$

$$+ \frac{f_2(\omega) \exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\zeta^{1+\varepsilon}} \left[1 - \frac{\lambda(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{2\zeta^2} + \ldots\right]$$

Пользуясь четвертым уравнением (5.13), находим для плотности

$$R = \frac{\lambda}{2(H_* - U_*)} = -\frac{\lambda \zeta^{1+\varepsilon} \exp(\zeta^2/2\lambda)}{2 f_2(\omega)} \left[1 + \frac{\lambda(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{2\zeta^2} + \ldots\right] \tag{5.19}$$

Из уравнения (5.14) имеем

$$\eta_* = -\int_\zeta^\infty \frac{d\zeta}{R} = \frac{2 f_2(\omega) \exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\zeta^{2+\varepsilon}} \left[1 + \frac{\lambda(2+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{2\zeta^2} + \ldots\right] \tag{5.20}$$

Вследствие обращения ζ в бесконечность при $\eta_* \to 0$ решение не зависит от произвольной функции $\eta_{*1}(\omega)$ в уравнении (5.13).

Из уравнений (5.12), (5.15), (5.18), (5.19) и (5.20) имеем

$$V_* = \frac{3\eta_\delta f_1(\omega)}{4\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\lambda}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta} + \ldots\right) + \tag{5.21}$$

$$+ \frac{2 f_2(\omega) \exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\lambda \zeta^\varepsilon} \left[1 + \frac{3\lambda\eta_\delta}{8\zeta} - \frac{\lambda(\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 0.5)}{2\zeta^2} + \ldots\right].$$

Все функции ω периодические с периодом 2π. Уравнения (5.4) и (5.5) в новых переменных, после пренебрежения величинами порядка η_* по сравнению с единицей, запишутся

$$V_\times \frac{\partial V_*}{\partial \zeta} - \frac{3\eta_\delta}{16} + \frac{\partial P_1}{\partial \zeta} = \frac{4\lambda}{3} \frac{\partial^2 V_*}{\partial \zeta^2}$$

$$R V_\times \frac{\partial W_*}{\partial \zeta} + \frac{R W_*}{2} + \frac{1}{\eta_\delta} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \omega}\right)_{\zeta=\mathrm{const}} + \frac{1}{\eta_\delta} \frac{\partial P_1}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right)_{\eta=\mathrm{const}} = R\lambda \frac{\partial^2 W_*}{\partial \zeta^2} \tag{5.22}$$

Входящая в уравнение (5.5) производная от P_1 по ω при $\eta = \mathrm{const}$ заменена во втором уравнении (5.22) производной по ω при $\zeta = \mathrm{const}$. Интегрируя первое уравнение (5.22) по ζ с учетом (5.15), имеем

$$P_1 = \frac{3\eta_\delta}{16} \zeta + \zeta V_* + \frac{4\lambda}{3} \frac{\partial V_*}{\partial \zeta} - \int V_* d\zeta + \int_0^\omega f_3(\omega)\, d\omega + C \tag{5.23}$$

Произвольную функцию от ω, появляющуюся в результате интегрирования в (5.23), удобно записать в виде суммы интеграла от другой произвольной функции $f_3(\omega)$ и некоторой константы C. Условие замкнутости контура тела с учетом периодичности функций $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ дает

$$P_1(\zeta, 0) = P_1(\zeta, 2\pi) \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} f_3(\omega)\, d\omega = 0 \tag{5.24}$$

Продифференцируем уравнение (5.20) по ω, считая $\eta_* = \text{const}$. В итоге получим

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\right)_\eta = \frac{\lambda}{\zeta f_2(\omega)}\frac{df_2}{d\omega}\left[1-\frac{\lambda(2+\varepsilon)}{\zeta^2}+\ldots\right] \tag{5.25}$$

Используя уравнения (5.15), (5.19), (5.23), (5.25) и пренебрегая величинами порядка η_* по сравнению с единицей, преобразуем второе уравнение (5.22) к виду

$$\lambda\frac{\partial^2 W_*}{\partial\zeta^2}+\zeta\frac{\partial W_*}{\partial\zeta}-\frac{W_*}{2} = -\frac{3}{8\zeta^{2+\varepsilon}}\frac{df_2}{d\omega}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\lambda}\right)\times$$
$$\times\left[1-\frac{\lambda(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)}{2\zeta^2}+\ldots\right]-\frac{2f_3(\omega)f_2(\omega)}{\lambda\eta_\delta\zeta^{1+\varepsilon}}\left[1-\frac{\lambda(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{2\zeta^2}+\ldots\right] \tag{5.26}$$

Решение этого уравнения запишется

$$W_* = -\frac{3}{4(1+2\varepsilon)}\frac{df_2}{d\omega}\frac{\exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\zeta^{2+\varepsilon}}\left[1-\frac{\lambda(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)}{2\zeta^2}+\ldots\right]+$$
$$+\frac{4f_3(\omega)f_2(\omega)\exp(-\zeta^2/2\lambda)}{\lambda\eta_\delta(1-2\varepsilon)\zeta^{1+\varepsilon}}\left[1-\frac{\lambda(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)(1-2\varepsilon)(3-2\varepsilon)}{2(1+2\varepsilon)(3+2\varepsilon)\zeta^2}+\ldots\right]+$$
$$+\frac{f_4(\omega)}{\zeta^{3/2}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\lambda}\right)\left(1+\frac{15\lambda}{8\zeta^2}+\ldots\right) \tag{5.27}$$

Полученное асимптотическое решение (5.16), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.23), (5.27) исходных уравнений зависит от четырех функций $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$ и $f_4(\omega)$ и одной постоянной величины η_δ (постоянная C в уравнении (5.23) для P_1, очевидно, не влияет на решение. Эта величина в принципе может быть определена из решения в более высоком приближении. Другими словами, излагаемое решение дает возможность отыскать P_1 с точностью до аддитивной постоянной). Существенно, что $f_3(\omega)$ удовлетворяет условию (5.24). Зависимость решения от одной постоянной величины η_δ и периодической функции $f_3(\omega)$, интеграл от которой по периоду равен нулю, эквивалентна зависимости от некоторой произвольной функции, на которую не наложено никаких условий. Остальные функции $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_4(\omega)$ будут произвольными. Таким образом, асимптотическое решение зависит от четырех произвольных функций. Но на теле имеется равно столько же граничных условий (5.9).

Как следует из полученного решения, все искомые функции, кроме плотности, вблизи $\eta = \eta_\delta$ ведут себя, как $\zeta^\alpha \exp(-\zeta^2/2\lambda) + \text{const}$, что с учетом (5.20) можно переписать $(\eta_\delta - \eta)\,[\ln(\eta_\delta - \eta)]^\alpha + \text{const}$, где α — некоторое число. Таким образом, при $\eta = \eta_\delta$ производные от искомых величин имеют логарифмическую особенность. Плотность $R \sim (\eta_\delta - \eta)^{-1}\ln(\eta_\delta - \eta)$ обращается в бесконечность при $\eta = \eta_\delta$.

После того, как асимптотическое решение получено, его можно уточнить. Условие, согласно которому все величины с индексом $*$ имеют порядок η_*, означает, что эти величины, включая η_*, можно представить в виде произведения $\exp(-\zeta^2/2\lambda)$ на некоторый обобщенный степенной ряд по степеням ζ^{-1}.

При получении асимптотического решения величиной η_*^2 пренебрегалось по сравнению с величиной порядка η_*. Если теперь в правую часть каждого из упрощенных уравнений, например уравнения (5.17), подставить отброшенные члены порядка $\eta_*^2 \sim \exp(-\zeta^2/\lambda)$, найденные из первого приближения, то можно получить добавок к решению, пропорциональный произведению $\exp(-\zeta^2/\lambda)$ на некоторый обобщенный степенной ряд по степеням ζ^{-1}.

Повторяя этот процесс, находим, что асимптотическое решение для U_* имеет следующую структуру:

$$U_* = \sum_{k=0,\, n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}(\omega)}{\zeta^{n+\alpha}} \exp\left[\left(-\frac{\zeta^2}{2\lambda}\right)(1+k)\right], \qquad \alpha = \alpha(k) \tag{5.28}$$

В точности такой же вид имеют асимптотические разложения и для остальных величин с индексом $*$. Разложение для R начинается с $k = -2$. В уравнении (5.28) коэффициенты двойного ряда $a_{nk}(\omega)$ зависят, как легко проверить, от функций $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$, $f_4(\omega)$ и постоянной η_δ

6. Рассмотрим случай обтекания тонкого тела вращения под малым углом атаки $\alpha \ll \tau \lesssim \delta$. При этом возможна линеаризация около решения, соответствующего осесимметрическому обтеканию. Для искомых величин вместо уравнений (2.1) можно записать (6.1)

$$x = x_0, \qquad r = \delta r_0, \qquad \omega = \omega_0, \qquad u = u_0(x_0, r_0) + u_\alpha(x_0, r_0, \omega_0)$$

$$v = \delta v_0(x_0, r_0) + v_\alpha(x_0, r_0, \omega_0), \qquad w = w_\alpha(x_0, r_0, \omega_0)$$

$$p = \delta^2 p_0(x_0) + \delta^4 p_1(x_0, r_0) + p_\alpha(x_0, r_0, \omega_0)$$

$$\rho = \delta^2 \rho_0(x_0, r_0) + \rho_\alpha(x_0, r_0, \omega_0), \qquad H = \delta^2 H_0(x_0, r_0) + H_\alpha(x_0, r_0, \omega_0)$$

Величины с индексом 0 и величина p_1 в выражении для давления, имеющие порядок единицы, соответствуют осесимметрическому течению. Предполагается, что угол α настолько мал, что добавки с индексом α, обусловленные наличием угла атаки, намного меньше, чем основные величины. Уравнение поверхности тела вращения, ось симметрии которого составляет малый угол α с осью x цилиндрической системы координат, запишется в виде

$$r = \tau R_b(x) + R_\alpha(x, \omega) \quad \text{или} \quad r_0 = \frac{\tau}{\delta} R_b(x_0) - \frac{\alpha}{\delta} x_0 \cos\omega_0 \tag{6.2}$$

Сносим граничные условия (2.12), заданные на поверхности (6.2), на поверхность тела при $\alpha = 0$. С учетом того, что величины с индексом 0 удовлетворяют этим же граничным условиям на поверхности тела при $\alpha = 0$, имеем, например, для u, пренебрегая произведениями малых добавков с индексом α

$$u = u_0 + u_\alpha \approx [u_0 + u_\alpha] + \frac{R_\alpha}{\delta}\left[\frac{\partial}{\partial r_0}(u_0 + u_\alpha)\right] \approx [u_\alpha] + \frac{R_\alpha}{\delta}\left[\frac{\partial u_0}{\partial r_0}\right] = 0 \tag{6.3}$$

где квадратные скобки означают, что данная величина берется на поверхности тела при $\alpha = 0$.

Аналогично записываются остальные граничные условия (условие для энтальпии берем в виде $H = h_b$). С учетом (6.2) получаем

$$u_\alpha = \frac{\alpha}{\delta} x_0 \frac{\partial u_0}{\partial r_0} \cos \omega_0, \qquad v_\alpha = \alpha x_0 \frac{\partial v_0}{\partial r_0} \cos \omega_0, \qquad w_\alpha = 0$$

$$H_\alpha = \frac{\alpha}{\delta} x_0 \frac{\partial H_0}{\partial r_0} \cos \omega_0 \quad \text{при } r_0 = \frac{\tau}{\delta} R_b(x_0) \tag{6.4}$$

Уравнения (6.4) определяют порядки величин u_α, v_α, H_α, а уравнения (2.6) — (2.11) — порядки остальных величин с индексом α. Кроме того, в результате линеаризации с учетом (6.4) можно найти зависимость от ω_0; добавки, обусловленные наличием угла атаки, примут вид

$$u_\alpha = \frac{\alpha}{\delta} u' \cos \omega_0, \qquad p_\alpha = \alpha \delta^3 p' \cos \omega_0, \qquad H_\alpha = \frac{\alpha}{\delta} H' \cos \omega$$

$$v_\alpha = \alpha v' \cos \omega_0, \qquad \rho_\alpha = \alpha \delta \rho' \cos \omega_0, \qquad w_\alpha = \alpha w' \sin \omega_0 \tag{6.5}$$

где величины со штрихами имеют порядок единицы. При линеаризации уравнений (2.6) — (2.11) делается, как нетрудно видеть, относительная ошибка порядка α / δ. Уравнение (2.2) внешней границы области вязкого течения принимает вид

$$r_0 = R_\delta (x_0) + \alpha \delta R' (x_0) \cos \omega \approx R_\delta (x_0) \tag{6.6}$$

Граничные условия (2.13) на этой поверхности с погрешностью порядка $\alpha\delta$, значительно меньшей, чем допустимая погрешность α / δ, принимают простой вид

$$u' = 0, \qquad v' = 0, \qquad w' = 0, \qquad H' = 0 \quad \text{при } r_0 = R_\delta (x_0) \tag{6.7}$$

Задача решается следующим образом: сначала из обычных уравнений осесимметрического пограничного слоя определяются u_0, v_0, w_0, p_0, ρ_0, H_0 (p_1 определять не нужно), после чего из линеаризованных уравнений (2.6) — (2.11) с граничными условиями (6.4) и (6.7) определяются возмущенные величины.

Автор благодарит В. С. Галкина, М. Н. Когана, В. С. Николаева, В. В. Струминского и В. В. Сычева за весьма полезные обсуждения.

Поступила 1 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. ИЛ, 1962.
2. Stewartson K. On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible flow. II. Steady motion, JAS, 1955, v. 22, No 5.
3. Лунев В. В. О подобии при обтекании тонких тел вязким газом при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
4. Hayes W. S., Probstein R. F. Viscous hypersonic similitude. JAS, 1955, v. 26, No 12.
5. Ладыженский М. Д. Гиперзвуковое правило площадей. Инж. ж., 1961, т. 1, № 1.
6. Yasuhara M. On the hypersonic flow past sbender bodies of revolution. J. Phys. Soc. Japan, 1956, v. 11, No 8.
7. Лунев В. В. Автомодельный случай гиперзвукового обтекания осесимметричного тела вязким теплопроводным газом. ПММ, 1960, XXIV, вып. 3.
8. Жилин Ю. Л. Параметры подобия при больших гиперзвуковых скоростях. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
10. Гродзовский Г. Л., Крашенинникова Н. Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по степенному закону по покоящемуся газу. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.