НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

В настоящее время можно считать экспериментально установленным, что лучшее приближение к действительности дает представление об основании как упругом слое конечной толщины. В связи с этим решение контактных задач для упругого слоя приобретает большой интерес.

В данной работе рассмотрены задачи о внедрении жесткого штампа в упругий слой, лежащей без трения на недеформируемом основании или жестко соединенный с недеформируемым основанием. Предполагается, что 1) область контакта Ω штампа со слоем произвольная и фиксированная, 2) силы трения между штампом и слоем отсутствуют, 3) вне штампа слой не нагружен. Показано, что приближенное решение указанных контактных задач при любой толщине слоя h может быть найдено, если известно решение соответствующей контактной задачи для упругого полупространства. Приведены необходимые для получения приближенных решений таблицы. В качестве примера рассмотрен случай эллиптической области контакта.

§ 1. Интегральные уравнения, свойства их ядер. Указанные выше задачи при сделанных предположениях методами операционного исчисления могут быть сведены к определению контактного давления $q(P)$ между штампом и слоем из интегрального уравнения

$$\int_\Omega q(P)\, K(R/h)\, dP = 2\pi\Delta h g(Q), \qquad Q \in \Omega \qquad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}\right) \tag{1.1}$$

Здесь R — расстояние между точками P и Q; функция $g(Q)$ — заданная осадка границы слоя под штампом, определяемая формой основания штампа и степенью внедрения штампа в слой. Очевидно, по физическому смыслу задач $g(Q) > 0$ при $Q \in \Omega$. Кроме того, по физическому смыслу необходимо выполнение условий

$$q(P) > 0 \quad \text{при } P \in \Omega, \qquad \int_\Omega q(P)\, dP < \infty \tag{1.2}$$

Класс положительных в Ω функций $g(Q)$, для которых существует решение уравнения (1.1), удовлетворяющее соотношениям (1.2), будем обозначать $G(h)$, и в дальнейшем будем предполагать, что $g(Q) \in G(h)$.

Отметим еще, что давление $q(P)$ связано с силой и моментами, действующими на штамп, известными соотношениями

$$N = \int_\Omega q(P)\, dP, \qquad M_\xi = \int_\Omega \eta q(P)\, dP, \qquad M_\eta = \int_\Omega \xi q(P)\, dP \tag{1.3}$$

Ядро уравнения (1.1) имеет вид для случая слоя:

а) лежащего без трения на недеформируемом основании

$$K(R/h) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} J_0(uR/h)\, du \tag{1.4}$$

б) жестко соединенного с недеформируемым основанием

$$K(R/h) = \int_0^\infty \frac{2(3-4\sigma)\operatorname{sh} 2u - 4u}{2(3-4\sigma)\operatorname{ch} 2u + (3-4\sigma)^2 + 1 + 4u^2} J_0(uR/h)\, du \tag{1.5}$$

Здесь $J_0(x)$ — бесселева функция нулевого порядка.

Можно показать, что ядра (1.4) и (1.5) могут быть представлены в виде

$$K(k) = k^{-1} - F(k) \qquad (-\infty < k = R/h < \infty) \tag{1.6}$$

В формуле (1.6) функция $F(k)$ — четная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая любое число раз; она может быть представлена степенным рядом с радиусом сходимости $\rho = 2$

$$F(k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i k^{2i}, \qquad |k| < 2 \tag{1.7}$$

Можно показать также, что при $|k| \to \infty$ ядра

$$K(k) \to 2\pi A \delta(k) \tag{1.8}$$

$$\left(A = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)^2}\right)$$

Таблица 1

	σ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
а		1.168	—0.395	0.129	—0.0379	0.0106
б	0.1	1.242	—0.503	0.200	—0.0711	0.0236
	0.2	1.292	—0.552	0.226	—0.0818	0.0272
	0.3	1.377	—0.627	0.265	—0.0976	0.0329
	0.4	1.519	—0.747	0.327	—0.123	0.0418

Здесь $\delta(k)$ — двумерная дельта-функция: A — указано для случая (1.5); для случая слоя (1.4) величина $A = 1/2$.

Значения постоянных a_i даны в табл. 1 с тремя значащими цифрами. В табл. 2 и 3 даны значения функции $F(k)$, вычисленные на машине «Урал», соответственно для задач (1.4) и (1.5). Табл. 2 и 3 составлены таким образом, что промежуточные значения функции $F(k)$ могут быть получены линейной интерполяцией с тремя точными знаками после запятой.

§ 2. Вырожденные решения при очень больших и очень малых h, решение при больших h. Используя формулу (1.6), представим уравнение (1.1) в виде

$$\int_{\Omega} \frac{q(P)}{R}\, dP = 2\pi\Delta g(Q) + \frac{1}{h}\int_{\Omega} q(P)\, F(R/h)\, dP \qquad (Q \in \Omega) \tag{2.1}$$

При очень больших значениях h вторым членом правой части уравнения (2.1) можно пренебречь, и оно принимает вид

$$\int_{\Omega} \frac{q(P)}{R}\, dP = 2\pi\Delta g(Q) \qquad (Q \in \Omega) \tag{2.2}$$

Как известно, к уравнению (2.2) сводится задача о действии штампа на упругое полупространство ($h = \infty$), однако решение уравнения (2.2) может рассматриваться как приближенное и при очень больших $h < \infty$. Заметим еще, что решение уравнения (1.1) или (2.1) при любом значении $h \in (0, \infty)$ будет, очевидно, такого же характера

Таблица 2

k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)	k	F (k)
0.00	1.168	0.75	0.980	1.50	0.666	2.25	0.453	3.00	0.335
0.05	1.167	0.80	0.959	1.55	0.648	2.30	0.443	3.05	0.330
0.10	1.164	0.85	0.937	1.60	0.630	2.35	0.433	3.10	0.324
0.15	1.159	0.90	0.915	1.65	0.613	2.40	0.423	3.15	0.319
0.20	1.152	0.95	0.893	1.70	0.597	2.45	0.414	3.20	0.314
0.25	1.143	1.00	0.871	1.75	0.581	2.50	0.406	3.25	0.309
0.30	1.133	1.05	0.849	1.80	0.566	2.55	0.397	3.30	0.304
0.35	1.121	1.10	0.827	1.85	0.551	2.60	0.389	3.35	0.299
0.40	1.107	1.15	0.806	1.90	0.537	2.65	0.382	3.40	0.295
0.45	1.092	1.20	0.784	1.95	0.524	2.70	0.374	3.45	0.290
0.50	1.076	1.25	0.764	2.00	0.511	2.75	0.367	3.50	0.286
0.55	1.059	1.30	0.743	2.05	0.498	2.80	0.360		дальше
0.60	1.040	1.35	0.723	2.10	0.486	2.85	0.354		как $1/k$
0.65	1.021	1.40	0.703	2.15	0.474	2.90	0.347		
0.70	1.001	1.45	0.684	2.20	0.463	2.95	0,341		

Таблица 3

k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$
				$\sigma = 0.1$					
0.00	1.242	0.70	1.036	1.40	0.701	2.10	0.480	2.80	0.358
0.05	1.240	0.75	1.011	1.45	0.681	2.15	0.469	2.85	0.352
0.10	1.236	0.80	0.986	1.50	0.661	2.20	0.458	2.90	0.346
0.15	1.230	0.85	0.961	1.55	0.642	2.25	0.448	2.95	0.340
0.20	1.222	0.90	0.935	1.60	0.624	2.30	0.438	3.00	0.334
0.25	1.211	0.95	0.910	1.65	0.607	2.35	0.429	3.05	0.329
0.30	1.198	1.00	0.885	1.70	0.591	2.40	0.420	3.10	0.323
0.35	1.183	1.05	0.860	1.75	0.575	2.45	0.411	3.15	0.318
0.40	1.166	1.10	0.836	1.80	0.559	2.50	0.402	3.20	0.313
0.45	1.147	1.15	0.812	1.85	0.545	2.55	0.394	3.25	0.308
0.50	1.127	1.20	0.788	1.90	0.531	2.60	0.387		дальше
0.55	1.106	1.25	0.765	1.95	0.517	2.65	0.379		как $1/k$
0.60	1.083	1.30	0.743	2.00	0.504	2.70	0.372		
0.65	1.060	1.35	0.722	2.05	0.492	2.75	0.365		
				$\sigma = 0.2$					
0.00	1.292	0.65	1.094	1.30	0.754	1.95	0.519	2.60	0.386
0.05	1.291	0.70	1.068	1.35	0.731	2.00	0.506	2.65	0.379
0.10	1.287	0.75	1.041	1.40	0.709	2.05	0.493	2.70	0.372
0.15	1.280	0.80	1.014	1.45	0.688	2.10	0.481	2.75	0.365
0.20	1.271	0.85	0.986	1.50	0.668	2.15	0.470	2.80	0.358
0.25	1.259	0.90	0.959	1.55	0.648	2.20	0.459	2.85	0.352
0.30	1.245	0.95	0.932	1.60	0.629	2.25	0.448	2.90	0.346
0.35	1.228	1.00	0.905	1.65	0.611	2.30	0.438	2.95	0.340
0.40	1.210	1.05	0.878	1.70	0.594	2.35	0.428	3.00	0.334
0.45	1.189	1.10	0.852	1.75	0.578	2.40	0.419		дальше
0.50	1.167	1.15	0.827	1.80	0.562	2.45	0.410		как $1/k$
0.55	1.144	1.20	0.802	1.85	0.547	2.50	0.402		
0.60	1.120	1.25	0.777	1.90	0.532	2.55	0.394		
				$\sigma = 0.3$					
0.00	1.377	0.80	1.063	1.60	0.641	2.40	0.422	3.20	0.314
0.05	1.375	0.85	1.032	1.65	0.622	2.45	0.413	3.25	0.309
0.10	1.370	0.90	1.002	1.70	0.604	2.50	0.404	3.30	0.304
0.15	1.363	0.95	0.972	1.75	0.586	2.55	0.396	3.35	0.299
0.20	1.352	1.00	0.942	1.80	0.570	2.60	0.388	3.40	0.295
0.25	1.339	1.05	0.912	1.85	0.554	2.65	0.380	3.45	0.291
0.30	1.322	1.10	0.883	1.90	0.539	2.70	0.373	3.50	0.286
0.35	1.304	1.15	0.855	1.95	0.524	2.75	0.366	3.55	0.282
0.40	1.283	1.20	0.828	2.00	0.511	2.80	0.359	3.60	0.278
0.45	1.260	1.25	0.802	2.05	0.498	2.85	0.353	3.65	0.274
0.50	1.235	1.30	0.776	2.10	0.485	2.90	0.347	3.70	0.271
0.55	1.209	1.35	0.751	2.15	0.473	2.95	0.341	3.75	0.267
0.60	1.181	1.40	0.727	2.20	0.462	3.00	0.335		дальше
0.65	1.153	1.45	0.704	2.25	0.451	3.05	0.329		как $1/k$
0.70	1.123	1.50	0.682	2.30	0.441	3.10	0.324		
0.75	1.093	1.55	0.662	2.35	0.431	3.15	0.319		
				$\sigma = 0.4$					
0.00	1.519	1.15	0.908	2.30	0.450	3.45	0.293	4.60	0.218
0.05	1.517	1.20	0.877	2.35	0.439	3.50	0.289	4.65	0.216
0.10	1.511	1.25	0.846	2.40	0.429	3.55	0.285	4.70	0.214
0.15	1.502	1.30	0.817	2.45	0.420	3.60	0.281	4.75	0.212
0.20	1.489	1.35	0.789	2.50	0.411	3.65	0.277	4.80	0.209
0.25	1.473	1.40	0.762	2.55	0.402	3.70	0.273	4.85	0.207
0.30	1.454	1.45	0.737	2.60	0.394	3.75	0.269	4.90	0.205
0.35	1.432	1.50	0.712	2.65	0.386	3.80	0.266	4.95	0.203
0.40	1.407	1.55	0.689	2.70	0.378	3.85	0.262	5.00	0.201
0.45	1.380	1.60	0.667	2.75	0.371	3.90	0.259	5.05	0.199
0.50	1.350	1.65	0.645	2.80	0.364	3.95	0.255	5.10	0.197
0.55	1.319	1.70	0.625	2.85	0.358	4.00	0.252	5.15	0.195

(Окончание табл. 3)

k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$
				$\sigma = 0.4$					
0.60	1.287	1.75	0.606	2.90	0.351	4.05	0.249	5.20	0,193
0.65	1.253	1.80	0.588	2,95	0.345	4.10	0.246	5.25	0.191
0,70	1.219	1.85	0.571	3.00	0.339	4.15	0.243	5.30	0.189
0.75	1.183	1.90	0.554	3.05	0.333	4.20	0.240	5.35	0.188
0.80	1,148	1.95	0.539	3.10	0.328	4.25	0.237	5,40	0.186
0.85	1.112	2.00	0.524	3.15	0.322	4.30	0.234	5.45	0.184
0.90	1.077	2.05	0.510	3.20	0.317	4.35	0.231	5.50	0.182
0.95	1.042	2.10	0,497	3.25	0.312	4.40	0.229		дальше
1.00	1.007	2.15	0.484	3.30	0.307	4.45	0.226		как $1/k$
1.05	0.973	2.20	0.472	3.35	0.302	4.50	0.224		
1.10	0.940	2.25	0.460	3.40	0.298	4.55	0.221		

(будет иметь те же особенности), что и решение уравнения (2.2). Это следует из того, что правая часть уравнения (2.1) отличается от правой части уравнения (2.2) в силу свойств функции $F(k)$ и условий (1.2) на непрерывную и непрерывно дифференцируемую любое число раз функцию. Для случая, когда область Ω есть эллипс, а функция $g(Q)$ — произвольный полином, неограниченные и ограниченные на контуре L области Ω решения уравнения (2.2) получены в работе[1] автора [1].

При очень малых значениях h уравнение (1.1) в силу (1.8) можно представить в виде

$$A \int_\Omega q(P)\, \delta(R/h)\, dP = \Delta h g(Q) \qquad (Q \in \Omega) \qquad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) находится без труда

$$q(Q) = \Delta g(Q) / Ah \qquad (Q \in \Omega) \qquad (2.4)$$

Таблица 4

	(а)	(б)			
σ		0.1	0.2	0.3	0.4
χ_∞	15.5	16.5	17	18.5	20.5
χ_0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7.5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8.5}$	$\frac{1}{12.5}$

Решение уравнения (2.2) рекомендуется употреблять в качестве приближенного решения уравнения (1.1) при очень больших h для значений $h \geqslant \chi_\infty a$, вырожденное (предельное) решение (2.4) при очень малых h — для значений $h \leqslant \chi_0 a$ ($a = {}^1/_2 \max_\Omega R$). Значения χ_∞ и χ_0 даны в табл. 4 для задач а) и б). При этом значения χ_0 подсчитаны для штампов, близких в плане к круглому. В указанных пределах получаемые приближенные решения можно считать практически точными.

При больших значениях h, а именно при $h > a$, величина $|k| < 2$ и, следовательно, функция $F(k)$ может быть представлена в форме (1.7). Имея это в виду, перепишем уравнение (2.1)

$$\int_\Omega q(P) \frac{dP}{R} = 2\pi \Delta g(Q) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{h^{2i+1}} \int_\Omega q(P) R^{2i}\, dP \qquad (Q \in \Omega) \qquad (2.5)$$

Приближенное решение уравнения (2.5) может быть найдено либо методом последовательных приближений, либо способом, изложенным в работе [5], если известно решение уравнения (2.2). Определяемые таким образом приближенные решения рекомендуется употреблять при $h \geqslant 1.5 \div 2a$. В качестве примера в работе [5] получено приближенное решение уравнения (2.5) для случая эллиптической области Ω и

$$g(Q) = \gamma + \alpha x + \beta y$$

[1] Некоторые частные решения для этого случая получены ранее в работах [2-4].

Заметим, что с практической точки зрения часто бывает достаточным определить не само решение уравнения (1.1), а величину силы N, действующей на штамп, или, по крайней мере, оценить эту величину.

Покажем, что может быть получена двусторонняя оценка для величины силы N, если известно решение $q(P) = \nu q_\nu(P)$ уравнения (2.2) при $g(Q) = \nu$, т. е. известно решение задачи о действии плоского штампа на упругое полупространство.

Умножим обе части уравнения (2.1) на $\nu q_\nu(Q)$ и проинтегрируем по Ω. После этого, совершив перестановку интегралов в левой части, следуя работе [6], получим

$$N = J(g) + \frac{1}{2\pi\Delta h} J\left(\int\limits_\Omega q(P) F(R/h)\, dP\right) \qquad \left(J(f) = \int\limits_\Omega q_\nu(Q) f(Q)\, dQ\right) \tag{2.6}$$

Теперь из (2.6) без труда найдем двустороннюю оценку для величины силы

$$\frac{J(g)}{1-(J(1)/2\pi\Delta h)\min_\Omega F(k)} \leqslant N \leqslant \frac{J(g)}{1-(J(1)/2\pi\Delta h)\max_\Omega F(k)} \tag{2.7}$$

Полученная двусторонняя оценка, вообще говоря, справедлива при любых значениях h, но достаточно эффективна она лишь при больших h, примерно при $h \geqslant 1.5 \div 2a$. Значения $\max_\Omega F(k)$ и $\min_\Omega F(k)$ легко могут быть найдены при заданном h по табл. 2 и 3.

Пусть область Ω есть эллипс с полуосями a и b, а $g(Q) = \gamma$, тогда формула (2.7) принимает вид

$$\frac{2\pi a\Delta\gamma}{K(e)-(a/h)\min_\Omega F} \leqslant N \leqslant \frac{2\pi a\Delta\gamma}{K(e)-(a/h)\max_\Omega F} \tag{2.8}$$

где $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, e — эксцентрицитет. Очевидно, среднее значение силы N можно представить в виде

$$N_* = 4a\varkappa\Delta\gamma$$

В табл. 5 приведены некоторые результаты вычислений.

Таблица 5

e^2	h/a	$\varkappa$	h/a	$\varkappa$
		Задача (а)		
0.00	2	1.49(1.51)	4	1.22(1.22)
0.70	2	1.01(1.03)	4	0.88(0.88)
0.99	2	0.49(0.50)	4	0.46(0.46)
		Задача (б) при $\sigma = 0.3$		
0.00	2	1.60(1.63)	4	1.26(1.27)

В скобках для сравнения даны практически точные значения величины $\varkappa$, подсчитанные по соответствующей формуле работы [5].

Отметим, что более точная, чем (2.7), и достаточно удобная двусторонняя оценка для величины силы N и двусторонние оценки для величин моментов M_ξ и M_η получены в работе [7] при $h \geqslant 1.5 \div 2a$ для частного случая, когда область Ω имеет две взаимно-перпендикулярные оси симметрии, а функция $g(Q)$ имеет вид $g(Q) = \gamma + \alpha x + \beta y - \varphi(x^2, y^2)$. Кроме того, предполагается, что известно решение уравнения (2.2) для $g(Q) = \nu + \lambda x + \mu y$. В качестве примера в работе [7] получена двусторонняя оценка величины силы для плоского кольцевого в плане штампа.

§ 3. Приближенное решение при промежуточных значениях h. При промежуточных значениях h ($^1/_7 \div {}^1/_{12.5}\, a \leqslant h \leqslant 1.5 \div 2a$) приближенное решение уравнения (1.1) или (2.1) может быть найдено следующим образом. Зафиксируем h, тогда величина $0 \leqslant |k| \leqslant 2a/h$, и аппроксимируем каким-либо способом функцию $F(k)$ при $|k| \in [0, 2a/h]$ полиномом (например, интерполяционным)

$$F(k) = \sum_{i=0}^{n} b_i k^{2i} \tag{3.1}$$

Подставив $F(k)$ в форме (3.1) в уравнение (2.1), представим его в виде

$$\int\limits_\Omega q(P)\frac{dP}{R} = 2\pi\Delta g(Q) + \sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{h^{2i+1}}\int\limits_\Omega q(P) R^{2i}\, dP \qquad (Q \in \Omega) \tag{3.2}$$

Покажем, что если, опять-таки, известно решение уравнения (2.2), то решение уравнения (3.2) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Будем искать решение уравнения (3.2) в виде

$$q(P) = q_0(P) + q_1(P) \tag{3.3}$$

где $q_0(P)$ — решение уравнения (2.2). Легко видеть, что тогда поправочная функция $q_1(P)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_\Omega q_1(P)\frac{dP}{R} = \sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{h^{2i+1}}\int_\Omega [q_0(P) + q_1(P)]R^{2i}dP \qquad (Q \in \Omega) \tag{3.4}$$

Пусть теперь $q_*(P)$ есть решение уравнения (2.2) при

$$g(Q) = \sum_{i=0}^{i+j}\sum_{j=0}^{\leqslant 2n} c_{ij}x^i y^i \tag{3.5}$$

которое в силу нашего предположения нам известно. Положив $q_1(P) = q_*(P)$ и подставив в (3.4), получим в правой и левой частях, как легко видеть, полиномы степени $2n$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y, получим систему $(2n+1)(n+1)$ линейных алгебраических уравнений для определения $(2n+1)(n+1)$ неизвестных c_{ij}. Решив систему и подставив найденные значения c_{ij} в выражение $q_1(P)$, получим приближенное решение уравнения (1.1) по формуле (3.3).

Заметим, что получаемые таким образом приближенные решения уравнения (1.1) сохраняют все свойства точного решения, так как при замене функции $F(k)$ полиномом свойства ядра этого интегрального уравнения не меняются.

В качестве примера рассмотрим случай эллиптической области контакта Ω с полуосями a и b. Положим $h = a$, $n = 1$ и $g(Q) = \gamma + \alpha x + \beta y$, тогда, очевидно, правая часть уравнения (3.2) есть полином второй степени, и, следовательно, решение уравнения 3.2) для рассматриваемого случая необходимо искать в виде [3]

$$q(P) = \frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left[\gamma\left(a_{00} + a_{20}\frac{\xi^2}{a^2} + a_{02}\frac{\eta^2}{b^2}\right) + \alpha a_{10}\xi + \beta a_{01}\frac{a^2}{b^2}\eta\right] \tag{3.6}$$

При этом величины N, M_ξ и M_η будут иметь вид

$$N = 4a\varkappa\Delta\gamma, \qquad \varkappa = {}^1/_2\,\pi\,[a_{00} + {}^1/_3(a_{20} + a_{02})] \tag{3.7}$$

$$M_\xi = {}^8/_3\,a^3\beta\,\Delta\psi_{01}, \quad \psi_{01} = {}^1/_4\,\pi a_{01}, \quad M_\eta = {}^8/_3\,a^3\alpha\,\Delta\psi_{10}, \quad \psi_{10} = {}^1/_4\pi a_{10} \tag{3.8}$$

Подставим $q(P)$ в форме (3.6) в уравнение (3.2) и вычислим левый интеграл, используя работу [1], правый же интеграл вычисляется без труда. Приравнивая после этого коэффициенты в соотношении (3.2) при одинаковых степенях x и y для определения чисел a_{ij}, получим систему пяти линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
a_{00}S_{00} + {}^1/_2\,a_{20}S_{01}(1 - e^2) + {}^1/_2 a_{02}S_{10} = 1 + a_{00}\,[b_0 + {}^1/_3 b_1(2 - e^2)] + \\
+ {}^1/_3 a_{20}\,[b_0 + {}^1/_5 b_1(4 - e^2)] + {}^1/_3 a_{02}\,[b_0 + {}^1/_5 b_1(4 - 3e^2)] \\
a_{20}S_{20} - {}^1/_2 a_{20}S_{11}(1 - e^2) + a_{02}S_{11}(1 - e^2) - {}^1/_2 a_{02}S_{20} = a_{00}b_1 + {}^1/_3 b_1 a_{20} + {}^1/_3 b_1 a_{02} \\
a_{20}S_{11} - {}^1/_2 a_{20}S_{02}(1 - e^2) + a_{02}S_{02}(1 - e^2) - {}^1/_2 a_{02}S_{11} = a_{00}b_1 + {}^1/_3 b_1 a_{20} + {}^1/_3 b_1 a_{02} \\
a_{10}S_{10} = 1 - {}^2/_3 a_{10}b_1, \qquad a_{01}S_{01} = 1 - {}^2/_3 a_{01}b_1
\end{gathered} \tag{3.9}$$

где e — эксцентрицитет, величины S_{mn} имеют вид

$$S_{mn} = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2m}\varphi\,\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{m+n+1/2}} \tag{3.10}$$

и могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Возьмем в качестве точек интерполяции на отрезке [0.2] $k_0 = 0$ и $k_1 = 1.5$, тогда, используя табл. 2 и 3, найдем для задачи (а) значения $b_0 = 1.168$, $b_1 = -0.223$, для задачи (б) при $\sigma = 0.3$ значения $b_0 = 1.377$, $b_1 = -0.309$. Подставим найденные значения b_0 и b_1 в систему (3.9) и решим ее при $e^2 = 0.00,\ 0.70,\ 0.99$ для задачи (а) и при $e^2 = 0.00$ для задачи (б).

Результаты решения, а также соответствующие значения величин $\varkappa$, ψ_{10} и ψ_{01} даны в табл. 6. Для сравнения в скобках даны значения некоторых величин, полученные в работе [8].

Таблица 6

	e^2	a_{00}	a_{10}	a_{01}	a_{20}	a_{02}	$\varkappa$	ψ_{10}	ψ_{01}
а	0.00	2.001	1.571	1.571	−0.825	−0.825	2.28 (2.20)	1.23 (1.19)	1.23 (1.19)
	0.70	1.056	0.959	0.357	−0.286	−0.131	1.44	0.75	0.28
	0.99	0.387	0.391	0.010	−0.038	−0.002	0.59	0.31	0.01
б	0.00	2.610	1.726	1.726	−1.347	−1.347	2.69 (2.48)	1.36 (1.27)	1.36 (1.27)

Совершенно очевидно, что способ получения приближенного решения уравнения (1.1), данный в этом параграфе, применим, вообще говоря, при любых значениях $h \in (0, \infty)$. Однако когда $h \geqslant 1.5 \div 2a$, то удобнее при получении приближенных решений уравнения (1.1) пользоваться способами, предложенными в § 2 для очень больших и больших значений h; когда $h \leqslant {}^1/_7 \div {}^1/_{12.5}a$, то рациональнее использовать вырожденное решение (2.4) при очень малых h, так как для получения приближенных решений одинаковой точности способом данного параграфа необходимо с уменьшением h увеличивать n в уравнении (3.2), что приводит к быстрому росту числа уравнений в системе.

Таким образом, каждый из предложенных способов приближенного решения задач (а) и (б) целесообразно использовать на некотором определенном интервале изменения величины h, причем все вместе они исчерпывают весь диапазон изменения $h \in (0, \infty]$ и могут служить удобным средством для инженерных расчетов.

В заключение отметим, что давление $q(P)$ в случае задачи (б) всегда оказывается бо́льшим, чем в задаче (а), при одинаковой осадке штампа $g(Q)$ и всех других равных условиях; однако разница эта при $0 < \sigma \leqslant 0.2$ не превосходит 10%.

Поступила 12 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. О действии эллиптического штампа на упругое полупространство. Авторефераты научно-исследовательских работ за 1959 г. Изд-во Ростовск. ун-та, 1960.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
5. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
6. Моссаковский В. И. К вопросу об оценке перемещений в пространственных контактных задачах. ПММ, 1951, т. XV, вып. 5.
7. Александров В. М. К задаче о действии штампа на упругий слой конечной толщины. Материалы третьей научной конференции аспирантов. Изд-во Ростовск. ун-та, 1961.
8. Пупырев В. А., Уфлянд Я. С. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.