ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГИХ ПЛАСТИНОК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

С. А. Амбарцумян (Ереван)

Рассматривается задача выпучивания неупругих пластинок при условии продолжающегося нагружения с учетом явлений, связанных с поперечными деформациями пластинки. Задача решается при помощи теории пластического течения. Аналогичная задача без учета поперечных сдвигов рассмотрена Л. М. Качановым [1].

1. Наряду с основными положениями теории пластического течения принимаются:

а) гипотеза непрерывного нагружения [1-3], согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающего нагружение во всех точках пластинки;

б) теория пластинок без гипотезы недеформируемых нормалей [4], согласно которой приближенно принимается [1] (1.1)

$$\tau_{xz} = f(z)\,\varphi(x, y), \quad e_z = 0, \quad \tau_{yz} = f(z)\,\psi(x, y), \quad \sigma_z = 0 \qquad (f(\pm{}^1/_2 h) = 0)$$

Здесь $f(z)$ — заданный закон изменения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки; $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — искомые функции; пластинка представлена в декартовой системе координат x, y, z; ось z нормальна к срединной плоскости.

2. Пусть в пластинке, которая деформируется за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_x = -p, \qquad \sigma_y = -q, \qquad \tau_{xy} = r \tag{2.1}$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$, $\delta\tau_{xz}$, $\delta\tau_{yz}$. Компоненты деформаций также получат соответствующие бесконечно малые приращения. В общем случае упрочняющегося материала для рассматриваемой пластинки можно записать [1]

$$\begin{gathered}
\sigma\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\delta\sigma_x - \nu\delta\sigma_y) - \frac{1}{3}F(T)\,\delta T\,(2p - q), \\
\delta\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\delta\sigma_y - \nu\sigma\delta_x) - \frac{1}{3}F(T)\,\delta T\,(2q - p) \\
\delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\delta\tau_{xy} + 2F(T)\,r\,\delta T, \qquad \delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\delta\tau_{xz}, \qquad \delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\delta\tau_{yz}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

причем

$$\begin{gathered}
F(T) = \frac{1}{2T^2}\frac{d\Phi}{dT}, \qquad T^2 = \frac{p^2 - pq + q^2 + 3r^2}{3} \\
\delta T = -\frac{1}{6T}\left[(2p - q)\,\delta\sigma_x + (2q - p)\,\delta\sigma_y - 6r\,\delta\tau_{xy}\right]
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\Phi(T)$ — характерная для данного материала функция интенсивности напряжений T, не зависящая от вида напряженного состояния.

В силу (2.3) и (2.2) легко получить

$$\begin{gathered}
E\delta\varepsilon_x = A_{11}\delta\sigma_x + A_{12}\delta\sigma_y + A_{16}\delta\tau_{xy}, \quad E\delta\varepsilon_y = A_{22}\delta\sigma_y + A_{12}\delta\sigma_x + A_{26}\delta\tau_{xy} \\
E\delta\gamma_{xy} = A_{66}\delta\tau_{xy} + A_{16}\delta\sigma_x + A_{26}\delta\sigma_y, \quad E\delta\gamma_{xz} = A_{55}\delta\tau_{xz}, \quad E\delta\tau_{yz} = A_{44}\delta\tau_{yz}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
A_{11} = 1 + \theta\,(2p - q)^2, \qquad A_{12} = \theta\,(2q - p)(2p - q) - \nu, \quad A_{22} = 1 + \theta\,(2q - p)^2 \\
A_{66} = \frac{E}{G} + 36\theta r^2, \qquad A_{44} = A_{55} = \frac{E}{G'} \qquad \left(\theta = \frac{E}{18}\frac{F(T)}{T}\right) \\
A_{16} = -6\theta r\,(2p - q), \qquad A_{26} = -6\theta r\,(2q - p)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

[1] Здесь и в последующем принимаются известные обозначения [1, 4].

Решая (2.4) относительно приращений напряжений, получим

$$\delta\sigma_x = a_{11}\delta\varepsilon_x + a_{12}\delta\varepsilon_y + a_{16}\delta\gamma_{xy}, \qquad \delta\sigma_y = a_{22}\delta\varepsilon_y + a_{12}\delta\varepsilon_x + a_{26}\,\delta\gamma_{xy}$$
$$\delta\tau_{xy} = a_{66}\delta\gamma_{xy} + a_{16}\delta\varepsilon_x + a_{26}\delta\varepsilon_y, \qquad \delta\tau_{xz} = a_{55}\delta\gamma_{xz}, \qquad \delta\tau_{yz} = a_{44}\delta\gamma_{yz} \tag{2.6}$$

где (2.7)

$$a_{11} = \frac{E}{\Omega}(A_{22}A_{66} - A_{26}^2), \qquad a_{22} = \frac{E}{\Omega}(A_{11}A_{66} - A_{16}^2), \qquad a_{12} = \frac{E}{\Omega}(A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66})$$
$$a_{66} = \frac{E}{\Omega}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2), \qquad a_{16} = \frac{E}{\Omega}(A_{12}A_{26} - A_{22}A_{16}), \qquad a_{26} = \frac{E}{\Omega}(A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26})$$
$$a_{44} = G, \; a_{55} = G, \; \Omega = A_{66}\left[A_{11}A_{22} - A_{12}^2 + \frac{2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2}{A_{66}}\right]$$

В силу (1.1) и (2.6) для приращений поперечных сдвигов получим

$$\delta\gamma_{xz} = \frac{1}{a_{55}} f(z)\;\varphi(x, y), \qquad \delta\gamma_{yz} = \frac{1}{a_{44}} f(z)\,\psi(x, y) \tag{2.8}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — искомые функции, характеризующие бесконечно малые приращения поперечных сдвигов.

Согласно теории изгиба пластинок без гипотезы недеформируемых нормалей, для перемещений при выпучивании имеем (2.9)

$$u_x = u^\circ + \delta u - z\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{J_0}{a_{55}}\varphi, \qquad u_y = v^\circ + \delta v - z\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{J_0}{a_{44}}\psi \qquad \left(J_0 = \int_0^z f(z)\,dz\right)$$

где $u^\circ = u^\circ(x, y)$, $v^\circ = v^\circ(x, y)$ — тангенциальные перемещения срединной плоскости пластинки, отвечающие безмоментному напряженному состоянию (2.1); $\delta u = \delta u(x, y)$, $\delta v = \delta v(x, y)$, $w = w(x, y)$ — приращения тангенциальных и нормального перемещения срединной поверхности пластинки при выпучивании.

В силу (2.9) для приращений деформаций при выпучивании получим

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{J_0}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{J_0}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$\delta\gamma_{xy} = \frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + J_0\left(\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

Подставляя в (2.6) выражения приращений деформаций для приращений напряжений получим

$$\delta\sigma_x = -z\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) + J_0\left(\frac{a_{11}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{a_{12}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{16}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{a_{16}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a_{11}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial\delta v}{\partial y} + a_{16}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)$$

$$\delta\sigma_y = -z\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) + J_0\left(\frac{a_{22}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{a_{12}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{26}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{a_{26}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + a_{22}\frac{\partial\delta v}{\partial y} + a_{12}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + a_{26}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x} + \frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)$$

$$\delta\tau_{xy} = -z\left(a_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) + J_0\left(\frac{a_{16}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{a_{26}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{66}}{a_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{a_{66}}{a_{44}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a_{16}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + a_{26}\frac{\partial\delta v}{\partial y} + a_{66}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)$$

$$\delta\tau_{xz} = f(z)\,\varphi, \qquad \delta\tau_{yz} = f(z)\,\psi$$

Поступая обычным образом, легко подсчитать приращения моментов и поперечных сил

$$\delta M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) +$$
$$+ J_1\left[\frac{1}{a_{55}}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_{16}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{1}{a_{44}}\left(a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial y} + a_{16}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$\delta M_y = -\frac{h^3}{12}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) + J_1\left[\frac{1}{a_{55}}\left(a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{26}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_{44}}\left(a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{26}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right] \tag{2.10}$$

$$\delta H = -\frac{h^3}{12}\left(2a_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + a_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + J_1\left[\frac{1}{a_{55}}\left(a_{16}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{66}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_{44}}\left(a_{26}\frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{66}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$\delta N_1 = J_2\varphi, \qquad \delta N_2 = J_2\psi, \qquad J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} zJ_0(z)\,dz, \qquad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} f(z)\,dz \tag{2.11}$$

3. Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид

$$\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial y} = \delta N_1, \qquad \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = \delta N_2 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} + T_1^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

где T_1°, T_2°, S° — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния, т. е. $T_1^\circ = -ph$, $T_2^\circ = -qh$, $S^\circ = rh$.

Подставляя значения приращений внутренних сил и моментов в уравнения равновесия (3.1), (3.2), получим относительно трех функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ систему

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{h}{J_2}\left(p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2r\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{3.3}$$

$$a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_{12} + 2a_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} + 3a_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + a_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{12}{h^3}J_1\left[\frac{1}{a_{55}}\left(a_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2a_{16}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + a_{66}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{a_{44}}\left(a_{16}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{66})\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + a_{26}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{12}{h^3}J_2\varphi = 0 \tag{3.4}$$

$$a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (a_{12} + 2a_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + 3a_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} + a_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{12}{h^3}J_1\left[\frac{1}{a_{44}}\left(a_{22}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2a_{26}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + a_{66}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{a_{55}}\left(a_{26}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a_{12} + a_{66})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + a_{16}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{12}{h^3}J_2\psi = 0 \tag{3.5}$$

Введением одной функции $\Phi(x, y)$ систему уравнений (3.3) — (3.5) можно привести к одному уравнению шестого порядка. Полагая

$$w = \frac{144}{h^6}\left[J_2^2 - J_1J_2\left(\frac{a_{11}}{a_{55}} + \frac{a_{66}}{a_{44}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2J_1J_2\left(\frac{a_{16}}{a_{55}} + \frac{a_{26}}{a_{44}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \right.$$

$$\left. + J_1J_2\left(\frac{a_{22}}{a_{44}} + \frac{a_{66}}{a_{55}}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{J_1^2}{a_{44}a_{55}}L(a_{ik})\right]\Phi \tag{3.6}$$

$$\varphi = \frac{12}{h^3}\left\{-J_2\left[a_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (a_{12} + 2a_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} + 3a_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} + a_{26}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right] + \frac{J_1}{a_{44}}\frac{\partial}{\partial x}L(a_{ik})\right\}\Phi$$

$$\psi = \frac{12}{h^3}\left\{-J_2\left[a_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3} + (a_{12} + 2a_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} + 3a_{26}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} + a_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right] + \frac{J_1}{a_{55}}\frac{\partial}{\partial y}L(a_{ik})\right\}\Phi \tag{3.7}$$

$$L(a_{ik}) = c_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2c_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + c_{12}\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + 2c_{26}\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} + c_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$c_{11} = a_{11}a_{66} - a_{16}^2, \qquad c_{16} = a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16}, \qquad c_{22} = a_{22}a_{66} - a_{26}^2$$

$$c_{26} = a_{22}a_{16} - a_{12}a_{26}, \qquad c_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - 2(a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}) \tag{3.8}$$

тождественно удовлетворим уравнениям (3.4) и (3.5), а из (3.3) получим разрешающее уравнение задачи

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+4a_{16}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}+2(a_{12}+2a_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+4a_{26}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}+a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}-$$

$$-\frac{J_1}{J_2}\left[\frac{c_{11}}{a_{44}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^6}+2\frac{c_{16}}{a_{44}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^5\partial y}+\left(\frac{c_{12}}{a_{44}}+\frac{c_{11}}{a_{55}}\right)\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^4\partial y^2}+2\left(\frac{c_{26}}{a_{44}}+\frac{c_{16}}{a_{55}}\right)\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^3\partial y^3}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{c_{12}}{a_{55}}+\frac{c_{22}}{a_{44}}\right)\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^2\partial y^4}+2\frac{c_{26}}{a_{55}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial x\partial y^5}+\frac{c_{22}}{a_{55}}\frac{\partial^6\Phi}{\partial y^6}\right]=$$

$$=\frac{h^3}{12J_2^2}\left(T_1^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_2^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) \qquad (3.9)$$

Рассматривая систему уравнений (3.3) — (3.5) и уравнение (3.9), легко заметить, что они внешне похожи на соответствующие неполные уравнения теории анизотропных пластинок, построенной без гипотезы недеформируемых нормалей [4].

4. Рассмотрим задачу устойчивости сжатой полосы [1]. Пусть длинная прямоугольная полоса оперта по двум длинным сторонам ($x=0$, $x=l$) и сжимается равномерно распределенным (по тем же сторонам) давлением с интенсивностью $p(q=0,\ r=0)$. Пусть полоса настолько длинна, что реализуется цилиндрическая форма потери устойчивости, т. е. $w=w(x)$.

Дифференциальное уравнение устойчивости в силу исходных положений рассматриваемой задачи принимает вид

$$a_{11}\frac{h^3}{12}\frac{d^4w}{dx^4}=-ph\frac{d^2w}{dx^2}+ph\frac{a_{11}}{a_{55}}\frac{J_1}{J_2}\frac{d^4w}{dx^4} \qquad (4.1)$$

Полагая $w=B\sin(m\pi x/l)$, удовлетворим условиям опирания полосы, и для критического давления получим

$$p=a_{11}\frac{h^3}{12}\frac{m^2\pi^2}{l^2h}\left(1+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\frac{a_{11}}{a_{55}}\frac{J_1}{J_2}\right)^{-1} \qquad (4.2)$$

Для коэффициентов a_{11} и a_{55} из (2.7) в силу (2.5), и исходных положений задачи получим

$$a_{11}=E\frac{1+\theta p^2}{1-\nu^2+\theta p^2(5-4\nu)}, \qquad a_{55}=G$$

Значение θ, согласно (2.5), как и в ранее рассмотренной аналогичной задаче [1], определяем из условия простого растяжения (сжатия). В случае простого растяжения, полагая $\varepsilon_x=f(\sigma_x)$ и учитывая, что при процессе упрочнения работа пластической деформации A не зависит от пути нагружения и является функцией лишь интенсивности напряжений, т. е. $A=\Phi(T)$, при помощи простых преобразований получим [1]

$$\theta=\frac{1}{12T^2}\left(\frac{E}{E'}-1\right)=\frac{1}{4p^2}\left(\frac{E}{E'}-1\right) \qquad (4.3)$$

где E — модуль упругости, E' — местный или касательный модуль.

Для подсчета отношения J_1/J_2, полагая $f(z)=(^1/_4\,h^2-z^2)$, в силу (2.11) получим $J_1/J_2={}^1/_{10}\,h^2$.

Подставляя выражения θ и J_1/J_2 в (4.2), окончательно для критического давления найдем

$$P_*=P_*^\circ K\left[1+\frac{m^2\pi^2}{10}\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{G(1-\nu^2)}K\right]^{-1}, \qquad p_*^\circ=\frac{m^2\pi^2}{l^2}\frac{D}{h}$$

$$K=\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{E}{E'}-1\right)\right]\left[1+\frac{5-4\nu}{4(1-\nu^2)}\left(\frac{E}{E'}-1\right)\right]^{-1}, \qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Здесь P_*° — значение критического давления для упругой полосы, найденное без учета явлений поперечных сдвигов.

В частности, пренебрегая поправкой от учета деформаций поперечного сдвига, получим критическое давление, найденное в работе [1], а именно:

$$P_*=P_*^\circ K$$

Несколько слов о функции $f(z)$. Как известно [5, 6], на площадке текучести эпюра касательных напряжений τ_{xz} вырождается в треугольный профиль, в связи с чем возникает вопрос о справедливости принятого параболического закона распределения касательных напряжений.

Положим

$$f(z) = e - (2e / h) z \operatorname{sign} z$$

При помощи (2.11) получим $J_1 / J_2 = 10h^2 / 96$. Полученное для предельного случая значение отношения J_1 / J_2, как и следовало ожидать [7], незначительно (4%) отличается от значения отношения J_1 / J_2 для случая параболического распределения.

Учитывая, что J_1 / J_2 является коэффициентом поправки от учета явлений поперечных сдвигов, можно считать, что разумно подобранная функция $f(z)$, с точностью исходных предположений задачи, не будет влиять на величину критического давления P.

5. Для иллюстрации рассмотрим численный пример.

Из формулы для P_* легко заметить, что учет поперечных сдвигов представляется поправочным членом

$$\delta = \frac{m^2\pi^2}{10}\frac{h^2}{l^2}\frac{E}{G(1-\nu^2)}k$$

который зависит от числа полуволн m, относительной толщины h/l и физико-механических характеристик материала пластинки — E, E', G, ν и может значительно отличаться от нуля.

Пусть

$$h / l = 0.2, \qquad \nu = 0.5, \qquad E / E' = 1.2, \qquad E / G \sim 3.0$$

Тогда

$$\delta = 0.138, \quad \text{при } m = 1, \quad \delta = 0.552, \quad \text{при } m = 2$$

Отсюда замечаем, что учет поперечного сдвига при деформации пластинки одной полуволной синусоиды дает поправку порядка 13%, а при деформации двумя полуволнами поправка доходит до 50%.

Таким образом, неучет явлений, связанных с поперечным сдвигом, в некоторых случаях может привести к существенным погрешностям.

Учет поперечного сдвига может еще более повлиять на результат, так как коэффициент k в зависимости от формы кривой $\varepsilon = f(\sigma)$ может быть больше единицы (в рассмотренном примере $k = 0.875$), а основной физико-механический фактор, характеризующий явления, связанные с учетом поперечных сдвигов E / G, может быть больше 3.0.

Автор выражает признательность Ю. Н. Работнову за обсуждение настоящей работы.

Поступила 29 I 1962

Институт математики и механики
АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Shanley F. R. Inelastic Column Theory. Journal of the Aeronautical Sciences, XIV, № 5, 1947; имеется русск. перевод, Сб. переводов «Механика», 1951, вып. 2.
3. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
5. Филин А. П. К вопросу определения усилий в статически неопределимых системах при нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями. Труды ЛИИВТ, 1958, вып. 25.
6. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
7. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1958, № 5.