Здесь

$$Y(\lambda r) = Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)\left(\ln\frac{\lambda}{2} + C\right)\frac{2}{\pi}$$

$$K(\lambda r) = K_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\left(\ln\frac{\lambda}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$$

$Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ — функции Бесселя второго рода соответственно действительного и мнимого аргумента, C — постоянная Эйлера. Интегрирование ведется по области задания распределенной нагрузки S.

Учитывая, что выражение, стоящее в квадратных скобках под знаком интеграла в (3.1), имеет при $r \to 0$ особенность типа $r^2 \ln r$, легко убеждаемся, что функция $w_0(x, y)$ действительно удовлетворяет неоднородному уравнению (1.1).

Частное решение, взятое в виде (3.1), допускает предельный переход при $\lambda \to 0$. При этом получаем частное решение неоднородного бигармонического уравнения

$$w_{01}(x, y) = \frac{1}{8\pi D}\iint\limits_S q(\xi, \eta)\left(r^2 \ln r - \frac{3}{4} r^2\right) d\xi\, d\eta$$

В заключение приношу благодарность Д. И. Шерману за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 20 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. О поперечном изгибе пластинки, опертой вдоль края, составленного из нескольких замкнутых кривых. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
2. Шерман Д. И. Об упругом равновесии пластинки, опертой по краю. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, 1957, т. X, № 3.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. Шерман Д. И. Об установившихся упругих колебаниях при заданных смещениях на границе среды. ПММ, 1946, т. X, № 5, 6.
5. Tamarkin J. D. On Fredholm's integral equations whose kernels are analytic in a parameter. Ann. Math., 1927, v. 28, № 2.

К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

При решении вариационными методами ряда задач теории ползучести (например, задач устойчивости) оказывается более удобным варьировать одновременно напряжения и смещения, либо скорости напряжений и скорости смещений. В теории ползучести вариационный метод, основанный на варьировании напряжений и смещений, впервые был предложен В. И. Розенблюмом [1] для изучения устойчивости продольно сжатого стержня в условиях ползучести. При этом варьировались напряжения и смещения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и заданным граничным условиям. Позднее в работе [2] для ползучести тела по теории течения [3] было указано вариационное уравнение, основанное на варьировании скоростей напряжений и скоростей смещений.

Ниже для ползучести тела по теории течения [3] при малых по сравнению с единицей удлинениях и сдвигах [4] указывается вариационное уравнение, основанное на варьировании напряжений и смещений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и уравнениям, следующим из уравнений равновесия при дифференцировании их по времени (эти уравнения в целях краткости называются уравнениями равновесия в скоростях).

1. В фиксированный момент времени t действительные напряжения σ_{jk} и смещения u_i связаны между собою и со скоростями напряжений, скоростями смещений уравнениями [3], [4]

$$[(\delta_{ik} + u_{i,k})\,\sigma_{jk}]_{,j} = 0, \qquad [(\delta_{ik} + u_{i,k})\,\dot\sigma_{jk} + \dot u_{i,k}\sigma_{jk}]_{,j} = 0$$

$$T_i = (\delta_{ik} + u_{i,k})\,\sigma_{jk}n_j, \qquad \dot T_i = [(\delta_{ik} + u_{i,k})\,\dot\sigma_{jk} + \dot u_{i,k}\sigma_{jk}]\,n_j \tag{1.1}$$

$$\dot\varepsilon_{jk} = \partial W \,/\, \partial\sigma_{jk}, \qquad \dot\varepsilon_{jk} = {}^1\!/_2\ (\dot u_{j,k} + \dot u_{k,j} + \dot u_{i,j}u_{i,k} + \dot u_{i,k}u_{i,j}) \tag{1.2}$$

$$W = \Lambda + \partial\Pi \,/\, \partial t \qquad (i,\ k,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

Здесь принята криволинейная система координат Лагранжа, объемные силы считаются отсутствующими, δ_{ik} — символ Кронекера, точка означает дифференцирование по времени, T_i — проекция интенсивности поверхностных сил в деформированном состоянии на ось координат i, соответствующую недеформированному состоянию; n_j — косинус угла, образуемого внешней нормалью к поверхности, ограничивающей тело до деформации, с осью координат j, соответствующей недеформированному состоянию; Λ — функция напряжений и времени; Π — функция напряжений (энергия упругих деформаций).

2. Сопоставим в фиксированный момент времени t истинное напряженное и деформированное состояние с другим, характеризующимся теми же скоростями напряжений и скоростями смещений, но другими напряжениями и смещениями, именно напряжениями $\sigma_{jk} + \delta\sigma_{jk}$ и смещениями $u_i + \delta u_i$, бесконечно близкими к действительным, удовлетворяющими уравнениям равновесия, уравнениям равновесия в скоростях. Эти напряжения и смещения будем называть допустимыми.

Подставляя допустимые напряжения и смещения в уравнения равновесия, в уравнения равновесия в скоростях, сохраняя в них бесконечно малые величины только первого порядка, находим, что вариации напряжений и смещений должны удовлетворять уравнениям

$$[(\delta_{ik} + u_{i,k})\,\delta\sigma_{jk} + \sigma_{jk}\delta u_{i,k}]_{,j} = 0, \qquad [\dot\sigma_{j,k}\delta u_{i,k} + \dot u_{i,k}\delta\sigma_{jk}]_{,j} = 0 \tag{2.1}$$

Согласно (1.2) вариации скоростей деформаций связаны с вариациями смещений соотношением

$$\delta\dot\varepsilon_{jk} = {}^1\!/_2\,(\dot u_{i,j}\delta u_{i,k} + \dot u_{i,k}\delta u_{i,j}) \tag{2.2}$$

3. Из того, что действительные напряжения и смещения удовлетворяют уравнениям равновесия, следует (см. [4], гл. III)

$$\int\limits_V \sigma_{jk}\dot\varepsilon_{jk}\,dV = \int\limits_S T_i\dot u_i\,dS$$

Здесь V, S — объем и поверхность тела до деформации. Допустимые напряжения и смещения также удовлетворяют уравнениям равновесия. Поэтому

$$\int\limits_V (\sigma_{jk} + \delta\sigma_{jk})\,(\dot\varepsilon_{jk} + \delta\dot\varepsilon_{jk})\,dV = \int\limits_S (T_i + \delta T_i)\,\dot u_i\,dS \tag{3.1}$$

Опуская здесь бесконечно малые величины второго порядка, находим

$$\int\limits_V \sigma_{jk}\delta\dot\varepsilon_{jk}dV + \int\limits_V \dot\varepsilon_{jk}\delta\sigma_{jk}dV - \delta\int\limits_S T_i\dot u_i dS = 0 \tag{3.2}$$

В справедливости (3.2) нетрудно убедиться и непосредственно интегрированием по частям с использованием соотношений (2.2), уравнений (2.1).

4. Из соотношений (1.2) следует, что второе слагаемое в (3.2) есть вариация интеграла

$$\int\limits_V W\,dV$$

Покажем, что и первое слагаемое в (3.2) также есть вариация некоторого выражения. Интегрируя по объему тела умноженное на u_i второе из уравнений (2.1), находим

$$\int_V (\dot{u}_{i,k}\,\delta\sigma_{jk} + \dot{\sigma}_{jk}\delta u_{i,k})\, u_{i,j}\, dV = \int_S (\dot{u}_{i,k}\delta\sigma_{jk} + \dot{\sigma}_{jk}\delta u_{i,k})\, u_i n_j\, dS \qquad (4.1)$$

Используя (1.1), (2.2), (4.1), первое слагаемое в (3.2) можно записать в виде

$$\int_V \sigma_{jk}\delta\dot{\varepsilon}_{jk}\, dV = \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{d}{dt}\int_V \sigma_{jk}u_{i,k}u_{i,j}\,dV - \int_S u_i\delta\dot{T}_i dS \qquad (4.2)$$

Пусть S_u, S_σ, $S_{\sigma u}$ — части поверхности S ($S = S_u + S_\sigma + S_{\sigma u}$), где заданы соответственно смещения, поверхностные силы и смешанные граничные условия. Тогда

$$\int_S u_i\delta\dot{T}_i dS = \delta\left\{\int_{S_u}\bar{u}_i\dot{T}_i dS + \int_{S_\sigma}(\dot{T}_i - \dot{\bar{T}}_i)\,u_i dS + \int_{S_{\sigma u}}[\bar{u}_\gamma\dot{T}_\gamma + (\dot{T}_\nu - \dot{\bar{T}}_\nu)\,u_\nu]\,dS\right\} \qquad (4.3)$$

Здесь черточками отмечены заданные значения компонент смещения и скоростей поверхностных сил. Из (4.2), (4.3) следует, что первое слагаемое в (3.2) есть полная вариация, и (3.2) принимает вид

$$\delta\Phi = \delta\left\{\int_V\left[W + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\sigma_{jk}u_{i,k}u_{i,j})\right]dV - \int_S T_i\dot{u}_i dS -\right.$$

$$\left.-\int_{S_u}\bar{u}_i\dot{T}_i dS - \int_{S_\sigma}(\dot{T}_i - \dot{\bar{T}}_i)\,u_i dS - \int_{S_{\sigma u}}\left[\bar{u}_\gamma\dot{T}_\gamma + (\dot{T}_\nu - \dot{\bar{T}}_\nu)\,u_\nu\right]dS\right\} = 0 \qquad (4.4)$$

Среди напряжений и смещений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и уравнениям равновесия в скоростях, истинное распределение напряжений и смещений характеризуется стационарностью функционала Φ.

Когда малы по сравнению с единицей не только удлинения и сдвиги, но и углы, поворотов [4], смещения не входят в уравнения равновесия и потому не варьируются, скорости поверхностных усилий выражаются только через скорости напряжений и следовательно, также не варьируются, вариационное уравнение (4.4) переходит в указанное Л. М. Качановым [3] вариационное уравнение

$$\delta\Phi = \delta\left\{\int_V W\,dV - \int_S T_i\dot{u}_i dS\right\} = 0$$

Если при произвольной величине удлинений и сдвигов связь между скоростями деформаций и обобщенными напряжениями σ_{jk}^* (см. [4], гл. II, § 7) можно принять в виде

$$\dot{\varepsilon}_{jk} = \partial W/\partial\sigma_{jk}^*$$

то вариационное уравнение (4.4) справедливо и при произвольной величине удлинений и сдвигов. В этом случае в (4.4) под σ_{jk} следует понимать обобщенные напряжения.

Поступила 24 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инж. сб., 1954, т. 18.
2. Sanders J. L., McComb, H. G., Schlechte F. R. A Variational Theorem for Creep with Applications to Plates and Columns. NACA, Rep. 1342, 1958.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.