О СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ПО КРАЮ

А. И. Лиходед

(Москва)

Рассматриваются установившиеся поперечные колебания однородной изотропной пластинки постоянной толщины, занимающей произвольную односвязную область. Края пластинки предполагаются свободно опертыми. Общий случай статического изгиба пластинки, занимающей произвольную (односвязную или многосвязную) область, был изучен ранее Д. И. Шерманом [1, 2]. Предложенные им представления для искомых регулярных функций удалось применить на завершающем этапе в разбираемом случае установившихся колебаний. Это позволило свести задачу к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

1. Пусть срединная поверхность колеблющейся пластинки занимает произвольную односвязную область S в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$; начало координат будем считать расположенным внутри области S. Кроме того, допустим, что ограничивающий область контур L обладает дифференцируемой кривизной.

Для нахождения амплитуды колебаний $u(x, y)$ необходимо решить следующее дифференциальное уравнение в области S:

$$\triangle\triangle u - \lambda^4 u = \frac{q(x, y)}{D} \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \lambda = \left(\frac{\rho h \nu^2}{D}\right)^{1/4}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $q(x, y)$ и ν — амплитуда и частота колебаний поперечной нагрузки, ρ — плотность, h и D — толщина и цилиндрическая жесткость пластинки соответственно.

Помимо уравнения (1.1), амплитуда $u(x, y)$ должна удовлетворять на контуре L краевым условиям

$$u = 0, \qquad \frac{\sigma\triangle u}{1-\sigma} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\sin 2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta = 0 \tag{1.2}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, θ — угол между внешней нормалью к контуру и осью абсцисс.

Продифференцируем дважды по дуге s контура первое краевое условие (1.2) и сложим его почленно со вторым условием. К полученному в результате новому граничному соотношению присоединим первое условие (1.2); их совокупность принимаем в качестве новых видоизмененных граничных условий (очевидно, эквивалентных исходным). В комплексной форме они запишутся так [1]

$$u = 0, \qquad G(u) \equiv \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial \bar{t}} + t''\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{t}''\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = 0 \quad \left(\varkappa = \frac{4}{1-\sigma}\right) \tag{1.3}$$

где t — комплексная координата точки контура, штрихи означают дифференцирование по дуге s.

Далее вводим новую функцию $w(x, y)$ по формуле

$$u(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y) - [w(a) + w_0(a)]\, J_0(\lambda r_a) \tag{1.4}$$
$$\left(r_a = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

Здесь $w_0(x, y)$ частное решение неоднородного уравнения (1.1), $J_0(\lambda r_a)$ — функция Бесселя нулевого порядка; кроме того, $a = x_0 + iy_0$ — аффикс фиксированной точки контура, выбранной за начало отсчета дуги. Под $w(a)$ и $w_0(a)$ понимаются значения функций $w(x, y)$ и $w_0(x, y)$ в точке a. Вместо первого граничного равенства (1.3) возьмем следующее условие

$$\partial u / \partial s + \operatorname{Re}\varphi'(0) = 0 \tag{1.5}$$

[1] Подобная модификация граничных условий применялась и при решении статической задачи изгиба свободно опертой пластинки [1,2]. В работе [2] поясняется цель описанного видоизменения.

где $\varphi'(0)$ — значение производной в точке $z = 0$ некоторой (определяемой ниже) функции $\varphi(z)$, регулярной в области S. Из соотношения (1.5) вытекает следующее условие [1,2]

$$\operatorname{Re}\varphi'(0) = 0 \tag{1.6}$$

В самом деле, первый член, входящий в соотношение (1.5), представляет собой полную производную по дуге s от некоторой непрерывной и однозначной функции; поэтому, проинтегрировав соотношение (1.5) по дуге s вдоль замкнутого контура L и учитывая однозначность функции $u(x, y)$, придем к условию (1.6). Заметим, что выполнение последнего условия обеспечит разрешимость интегрального уравнения, которое будет получено ниже.

Значение амплитуды $u(x, y)$ из (1.4) подставляем в уравнение (1.1), граничное соотношение (1.5) и второе условие (1.3). В результате для нахождения вспомогательной функции $w(x, y)$ получим однородное уравнение

$$\Delta\Delta w - \lambda^4 w = 0 \tag{1.7}$$

с граничными условиями

$$\partial w / \partial s + \lambda w(a) J_1(\lambda r_a) \cos\Omega + \operatorname{Re}\varphi'(0) = f_1(t) \tag{1.8}$$

$$G(w) - w(a)\, G[J_0(\lambda r_a)] = f_2(t) \tag{1.9}$$

Здесь

$$f_1(t) = -\,\partial w_0 / \partial s - \lambda w_0(a) J_1(\lambda r_a)\cos\Omega, \quad f_2(t) = -\,G(w_0) + w_0(a)\, G[J_0(\lambda r_a)]$$

(Ω угол между вектором $t - a$ и вектором, касательным к контуру L в точке t и направленным в сторону обхода контура). Очевидно, функция $u(x, y)$, выражаемая через $w(x, y)$ при помощи соотношения (1.4), является решением исходной задачи. Действительно, $u(x, y)$ в силу (1.7) и (1.9) удовлетворяет неоднородному уравнению (1.1) и второму граничному условию (1.3). Кроме того, из соотношения (1.5) вытекает, что $u(x, y)$ принимает постоянное значение на контуре L. Поскольку же правая часть соотношения (1.4) обращается в нуль в точке $z = a$, заключаем, что функция $u(x, y)$ будет удовлетворять и первому граничному условию (1.3).

Примечание. При решении статической задачи изгиба пластинки первое условие (1.3) может выполняться с точностью до произвольной постоянной. Поэтому его можно заменить условием равенства нулю производной от прогиба по дуге s контура. Подобная модификация приводит к изменению решения по всей области на некоторую постоянную, что соответствует жесткому смещению пластинки по направлению нормали к ней. В задаче же о вынужденных колебаниях необходимо заботиться о точном выполнении обоих условий (1.3); в этом случае изменение первого граничного условия (1.3) на постоянную приводит к изменению решения на функцию, отличную от постоянной внутри области S. Чтобы избежать этого, приходится вводить вспомогательную функцию $w(x, y)$ при помощи специально выбранного соотношения (1.4).

2. Перейдем к определению функции $w(x, y)$. Предварительно объединим два вещественных граничных условия (1.8) и 1.9) в одно следующее комплексное равенство:

$$\frac{\partial w}{\partial s} + iG(w) + w(a) f_3(t) + \operatorname{Re}\varphi'(0) = \frac{1}{2} f(t) \tag{2.1}$$

Здесь

$$f_3(t) = \lambda J_1(\lambda r_a)\cos\Omega - iG[J_0(\lambda r_a)], \qquad f(t) = 2\,[f_1(t) + if_2(t)] \tag{2.2}$$

Воспользуемся общим представлением И. Н. Векуа [3] для решений (1.7)

$$w(x, y) = \operatorname{Im}\Big\{\chi(z) - z\bar z\int_0^1 \chi(z\tau) P_0[z\bar z(1-\tau)]\, d\tau + \bar z\varphi(z) - z\bar z^2 \int_0^1 \varphi(z\tau) P_1[z\bar z(1-\tau)]\, d\tau\Big\} \tag{2.3}$$

$$P_0(x) = \frac{\lambda}{4}\,\frac{J_1(\lambda\sqrt{x}) - I_1(\lambda\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \qquad P_1(x) = \frac{J_2(\lambda\sqrt{x}) - I_2(\lambda\sqrt{x})}{2x}$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — произвольные регулярные в области S функции, $J_i(\lambda\sqrt{x})$ и $I_i(\lambda\sqrt{x})$ — функции Бесселя соответственно действительного и мнимого аргумента ($i = 1, 2$).

Далее производные $\partial w / \partial z$, $\partial w / \partial \bar{z}$, $\partial^2 w / \partial z \partial \bar{z}$ из (2.3) подставляем в граничное условие (2.1); функции $P_0[z\bar{z}(1-\tau)]$ и $P_1[z\bar{z}(1-\tau)]$ заменяем их выражениями в виде рядов. Приходим к следующей краевой задаче для двух регулярных в области S функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$

$$\varkappa[\varphi'(t) - \overline{\varphi'(t)}] + \alpha(t)\gamma(t) - \beta(t)\overline{\gamma(t)} + 2\operatorname{Re}\varphi'(0) + w(a) f_3(t) + \tag{2.4}$$
$$+ \int_0^1 [\chi(t\tau) K_1(t, \tau) + \overline{\chi(t\tau)} K_2(t, \tau) + \varphi(t\tau) K_3(t, \tau) + \overline{\varphi(t\tau)} K_4(t, \tau)] d\tau = f(t)$$

В этом граничном условии приняты следующие обозначения:

$$\alpha(t) = \bar{t}'' - i\bar{t}', \quad \beta(t) = t'' - it', \quad \gamma(t) = \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}, \quad \chi'(t) = \psi(t)$$

$$K_i(t, \tau) = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\tau)^k}{(k!)^2} A_{ik}(t) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$A_{1k}(t) = \left[\varkappa + \frac{\beta(t)\bar{t}}{k+2}\right] b_k(t) + a_k(t)\alpha(t), \qquad a_k(t) = \frac{t}{8}\left(\frac{\lambda^2 t\bar{t}}{4}\right)^k [1 - (-1)^k]$$

$$A_{2k}(t) = -\left[\varkappa + \frac{\alpha(t)t}{k+2}\right] b_k(t) - \overline{a_k(t)}\beta(t), \qquad b_k(t) = \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2 t\bar{t}}{4}\right)^{k+1} [1 + (-1)^k]$$

$$A_{3k}(t) = \bar{t}\left\{\left[\varkappa + \frac{\bar{t}\beta(t)}{k+3}\right]\frac{b_k(t)}{k+2} + \frac{a_k(t)\alpha(t)}{k+1}\right\}$$

$$A_{4k}(t) = -t\left\{\left[\varkappa + \frac{t\alpha(t)}{k+3}\right]\frac{b_k(t)}{k+2} + \frac{\overline{a_k(t)}\beta(t)}{k+1}\right\}$$

Легко видеть, что ряды $K_i(t, \tau)$, входящие под знак интеграла, абсолютно и равномерно сходящиеся, так что $K_i(t, \tau)$ представляют собой непрерывные по t и τ функции. Благоприятным обстоятельством в данном случае является то, что все внеинтегральные члены краевого условия (2.4) порождаются исключительно внеинтегральными членами представления (2.3). В то же время нетрудно заметить, что внеинтегральные члены представления (2.3) совпадают с представлением Гурса для бигармонической функции. В результате первые три члена краевой задачи (2.4) совпадают формально с соответствующими членами соотношения (1.7) в статье [1]. Это дает возможность при решении краевой задачи (2.4) воспользоваться представлениями для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, содержащимися в [1]

$$\varphi(z) = \int_L [\omega(\xi)\theta_1(\xi) + \overline{\omega(\xi)}\theta_2(\xi)] F(\xi, z) d\xi \tag{2.5}$$

$$\chi(z) = \int_L [\omega(\xi) R_1(\xi, z) + \overline{\omega(\xi)} R_2(\xi, z)] d\xi \tag{2.6}$$

$$\psi(z) = \int_L [\omega(\xi) H_1(\xi, z) + \overline{\omega(\xi)} H_2(\xi, z)] d\xi \tag{2.7}$$

Здесь $\omega(\xi)$ — плотность, которую следует определить. Смысл заключающихся в (2.5), (2.6), (2.7) остальных функций таков

$$\theta_1(\xi) = i + \bar{\xi}'\xi'', \qquad \theta_2(\xi) = -i + \bar{\xi}'\xi'', \qquad F(\xi, z) = \frac{1}{4\pi\varkappa}\left[-1 + \ln\left(1 - \frac{z}{\xi}\right)\right]$$

$$R_1(\xi, z) = -\overline{\xi'^2\theta_2(\xi)}(\xi - z) F(\xi, z) + P(\xi) T(\xi, z)$$

$$R_2(\xi, z) = -\overline{\xi'^2\theta_1(\xi)}(\xi - z) F(\xi, z) + Q(\xi) T(\xi, z)$$

$$H_1(\xi, z) = \frac{\overline{\xi'^2\theta_2(\xi)}}{4\pi\varkappa} \ln\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) + P(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right), \qquad P(\xi) = \frac{1}{4\pi\varkappa}[\varkappa\bar{\xi}' - \bar{\xi}\overline{\theta_1(\xi)}]$$

$$H_2(\xi, z) = \frac{\overline{\xi'^2}\,\overline{\theta_1(\xi)}}{4\pi\varkappa} \ln\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) + Q(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right), \qquad Q(\xi) = \frac{1}{4\pi\varkappa}[\varkappa\bar{\xi}' - \bar{\xi}\overline{\theta_2(\xi)}]$$

$$T(\xi, z) = -\ln\left(1 - \frac{z}{\xi}\right) - \frac{z}{\xi}$$

Под $\ln(1 - z\xi^{-1})$ подразумевается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

В представлениях (2.5), (2.6), (2.7) и в выражении для $\varphi'(z)$ устремляем $z \to t$, где t — точка контура L, и полученные предельные значения подставляем в равенство (2.4), меняя при этом порядок интегрирования. Структура представлений (2.5), (2.6), (2.7) оказывается таковой, что при подстановке их в граничное соотношение (2.4) появляющиеся комбинации интегралов в смысле главного значения по Коши приводят в конечном итоге к регулярным интегралам; поэтому для определения плотности $\omega(t)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами

$$\omega(t) + \int_L \{\omega(\xi)[M(\xi, t) + M_1(\xi, t)] + \overline{\omega(\xi)}[N(\xi, t) + N_1(\xi, t)]\}\, d\xi +$$
$$+ O[\omega(\xi), t] + w[\omega(\xi), a] f_3(t) = f(t) \tag{2.8}$$

Фигурирующие здесь функции $M(\xi, t)$ и $N(\xi, t)$ полностью совпадают с ядрами интегрального уравнения статической задачи для односвязной области, а оператор $O[\omega(\xi), t]$ — с соответствующим оператором статической задачи [1]

$$M(\xi, t) = v_1(\xi, t) + l_1(\xi, t)\frac{d}{d\xi}\ln\frac{\xi - t}{\bar{\xi} - \bar{t}} + \frac{p(\xi, t)}{\xi - t} + q_1(\xi, t) \tag{2.9}$$

$$N(\xi, t) = v_2(\xi, t) + l_2(\xi, t)\frac{d}{d\xi}\ln\frac{\xi - t}{\bar{\xi} - \bar{t}} + \frac{p(\xi, t)}{\xi - t} + q_2(\xi, t)$$

$$v_1(\xi, t) = \overline{t'\theta_1(t)}\, a(\xi, t) - \xi'^2 t'\theta_2(t)\overline{b(\xi, t)}$$

$$v_2(\xi, t) = \overline{t'\theta_1(t)}\, b(\xi, t) - \xi'^2 t'\theta_2(t)\overline{a(\xi, t)}$$

$$\frac{4\pi\varkappa}{\overline{\theta_1(\xi)}} a(\xi, z) = -1 + \ln\frac{1 - (z/\xi)}{\overline{1 - (z/\xi)}}, \qquad b(\xi, z) = a(\xi, z)\frac{\theta_2(\xi)}{\theta_1(\xi)}$$

$$l_1(\xi, t) = \frac{1}{4\pi}\{-\overline{\theta_2(\xi)} + \overline{t'\theta_1(t)}[\xi' - d(\xi, t)] - t'\theta_2(t)\overline{c(\xi, t)}\}$$

$$l_2(\xi, t) = \frac{1}{4\pi}\{-\overline{\theta_1(\xi)} + \overline{t'\theta_1(t)}[\xi' - c(\xi, t)] - t'\theta_2(t)\overline{d(\xi, t)}\}$$

$$p(\xi, t) = \frac{1}{4\pi}\{\xi'[\overline{\xi'\theta_1(\xi)} - \overline{t'\theta_1(t)}] - \bar{\xi}'[\xi'\theta_2(\xi) - t'\theta_2(t)]\} \tag{2.10}$$

$$c(\xi, t) = \frac{1}{\varkappa}(\xi - t)\theta_1(\xi), \qquad d(\xi, t) = \frac{1}{\varkappa}(\xi - t)\theta_2(\xi)$$

$$q_1(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\varkappa}[\overline{t'\theta_1(t)}\,\theta_2(\xi) - t'\overline{\xi'^2}\theta_2(t)\overline{\theta_1(\xi)}]$$

$$q_2(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\varkappa}[\overline{t'\theta_1(t)}\,\theta_1(\xi) - t'\overline{\xi'^2}\theta_2(t)\overline{\theta_2(\xi)}]$$

$$O[\omega(\xi), t] = E\overline{t'\theta_1(t)} - \bar{E}t'\theta_2(t) + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi'[0, \omega(\xi)]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varkappa}\int_L \{\omega(\xi)[\varkappa\bar{\xi}' - \xi\theta_2(\xi)] + \overline{\omega(\xi)}[\varkappa\xi' - \xi\theta_1(\xi)]\}\frac{\overline{\xi'^2}d\xi}{\xi}$$

Ясно, что в случае дифференцируемой кривизны контура L функция $p(\xi, t)$ (2.10) при $\xi = t$ имеет нуль первого порядка, и третьи слагаемые в (2.9) будут ограниченными функциями ξ и t.

Дополнительные члены $M_1(\xi, t)$ и $N_1(\xi, t)$ выражаются следующими быстро сходящимися рядами:

$$M_1(\xi, t) = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} [A_{1k}(t) B_k^{(1)}(\xi, t) + A_{2k}(t) \overline{\xi'^2} \overline{B_k^{(2)}(\xi, t)} +$$

$$+ A_{3k}(t) \theta_1(\xi) B_k^{(3)}(\xi, t) + A_{4k}(t) \overline{\xi'^2} \overline{\theta_2(\xi)} \overline{B_k^{(3)}(\xi, t)}] \qquad (2.11)$$

$$N_1(\xi, t) = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} [A_{1k}(t) B_k^{(2)}(\xi, t) + A_{2k}(t) \overline{\xi'^2} \overline{B_k^{(1)}(\xi, t)} +$$

$$+ A_{3k}(t) \theta_2(\xi) B_k^{(3)}(\xi, t) + A_{4k}(t) \overline{\xi'^2} \overline{\theta_1(\xi)} \overline{B_k^{(3)}(\xi, t)}] \qquad (2.12)$$

Значения $B_k^{(i)}(\xi, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ даются интегралами

$$B_k^{(1)}(\xi, t) = \int_0^1 (1-\tau)^k R_1(\xi, t\tau)\, d\tau, \qquad B_k^{(2)}(\xi, t) = \int_0^1 (1-\tau)^k R_2(\xi, t\tau)\, d\tau$$

$$B_k^{(3)}(\xi, t) = \int_0^1 (1-\tau)^k F(\xi, t\tau)\, d\tau \qquad (2.13)$$

После выполнения интегрирования по τ в (2.13) будем иметь

$$B_k^{(1)}(\xi, t) = \overline{\theta_2(\xi)}\, \Phi_k(\xi, t) - P(\xi) Z_k(\xi, t)$$

$$B_k^{(2)}(\xi, t) = \overline{\theta_1(\xi)}\, \Phi_k(\xi, t) - Q(\xi) Z_k(\xi, t), \qquad B_k^{(3)}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\varkappa}\left[B_k(\xi, t) - \frac{1}{k+1}\right]$$

причем входящие сюда величины таковы

$$\Phi_k(\xi, t) = -\overline{\xi'^2}\left\{B_k^{(3)}(\xi, t)(\xi - t) + tB_{k+1}^{(3)}(\xi, t)]\right\}$$

$$Z_k(\xi, t) = B_k(\xi, t) + \frac{t}{\xi}\, \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$B_k(\xi, t) = \left(1 - \frac{\xi}{t}\right)^{k+1} \left\{\frac{1}{k+1} \ln\left(1 - \frac{t}{\xi}\right) - \sum_{j=0}^{k} \frac{C_k^j}{(j+1)^2}\left[(-1)^j + \left(\frac{t}{\xi} - 1\right)^{-j-1}\right]\right\}$$

Содержащийся в (2.8) функционал $w[\omega(\xi), a]$ (равный значению функции $w(x, y)$ в точке $z = a$) определяется формулой (2.3) при $z = a$.

Остановимся теперь на разрешимости интегрального уравнения (2.8). Поступая как в [4], воспользуемся доказанной в [1] разрешимостью интегрального уравнения для соответствующей статической задачи. Из вышеприведенных соотношений для $M_1(\xi, t)$ и $N_1(\xi, t)$ следует, что ядра уравнения (2.8) являются целыми функциями параметра λ. При $\lambda = 0$ функции $M_1(\xi, t)$, $N_1(\xi, t)$ и $f_3(t)$ обращаются в нуль, и интегральное уравнение (2.8) при этом совпадает с упомянутым выше уравнением статического изгиба пластинки. Отсюда на основании теоремы Я. Тамаркина [5] вытекает разрешимость интегрального уравнения (2.8) почти для всех значений параметра λ.

В случае, когда λ не совпадает с полюсом резольвенты уравнения (2.8), найдем из него плотность $\omega(t)$; затем из соотношений (2.5), (2.6), (2.7) и (2.3) последовательно определим функции $\varphi(z)$, $\chi(z)$, $\psi(z)$ и $w(x, y)$.

3. Частное решение $w_0(x, y)$ неоднородного уравнения (1.1) с произвольной дифференцируемой функцией $q(x, y)$ в правой части можно брать в следующем виде:

$$w_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi\lambda^2 D} \iint_S \left[\frac{\pi}{2} Y(\lambda r) + K(\lambda r)\right] q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (3.1)$$

Здесь

$$Y(\lambda r) = Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)\left(\ln\frac{\lambda}{2} + C\right)\frac{2}{\pi}$$

$$K(\lambda r) = K_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\left(\ln\frac{\lambda}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)$$

$Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ — функции Бесселя второго рода соответственно действительного и мнимого аргумента, C — постоянная Эйлера. Интегрирование ведется по области задания распределенной нагрузки S.

Учитывая, что выражение, стоящее в квадратных скобках под знаком интеграла в (3.1), имеет при $r \to 0$ особенность типа $r^2 \ln r$, легко убеждаемся, что функция $w_0(x, y)$ действительно удовлетворяет неоднородному уравнению (1.1).

Частное решение, взятое в виде (3.1), допускает предельный переход при $\lambda \to 0$. При этом получаем частное решение неоднородного бигармонического уравнения

$$w_{01}(x, y) = \frac{1}{8\pi D}\iint\limits_S q(\xi, \eta)\left(r^2 \ln r - \frac{3}{4}r^2\right) d\xi\, d\eta$$

В заключение приношу благодарность Д. И. Шерману за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 20 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. О поперечном изгибе пластинки, опертой вдоль края, составленного из нескольких замкнутых кривых. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
2. Шерман Д. И. Об упругом равновесии пластинки, опертой по краю. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, 1957, т. X, № 3.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. Шерман Д. И. Об установившихся упругих колебаниях при заданных смещениях на границе среды. ПММ, 1946, т. X, № 5, 6.
5. Tamarkin J. D. On Fredholm's integral equations whose kernels are analytic in a parameter. Ann. Math., 1927, v. 28, № 2.

К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

При решении вариационными методами ряда задач теории ползучести (например, задач устойчивости) оказывается более удобным варьировать одновременно напряжения и смещения, либо скорости напряжений и скорости смещений. В теории ползучести вариационный метод, основанный на варьировании напряжений и смещений, впервые был предложен В. И. Розенблюмом [1] для изучения устойчивости продольно сжатого стержня в условиях ползучести. При этом варьировались напряжения и смещения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и заданным граничным условиям. Позднее в работе [2] для ползучести тела по теории течения [3] было указано вариационное уравнение, основанное на варьировании скоростей напряжений и скоростей смещений.

Ниже для ползучести тела по теории течения [3] при малых по сравнению с единицей удлинениях и сдвигах [4] указывается вариационное уравнение, основанное на варьировании напряжений и смещений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и уравнениям, следующим из уравнений равновесия при дифференцировании их по времени (эти уравнения в целях краткости называются уравнениями равновесия в скоростях).