Когда угол α связан с показателем политропы γ соотношением $\beta = \operatorname{tg}^2\alpha$ ($\beta > 1$, $\alpha > 1/4\,\pi$), решением задачи (1), (2) будет

$$c = 1 + \varkappa u_1 + \varkappa \sqrt{\beta} u_2$$

Граница возмущенной области с областью вакуума $u_1 + \sqrt{\beta} u_2 = -\varkappa^{-1}$ лежит при этом внутри области интегрирования.

Решение в физической плоскости имеет вид

$$c = \beta^{-1}(1 + \varkappa\xi_1 + \varkappa\sqrt{\beta}\xi_2), \qquad u_1 = \xi_1 - c, \qquad u_2 = \xi_2 - \sqrt{\beta} c$$

Для границы возмущенной области с волной Римана и границы с вакуумом имеем соответственно

$$\xi_1 - \sqrt{1-\varkappa^2}\xi_2 = -\varkappa^{-1}, \qquad \xi_1 + \sqrt{\beta}\xi_2 = -\varkappa^{-1}$$

На фиг. 1 и 2 изображена картина движения в плоскостях u_1u_2 и $\xi_1\xi_2$ соответственно для случая $\alpha = 1/3\,\pi$, $\gamma = 2$.

Поступила 25 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 1962, т. 2, М.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Я. С. Уфлянд (Ленинград)

Исследованию явлений магнитоупругости, т. е. таких колебаний упругого тела, которые происходят под действием объемных сил не только механического, но и электромагнитного происхождения — последние возникают в том случае, когда движение электропроводной среды происходит в магнитном поле, посвящен ряд работ С. Калисского [1-6], который рассматривал идеально проводящие тела, диэлектрики, а также некоторые другие предельные случаи. Распространению плоских волн в идеальном проводнике посвящена статья Н. И. Долбина [7].

Ниже изучаются некоторые магнитоупругие процессы, происходящие в телах конечной проводимости. При помощи метода интегральных преобразований дано точное решение плоской задачи о магнитоупругих колебаниях неограниченного тела в поперечном магнитном поле под действием произвольных объемных сил.

Система исходных дифференциальных уравнений состоит из динамических уравнений теории упругости, содержащих пондеромоторные силы

$$G\Delta\mathbf{u} + (\lambda + G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{F} + \frac{\mu}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{H} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

и уравнений электродинамики для движущейся среды (током смещения пренебрегается)

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right) = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{h}, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 \tag{2}$$

В формулах (1)—(2) введены обозначения: $\mathbf{u}$—вектор смещения, $\mathbf{F}$—объемная сила, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{h}$ — приложенное (однородное) и индуцированное магнитное поле ($h \ll H$), $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{j}$ — плотность тока, ρ — плотность, λ и G — коэффициенты Ламе, σ — проводимость, μ — магнитная проницаемость, c — скорость света.

В дальнейшем рассматривается плоская задача ($u_z \equiv 0$, $\partial/\partial z \equiv 0$), причем считается, что колебания происходят в поперечном магнитном поле, так что $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$. При этих условиях

$$\mathbf{j} \times \mathbf{H} = (c/4\pi)\,[\operatorname{rot}\mathbf{h} \times \mathbf{H}] = -(cH/4\pi)\operatorname{grad} h_z$$

и уравнения движения принимают вид

$$G\Delta\mathbf{u} + (\lambda + G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{F} - \frac{\mu H}{4\pi}\operatorname{grad} h_z = \rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{3}$$

Если ввести потенциалы φ и $\mathbf{A} = \psi\mathbf{k}$ по известной формуле

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{4}$$

а также представить объемную силу в виде

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\Psi\mathbf{k} \tag{5}$$

то получаются раздельные уравнения

$$(\lambda + 2G)\Delta\varphi + \Phi - \frac{\mu H}{4\pi}h_z = \rho\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad G\Delta\psi + \Psi = \rho\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{6}$$

из которых видно, что электромагнитные эффекты в данном случае наблюдаются только для волн расширения и не влияют на волны сдвига.

Чтобы исключить магнитное поле h_z, возьмем дивергенцию от уравнения (3), после чего получим равенство

$$G\operatorname{div}\Delta\mathbf{u} + (\lambda + G)\Delta\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{div}\mathbf{F} - \frac{\mu H}{4\pi}\Delta h_z = \rho\operatorname{div}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Далее, применяя операцию ротора к первому уравнению (2) и учитывая вторые, находим

$$\Delta\mathbf{h} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h} + \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{u}) \tag{8}$$

Определяя отсюда величину Δh_z, подставляя в (7), интегрируя по времени и считая начальные условия нулевыми, приходим к следующему выражению для проекции[1] поля h_z:

$$h_z = \Delta\left\{\frac{c^2}{\sigma H\mu^2}\left[(\lambda + 2G)\Delta\int_0^t\varphi\,dt + \int_0^t\Phi\,dt - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] - H\varphi\right\} \tag{9}$$

Наконец, подстановка этого выражения в первое из соотношений (6) дает возможность получить следующее уравнение для потенциала φ:

$$(\lambda + 2G + \varkappa)\,\Delta\varphi + \nu\Delta\left[\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (\lambda + 2G)\Delta\int_0^t\varphi\,dt\right] + \Phi - \nu\Delta\int_0^t\Phi\,dt = \rho\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\left(\varkappa = \frac{\mu H^2}{4\pi},\quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\right) \tag{10}$$

Для получения решения последнего уравнения, стремящегося к нулю на бесконечности вместе с первыми тремя производными, применим к (10) последовательно преобразование Лапласа и двойное интегральное преобразование Фурье, положив

$$f^\circ(\alpha, \beta, p) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x, y, t)\,e^{-pt+i(\alpha x+\beta y)}dt\,dx\,dy \tag{11}$$

[1] Проекции (8) на оси x и y приводят к однородным уравнениям для величин h_x и h_y. Из требования равенства их нулю на бесконечности вытекает, что величины $h_x = h_y \equiv 0$.

С учетом нулевых начальных условий, а также требований на бесконечности получаем уравнение для преобразованной величины φ°

$$-(\lambda + 2G + \varkappa)(\alpha^2 + \beta^2)\varphi^\circ - \nu\left[\rho p\,(\alpha^2 + \beta^2)\varphi^\circ + \frac{\lambda + 2G}{p}(\alpha^2 + \beta^2)^2\varphi^\circ\right] +$$
$$+ \Phi^\circ + \frac{\nu}{p}(\alpha^2 + \beta^2)\,\Phi^\circ = \rho p^2\,\varphi^\circ$$

откуда

$$\varphi^\circ = \frac{[p + \nu(\alpha^2 + \beta^2)]\,\Phi^\circ}{\rho p^3 + p(\alpha^2 + \beta^2)(\lambda + 2G + \varkappa) + \nu(\alpha^2 + \beta^2)\,[\rho p^2 + (\lambda + 2G)(\alpha^2 + \beta^2)]} \qquad (12)$$

Таким образом, общее решение поставленной задачи для потенциала φ дается формулой обращения

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_L e^{pt}dp \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^\circ(\alpha, \beta, p)\, e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha\, d\beta \qquad (13)$$

где L — бесконечная прямая, проведенная в комплексной плоскости p параллельно мнимой оси правее всех особых точек функции φ°.

При дальнейших преобразованиях полученного решения мы будем предполагать, что объемной силой является импульс величины Q, сосредоточенный в произвольной точке плоскости $x0y$, причем, не нарушая общности, можно считать, что он приложен в начале координат и направлен по оси y. Заметим, что решение для случая произвольных объемных сил может быть получено из данного путем интегрирования по области приложения нагрузок и по времени с последующим применением интеграла Дюамеля. Так как потенциалы Φ и Ψ, соответствующие объемной силе с составляющими $F_x = 0$, $F_y = F_y(x, y, t)$, даются формулами (см., например, [8], стр. 194)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_y(\xi, \eta, t)\frac{\partial \ln \rho'}{\partial y}d\xi\, d\eta, \quad \Psi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_y(\xi, \eta, t)\frac{\partial \ln \rho'}{\partial x}d\xi\, d\eta \qquad (14)$$
$$\rho' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

то для случая силы $\mathbf{F} = F(t)\,\mathbf{j}$, сосредоточенной в начале координат, будем иметь

$$\Phi = \frac{yF(t)}{2\pi(x^2 + y^2)}, \qquad \Psi = -\frac{xF(t)}{2\pi(x^2 + y^2)} \qquad (15)$$

Применяя к этим выражениям преобразования Лапласа и Фурье, находим для случая импульса Q следующие преобразованные выражения:

$$\Phi^\circ = \frac{Qi\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \Psi^\circ = -\frac{Qi\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad (16)$$

Введем полярные координаты: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\alpha = R\cos\vartheta$, $\beta = R\sin\vartheta$; тогда решение (13) можно представить в виде

$$\varphi = -\frac{Q}{8\pi^3 i}\int_L e^{pt}dp\,\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-iRr\cos(\theta - \vartheta)}\frac{p + \nu R^2}{R\chi(R, p)}dR\, d\vartheta \qquad (17)$$

где

$$\chi(R, p) = \rho p^3 + pR^2(\lambda + 2G + \varkappa) + \nu R^2[\rho p^2 + (\lambda + 2G)R^2] \qquad (18)$$

Выполняя при помощи известного интегрального представления функций Бесселя интегрирование по переменной ϑ, получаем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi^2 i}\int_L e^{pt}dp\int_0^{\infty}\frac{p + \nu R^2}{\chi(R, p)}J_1(Rr)\,dR \qquad (19)$$

Так как знаменатель χ является полиномом четвертой степени относительно переменной R, то, разлагая его на множители и пользуясь формулой (см. [9], стр. 692)

$$\int_0^\infty \frac{x^2 J_1(ax)\,dx}{x^2+b^2} = bK_1(ab)$$

где $K_1(z)$ — функция Макдональда, получим решение задачи в виде следующего комплексного интеграла для потенциала φ волн расширения

$$\varphi = \frac{Qyt}{2\pi\rho r^2} + \frac{Qy}{4\pi^2 i\rho r}\int_L [R_1(p-\nu R_2^2)K_1(R_2 r) - R_2(p-\nu R_1^2)K_1(R_1 r)]\frac{R_1R_2}{R_2^2-R_1^2}e^{pt}\frac{dp}{p^3} \tag{20}$$

$$R_{1,2}^2 = p\,\frac{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 4\nu\rho p(\lambda+2G)}}{2\nu(\lambda+2G)}, \qquad \gamma = \lambda + 2G + \varkappa + \nu\rho p \tag{21}$$

После определения φ значение индуцированного магнитного поля $h_z \equiv h$ легко получается на основании первой формулы (6)

$$h = \frac{4\pi}{\mu H}\left[(\lambda+2G)\,\Delta\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Phi\right] \tag{22}$$

Рассмотрение асимптотических выражений величин

$$R_2 \approx \frac{p}{a}, \ \left(a = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}\right), \quad R_1 \approx \sqrt{\frac{p}{\nu}}, \quad |p| \to \infty$$

показывает, что при $\nu \neq 0$ потенциал φ (а также поле h) состоит из двух качественно различных слагаемых: одно из них представляет собою волну, распространяющуюся со скоростью a, в то время как другое вообще не носит волнового характера.

Случай $\nu = 0$, соответствующий идеально проводящему телу, является особым, так как исходное уравнение (10) меняет свой тип. При этом

$$R_1 \to \infty, \qquad R_2 \to \frac{p}{a^*}, \qquad a^* = \sqrt{\frac{\lambda+2G+\varkappa}{\rho}}$$

и преобразование выражения (20) дает

$$\varphi = \frac{Qyt}{2\pi\rho r^2} - \frac{Qy}{4\pi^2 i\rho r a^*}\int_L K_1\left(p\frac{r}{a^*}\right)e^{pt}\frac{dp}{p} \tag{23}$$

Если применить формулу (см. [10], т. 1, стр. 140)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L K_1\left(p\frac{r}{c}\right)e^{pt}\frac{dp}{p} = \begin{cases} 0 & (t < r/c) \\ \sqrt{c^2t^2/r^2 - 1} & (t > r/c) \end{cases} \tag{24}$$

то находим окончательно

$$\varphi = \frac{Qy}{2\pi\rho r^2}\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^{*2}}}\right), \qquad t > \frac{r}{a^*}, \qquad \varphi \equiv \frac{Qyt}{2\pi\rho r^2}, \quad t < \frac{r}{a^*} \tag{25}$$

Последнее выражение дает тот же закон для потенциала φ, что и обычная динамическая теория упругости (см., например, [11], гл. XII), причем скорость распространения имеет значение [7]

$$\sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2G + \mu H^2/\pi)}$$

В этом предельном случае магнитное поле h связано с потенциалом φ зависимостью

$$h = -H\Delta\varphi \tag{26}$$

Из общей формулы (20) можно получить решение задачи для одномерного случая, когда импульсы с плотностью q равномерно распределены по оси Ox. Проводя в (20) интегрирование по переменной x в пределах $(-\infty, +\infty)$ и пользуясь формулой ([9], стр. 7

$$\int_0^\infty K_1\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+|y|}} = \frac{\pi}{2ay}e^{-a|y|}, \quad y > 0 \tag{27}$$

получаем

$$\varphi = \frac{qt}{2\rho} + \frac{q}{4\pi\rho i}\int\limits_L [R_1^2(p - \nu R_2^2)\,e^{-R_2|y|} - R_2^2(p - \nu R_1^2)\,e^{-R_1|y|}]\,\frac{e^{pt}dp}{(R_2^2 - R_1^2)\,p^3} \qquad (28)$$

Общие выражения (20) или (28) могут быть приведены к вещественному виду, если учесть, что единственной особой точкой подынтегральных функций является точка разветвления $p = 0$, и провести интегрирование по берегам разреза вдоль отрицательной части вещественной оси p.

Для получения асимптотических представлений искомых функций при $t \to 0$ и $t \to \infty$ можно использовать известные методы операционного исчисления. Так формула (28) дает асимптотическое выражение

$$\varphi \underset{t\to\infty}{\approx} \frac{Q\nu\varkappa}{2(\lambda + 2G + \varkappa)^2}\left\{1 - \Phi\left[\frac{|y|\sqrt{\lambda + 2G + \varkappa}}{2\sqrt{(\lambda + 2G)\,\nu t}}\right]\right\} \qquad (29)$$

где $\Phi(z)$ — функция вероятности.

Простые приближенные формулы для функций φ и h могут быть также получены путем разложений по малым параметрам $\varkappa$, ν и ν^{-1}.

Предельный переход $\varkappa \to 0$, соответствующий отсутствию магнитного поля, дает $R_1 = p/a$, $R_2 = \sqrt{p/\nu}$, что после использования формулы (24) приводит к выражению (25) с заменой скорости a^* на

$$a = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2G)}$$

Можно показать, что такой же результат получится и после предельного перехода $\nu \to \infty$, когда упругое тело становится непроводящим.

В заключение приводим общее выражение для потенциала волн сдвига ψ, который на основании (6) и (16) дается формулой

$$\psi = -\frac{Qx}{2\pi\rho r^2}\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{b^2}}\right), \quad t > \frac{r}{b}, \quad \psi \equiv -\frac{Qxt}{2\pi\rho r^2}, \quad t < \frac{r}{b}, \qquad b = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (30)$$

Интегрированием по x от $-\infty$ до $+\infty$ можно отсюда получить соответствующее выражение для одномерного случая.

Поступила 3 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. Solution of the equations of motion in a magnetic field for an isotropic body in an infinite space assuming perfect electric conductivity. Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., 1959, 3, 53.
2. Kaliski S. Problem a perfect conductor isotropic and transversally isotropic in a magnetic field. Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., 1961, 2, 137.
3. Kaliski S. The Cauchy problem for a real isotropic elastic conductor in a magnetic field. Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., 1961, 2, 179.
4. Kaliski S. The Cauchy problem for an elastic dielectric in a magnetic field. Proc. Vibrat. Probl. Polish. Acad. Sci., 1961, 3, 237.
5. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., 1962, 4 (13), p. 225.
6. Kaliski S. Waves produced by a mechanical impulse on the surface of a semi-space constituting a real conductor in magnetic fields. Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., 1962, 4 (13), 293.
7. Долбин Н. И. Распространение плоских упругих волн в неограниченной среде, находящейся в магнитном поле. ПМТФ, 1962, т. 5, стр. 146.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
10. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Tables of integral transforms. N. Y., Toronto, London, 1954.
11. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.