ИСТЕЧЕНИЕ В ВАКУУМ НА КОСОЙ СТЕНКЕ

В. А. Сучков

(Челябинск)

Покоящийся политропный газ $1 < \gamma < 3$ занимает угловую область $x_1 > 0$, $x_2 - x_1 \operatorname{tg} \alpha > 0$, ограниченную жесткими стенками. При $t = 0$ стенка $x_1 = 0$ убирается, газ начинает истекать в вакуум.

Движение будет автомодельным и потенциальным. Можно считать, что компоненты вектора скорости u_1, u_2, скорость звука c и автомодельные переменные $\xi_1 = x_1 / t$, $\xi_2 = x_2 / t$ отнесены к скорости звука в покоящемся газе $c_0 = 1$.

Вдали от стенки $\xi_2 = \xi_1 \operatorname{tg} \alpha$ движение описывается невозмущенной волной Римана

$$u_1 = \frac{\xi_1 - 1}{\varkappa + 1}, \qquad u_2 = 0, \qquad c = 1 + \varkappa u_1, \qquad \varkappa = \frac{\gamma - 1}{2}, \qquad -\frac{1}{\varkappa} \leqslant \xi_1 \leqslant 1$$

В возмущенной области ищем решение типа двойной волны [1]. Задача сводится к определению функции $c(u_1, u_2)$, удовлетворяющей уравнению

$$(\varkappa^2 - c_2^2)\, c_{11} + 2c_1c_2c_{12} + (\varkappa^2 - c_1^2)\, c_{22} = (\varkappa / c)\, [(c_1^2 + c_2^2)(1 - \varkappa) - 2\varkappa^2] \qquad (1)$$

и граничным условиям

$$u_2 = 0, \quad c = 1 + \varkappa u_1, \qquad -\varkappa^{-1} \leqslant u_1 \leqslant 0, \qquad u_2 = u_1 \operatorname{tg} \alpha, \qquad c_2 = c_1 \operatorname{tg} \alpha \qquad (2)$$

где

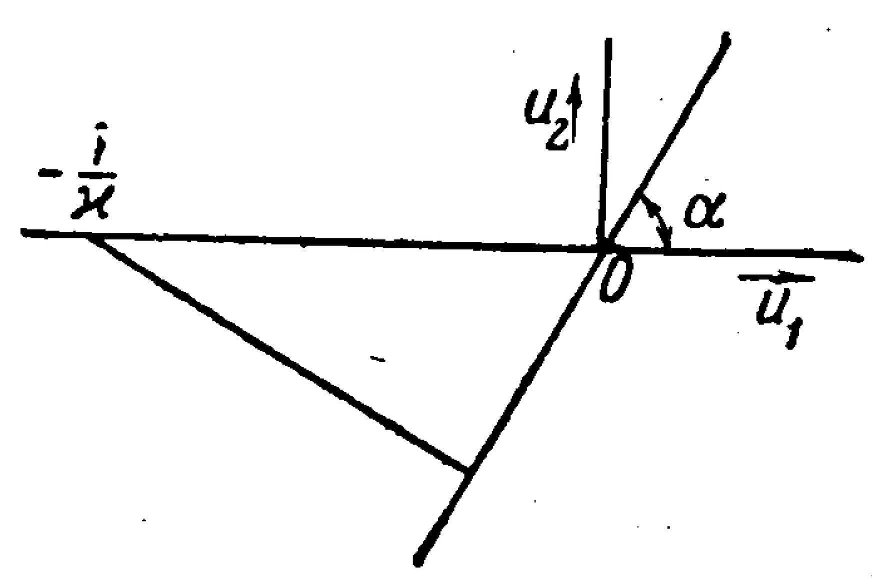
$$c_i = \frac{\partial c}{\partial u_i}, \qquad c_{ij} = \frac{\partial^2 c}{\partial u_i \partial u_j} \qquad (i, j, = 1, 2)$$

Линия $u_2 = 0$ является характеристикой уравнения (1). Из условия на характеристике для $0 < \varkappa < 1$ получим

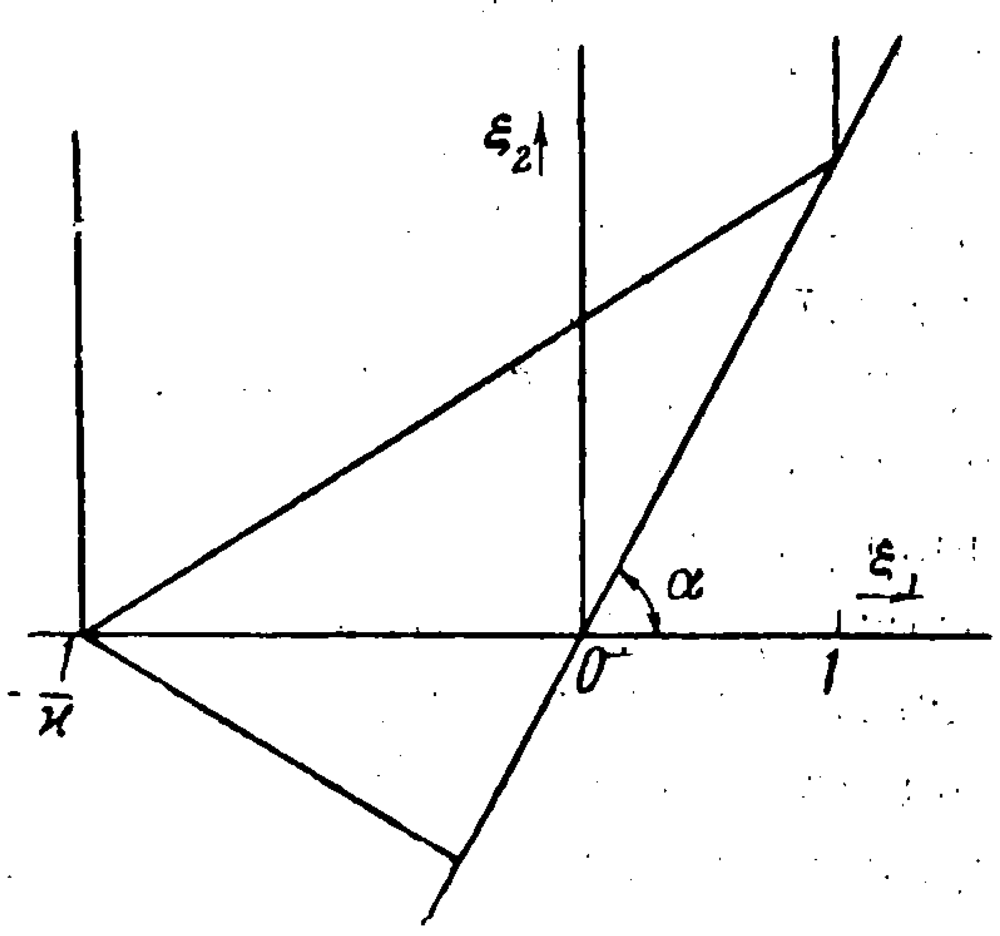
$$c_2 = \varkappa\, [\beta + (1 + \varkappa u_1)^{(1-\varkappa)/\varkappa} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)]^{1/2} \qquad \left(\beta = \frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa} > 1\right)$$

Вторая характеристика, проходящая через точку $u_1 = u_2 = 0$, лежит вне области интегрирования, т. е. мы имеем вторую смешанную задачу для уравнения (1), решение которой можно найти методом характеристик [2]. Область интегрирования ограничена слева характеристикой, проходящей через точку $u_1 = -\varkappa^{-1}$, $u_2 = 0$.

Граница с вакуумом находится из условия $c(u_1, u_2) = 0$. Тангенсы углов наклона



Фиг. 1



Фиг. 2

граничной характеристики и кривой $c(u_1, u_2) = 0$ в точке $u_1 = -\varkappa^{-1}$, $u_2 = 0$ соответственно будут $-2\sqrt{\beta} / (\beta - 1)$, $-1 / \sqrt{\beta}$, следовательно, кривая $c(u_1, u_2) = 0$ в окрестности этой точки лежит внутри области интегрирования. Ясно, что кривая $c(u_1, u_2) = 0$ пересекает стенку под прямым углом. Если функция $c(u_1, u_2)$ получена в результате решения задачи (1), (2), то переход из плоскости годографа скорости u_1u_2 в физическую плоскость $\xi_1\xi_2$ осуществляется по формулам

$$\xi_i = u_i + \frac{cc_i}{\varkappa} \qquad (i = 1, 2)$$

Когда угол α связан с показателем политропы γ соотношением $\beta = \mathrm{tg}^2\alpha$ ($\beta > 1$, $\alpha > {}^1/_4\pi$), решением задачи (1), (2) будет

$$c = 1 + \varkappa u_1 + \varkappa \sqrt{\beta} u_2$$

Граница возмущенной области с областью вакуума $u_1 + \sqrt{\beta} u_2 = -\varkappa^{-1}$ лежит при этом внутри области интегрирования.

Решение в физической плоскости имеет вид

$$c = \beta^{-1}(1 + \varkappa\xi_1 + \varkappa\sqrt{\beta}\xi_2), \qquad u_1 = \xi_1 - c, \qquad u_2 = \xi_2 - \sqrt{\beta} c$$

Для границы возмущенной области с волной Римана и границы с вакуумом имеем соответственно

$$\xi_1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}\xi_2 = -\varkappa^{-1}, \qquad \xi_1 + \sqrt{\beta}\xi_2 = -\varkappa^{-1}$$

На фиг. 1 и 2 изображена картина движения в плоскостях u_1u_2 и $\xi_1\xi_2$ соответственно для случая $\alpha = {}^1/_3\pi$, $\gamma = 2$.

Поступила 25 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 1962, т. 2, М.

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Я. С. Уфлянд (Ленинград)

Исследованию явлений магнитоупругости, т. е. таких колебаний упругого тела, которые происходят под действием объемных сил не только механического, но и электромагнитного происхождения — последние возникают в том случае, когда движение электропроводной среды происходит в магнитном поле, посвящен ряд работ С. Калиского [1–6], который рассматривал идеально проводящие тела, диэлектрики, а также некоторые другие предельные случаи. Распространению плоских волн в идеальном проводнике посвящена статья Н. И. Долбина [7].

Ниже изучаются некоторые магнитоупругие процессы, происходящие в телах конечной проводимости. При помощи метода интегральных преобразований дано точное решение плоской задачи о магнитоупругих колебаниях неограниченного тела в поперечном магнитном поле под действием произвольных объемных сил.

Система исходных дифференциальных уравнений состоит из динамических уравнений теории упругости, содержащих пондеромоторные силы

$$G\Delta\mathbf{u} + (\lambda + G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{F} + \frac{\mu}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{H} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

и уравнений электродинамики для движущейся среды (током смещения пренебрегается)

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}\right) = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{h}, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 \tag{2}$$

В формулах (1)—(2) введены обозначения: $\mathbf{u}$—вектор смещения, $\mathbf{F}$—объемная сила, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{h}$ — приложенное (однородное) и индуцированное магнитное поле ($h \ll H$), $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{j}$ — плотность тока, ρ — плотность, λ и G — коэффициенты Ламе, σ — проводимость, μ — магнитная проницаемость, c — скорость света.