

## ДВИЖЕНИЕ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л. А. Эпштейн (Москва)

Рассматривается плоская задача об установившемся движении наклонной пластинки под поверхностью идеальной невесомой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Постановка задачи близко соответствует случаю движения пластинки при больших числах Фруда. Для решения применяются методы теории струй.

1. Схематическая картина течения в физической плоскости  $z = x + iy$  представлена на фиг. 1.

На пластинку набегаёт поток со скоростью  $V_0$ . Вектор скорости в бесконечности составляет с пластинкой угол  $\alpha_1$ . Линия тока, подходящая к критической точке  $D$ , отстоит от свободной поверхности  $EF$  вдали от пластинки на расстоянии  $h$ . Предполагается, что точка  $B$  является точкой схода струй, т. е. что выполняется условие Жуковского — Чаплыгина.

На фиг. 2 показана плоскость комплексного переменного

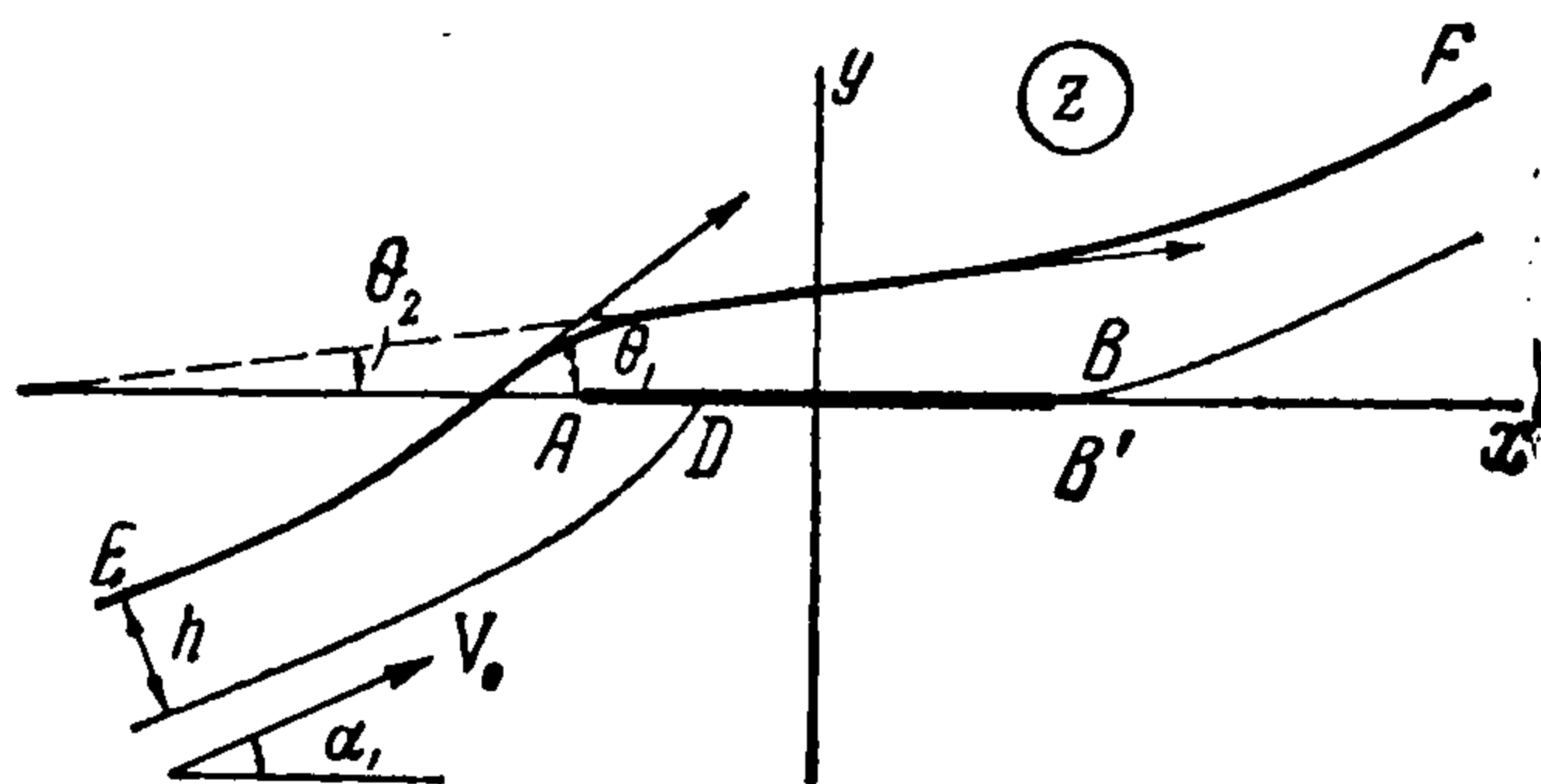
$$\vartheta = V_0 dz / dw = (V_0 / V) e^{i\theta}$$

где  $V$  — модуль вектора скорости, а  $\theta$  — его угол с осью абсцисс.

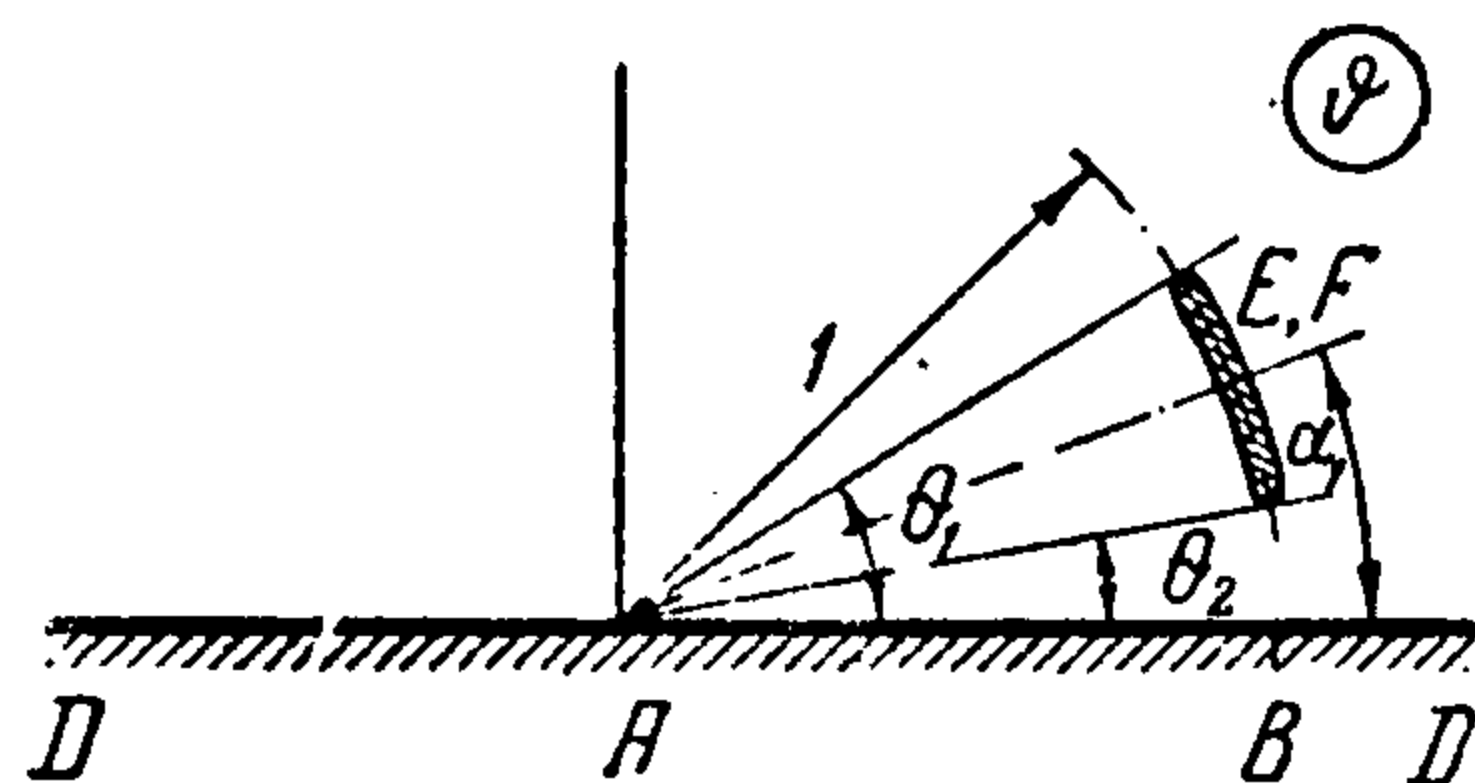
В плоскости  $\vartheta$  пластинке будет соответствовать действительная ось.

Свободной поверхности жидкости в плоскости  $\vartheta$  отвечает разрез по дуге  $|\vartheta| = 1$  между углами наибольшего  $\theta_1$  и наименьшего  $\theta_2$  углов наклона свободной поверхности. Таким образом, в плоскости  $\vartheta$  жидкость занимает двухсвязную область, состоящую из верхней полуплоскости с дугообразным разрезом.

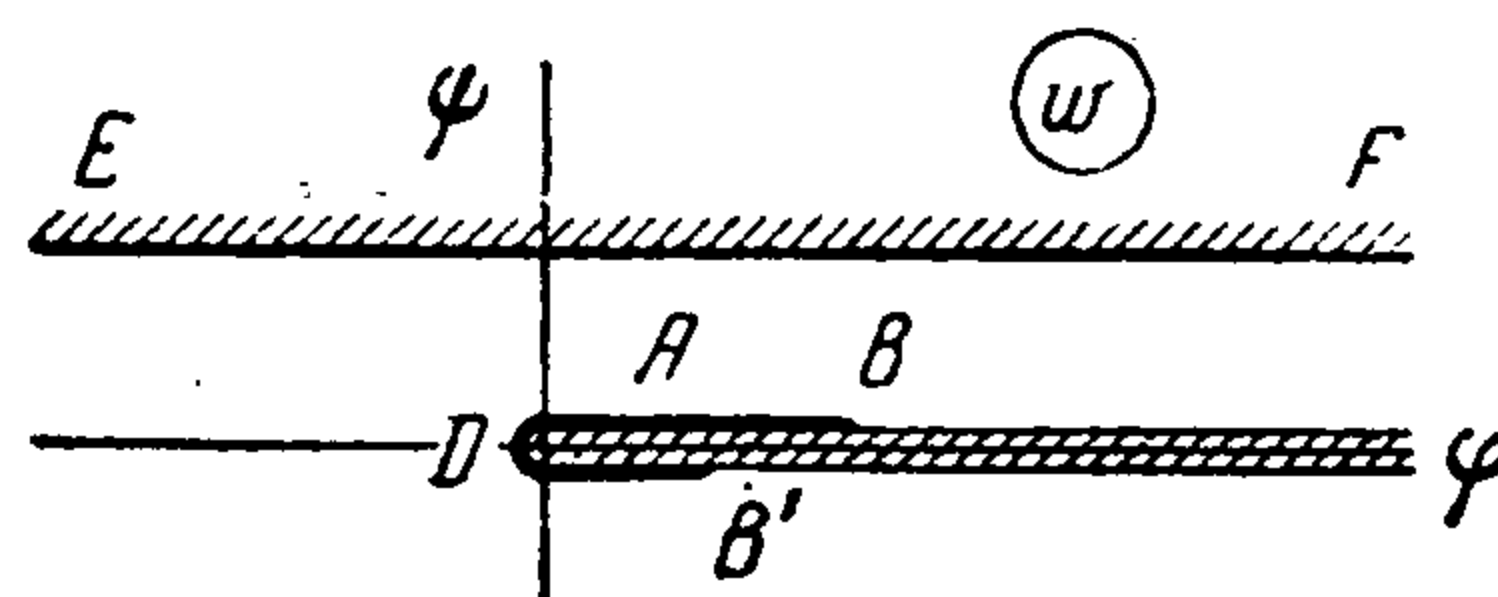
На фиг. 3 изображена плоскость комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$ . Принято, что на линии тока  $CD$  (фиг. 1) значение  $\psi = 0$ . В точке  $D$  полагаем  $\varphi = 0$ . Так как в физической плоскости одним и тем же значениям  $z$  линии тока  $\psi = 0$  соответствуют после точки разветвления различные значения  $\varphi$ , то на плоскости  $w$  вправо от точки  $D$  будет идти разрез. Разность значений  $\varphi$  в точках  $B$  и  $B'$  (фиг. 3), очевидно, равна циркуляции скорости вокруг пластинки.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение поставленной задачи будет получено, если удастся найти конформное отображение областей течения  $\vartheta$  и  $w$  на некоторую область параметрического переменного  $v$ , т. е. определить

$$\vartheta = V_0 dz / dw = f_1(v), \quad w = f_2(v) \quad (1.1)$$

В качестве области параметрического переменного выберем внутренность прямоугольника.

2. Отобразим на внутренность прямоугольника плоскости  $v$  область течения плоскости  $w$ . Вначале отображаем  $w$  на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного  $\tau$ . Переведем при этом точки  $E, F, D$  (фиг. 3) в точки действительной оси  $\tau = \infty, \tau = 1$  и  $\tau = 0$ . Используя формулу Шварца — Кристоффеля, получим

$$w = C_1 [\tau + \ln(\tau - 1) - \pi i] \quad (2.1)$$

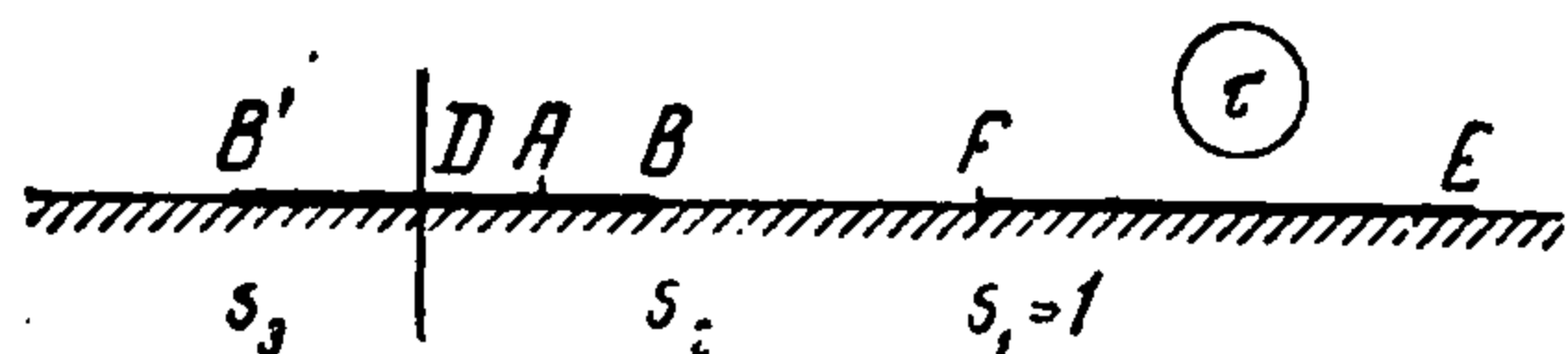
При действительном  $\tau \geq 1$  функция тока  $\psi = hV_0$ ; учитывая это и сопоставляя коэффициенты при мнимых частях (2.1), найдем  $C_1$  и окончательно

$$w = -\frac{hV_0}{\pi} [\tau + \ln(\tau - 1) - \pi i] \quad (2.2)$$

На плоскости  $\tau$  пластинке будет соответствовать отрезок  $B'B$  действительной оси, а свободной поверхности — полубесконечный отрезок  $FE$  (фиг. 4).

Отобразим теперь верхнюю полуплоскость  $\tau$  на внутренность прямоугольника плоскости параметрического переменного  $v$  (фиг. 5). Пусть при этом, отрезок  $B'B$  соответствует нижней стороне прямоугольника, а отрезок  $FE$  — его верхней стороне.

Используя снова формулу Шварца—Кристоффеля, можем написать



Фиг. 4

$$v = A_1 \int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-s_1)(t-s_2)(t-s_3)}} + A_2 \quad (2.3)$$

где  $s_1 = 1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  — координаты точек  $F$ ,  $B$  и  $B'$  на  $\tau$ . Перейдем к новой переменной  $t_1 = t + s$ ; вводя обозначения

$$s_1 + s = e_1', \quad s_2 + s = e_2', \quad s_3 + s = e_3' \quad (2.4)$$

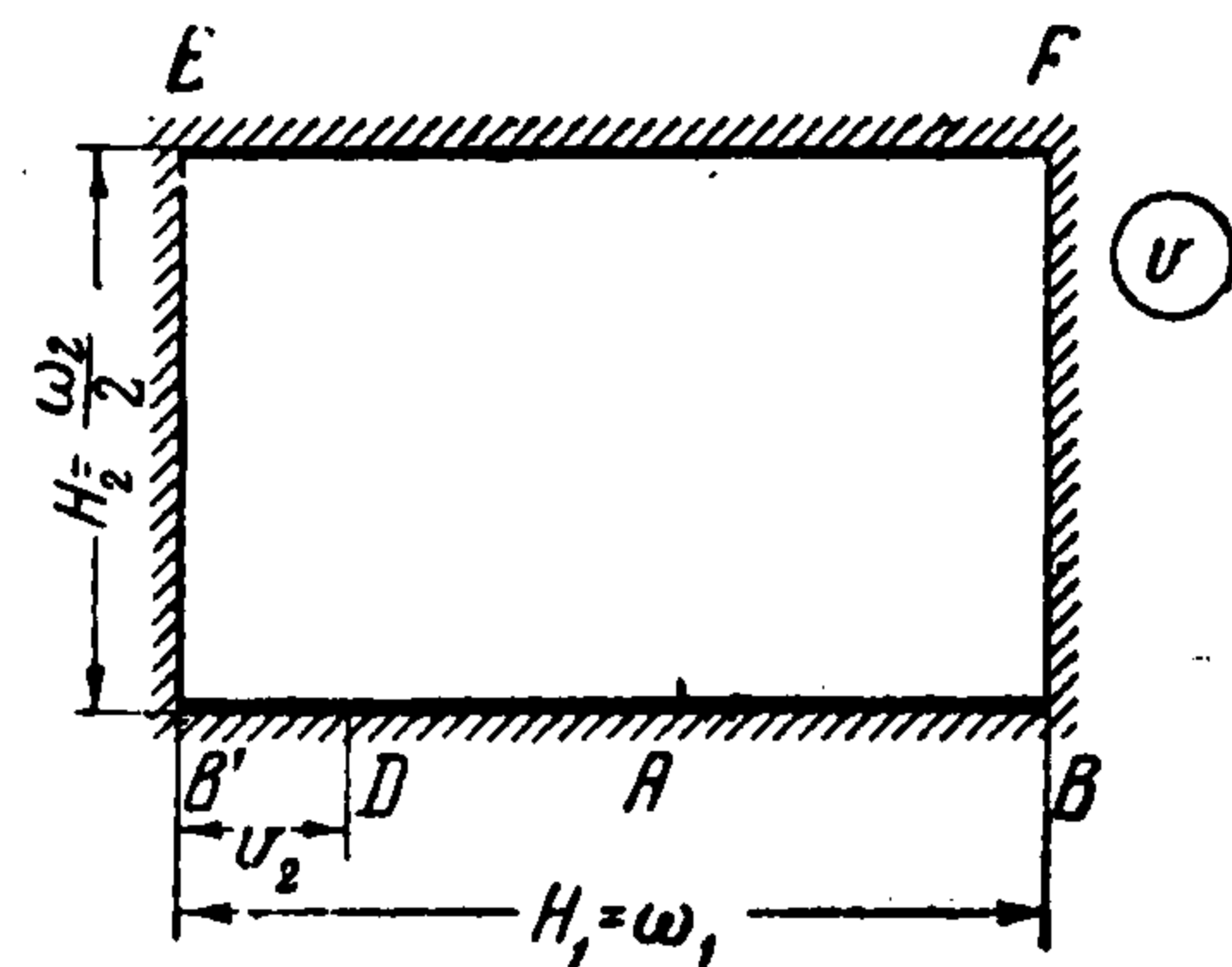
определяем  $s$  из условия  $e_1' + e_2' + e_3' = 0$ .

Тогда (2.3) можно представить в виде

$$v = 2A_1 \int_{\tau+s}^{\infty} \frac{dt_1}{\sqrt{4(t_1-e_1')(t_1-e_2')(t_1-e_3')}} + A_2$$

Обращая интеграл, находим

$$\tau + s = \wp_{\Omega} \left( \frac{v - A_2}{2A_1}, \Omega_1, \Omega_2 \right) \quad (2.5)$$



Фиг. 5

где  $\wp_{\Omega}$  — эллиптическая функция Вейрштасса для периодов  $\Omega_1, \Omega_2$ , которые выражаются через корни  $e_1', e_2'$  и  $e_3'$  по формулам

$$\Omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1' - e_3'}} = \frac{2K}{\sqrt{1 - s_3}}, \quad \Omega_2 = \frac{2K'i}{\sqrt{e_1' - e_3'}} = \frac{2K'i}{\sqrt{1 - s_3}} \quad (2.6)$$

Здесь  $K$  и  $K'$  — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей, соответственно

$$k = \left( \frac{e_2' - e_3'}{e_1' - e_3'} \right)^{1/2} = \left( \frac{s_2 - s_3}{1 - s_3} \right)^{1/2}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \left( \frac{1 - s_2}{1 - s_3} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

В свою очередь корни  $e_1', e_2', e_3'$  могут быть выражены через периоды  $\Omega_1, \Omega_2$  по формулам

$$e_1' = \wp_{\Omega} (1/2 \Omega_1), \quad e_2' = \wp_{\Omega} (1/2 (\Omega_1 + \Omega_2)), \quad e_3' = \wp_{\Omega} (1/2 \Omega_2) \quad (2.8)$$

Воспользовавшись (2.8) и удовлетворяя указанному выше соответствию точек, получаем после простых преобразований

$$\tau + s = \wp_{\Omega} (v + 1/2 \Omega_2) \quad (2.9)$$

Горизонтальная  $H_1$  и вертикальная  $H_2$  — стороны прямоугольника будут

$$H_1 = 1/2 \Omega_1, \quad H_2 = 1/2 \Omega_2 \quad (2.10)$$

Величина  $2A_1$  положена при этом равной единице, что эквивалентно выбору масштаба. С помощью известных из теории эллиптических функций [1] соотношений между  $\wp_{\Omega} (v + 1/2 \Omega_2)$  и  $\wp_{\Omega} (v)$ , а также между  $\wp_{\Omega}$  и функциями Якоби можно написать

$$\tau = s_2 sn^2 (v \sqrt{1 - s_3}) + s_3 cn^2 (v \sqrt{1 - s_3}) \quad (2.11)$$

где функции  $sn$  и  $cn$  берутся при модуле  $k$ , определенном (2.7).

3. Отобразим область течения на плоскости  $\vartheta$  на плоскость  $\vartheta_1$  так, чтобы контур «пластинка» плоскости  $\vartheta$  перешел в единичную окружность на  $\vartheta_1$  и чтобы при этом разрез, соответствующий свободной поверхности, совпал с действительной осью  $\vartheta_1$

Требуемое отображение (фиг. 6) реализуется дробнолинейной функцией

$$\vartheta_1 = -i \frac{\vartheta + i}{\vartheta - i} \quad (3.1)$$

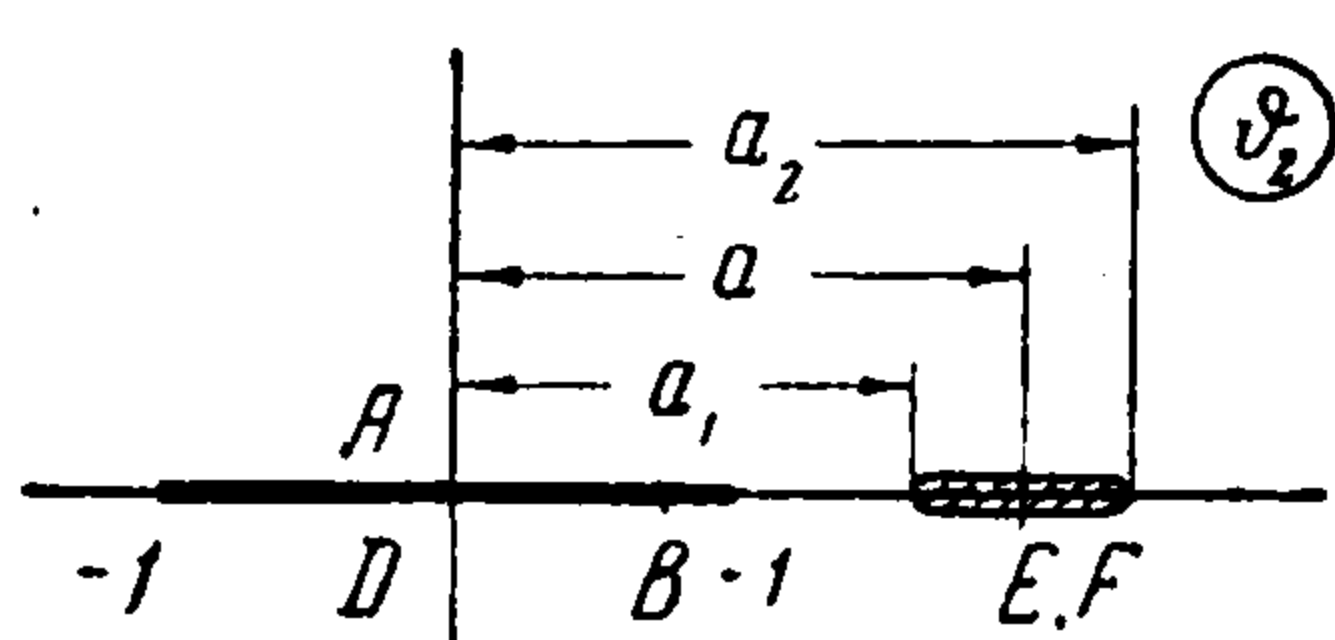
Применяя к  $\vartheta_1$  преобразование Жуковского

$$\vartheta_2 = 1/2 (\vartheta_1 + \vartheta_1^{-1}) \quad (3.2)$$

можно деформировать единичную окружность на  $\vartheta_1$  в разрез от  $-1$  до  $+1$  на действительной оси  $\vartheta_2$ . Разрез «свободная поверхность» также, очевидно, останется на действительной оси. Координаты  $a_1$  и  $a_2$  концов разреза (фиг. 7) связаны с экстремальными значениями склона свободной поверхности формулами

$$a_1 = \frac{1}{\cos \theta_1}, \quad a_2 = \frac{1}{\cos \theta_2} \quad (3.3)$$

Невозмущенной поверхности отвечает точка на нижней стороне разреза



Фиг. 7

$$a = \frac{1}{\cos \alpha_1} \quad (3.4)$$

Внешность двух отрезков с разрезами, уходящими в бесконечность (см. [2]), можно отобразить на прямоугольник плоскости  $u$  (фиг. 8) при помощи соотношения

$$\vartheta_2 = \text{im} [\zeta(u - \alpha) - \zeta(u + \alpha)] + C \quad (3.5)$$

где  $\zeta$  — функция Вейрштрасса. Отрезок «пластинка» переходит в нижнюю сторону прямоугольника, равную  $\omega_1$ , отрезок «свободная поверхность» — в его верхнюю сторону, разрезы — в вертикальные стороны, равные  $1/2 \omega_2$ . Чисто мнимая величина  $\alpha$  является отображением на  $u$  бесконечно удаленной точки плоскости  $\vartheta_2$ . Задняя кромка пластинки переходит в точку нижней стороны прямоугольника с неопределенной пока координатой  $\mu$ . Постоянные  $\alpha$ ,  $m$ ,  $C$  и отношение периодов  $\omega_2 / \omega_1$  определяются координатами концов разрезов на  $\vartheta_2$ .

Используя известные соотношения из теории эллиптических функций вместо (3.5), можно написать

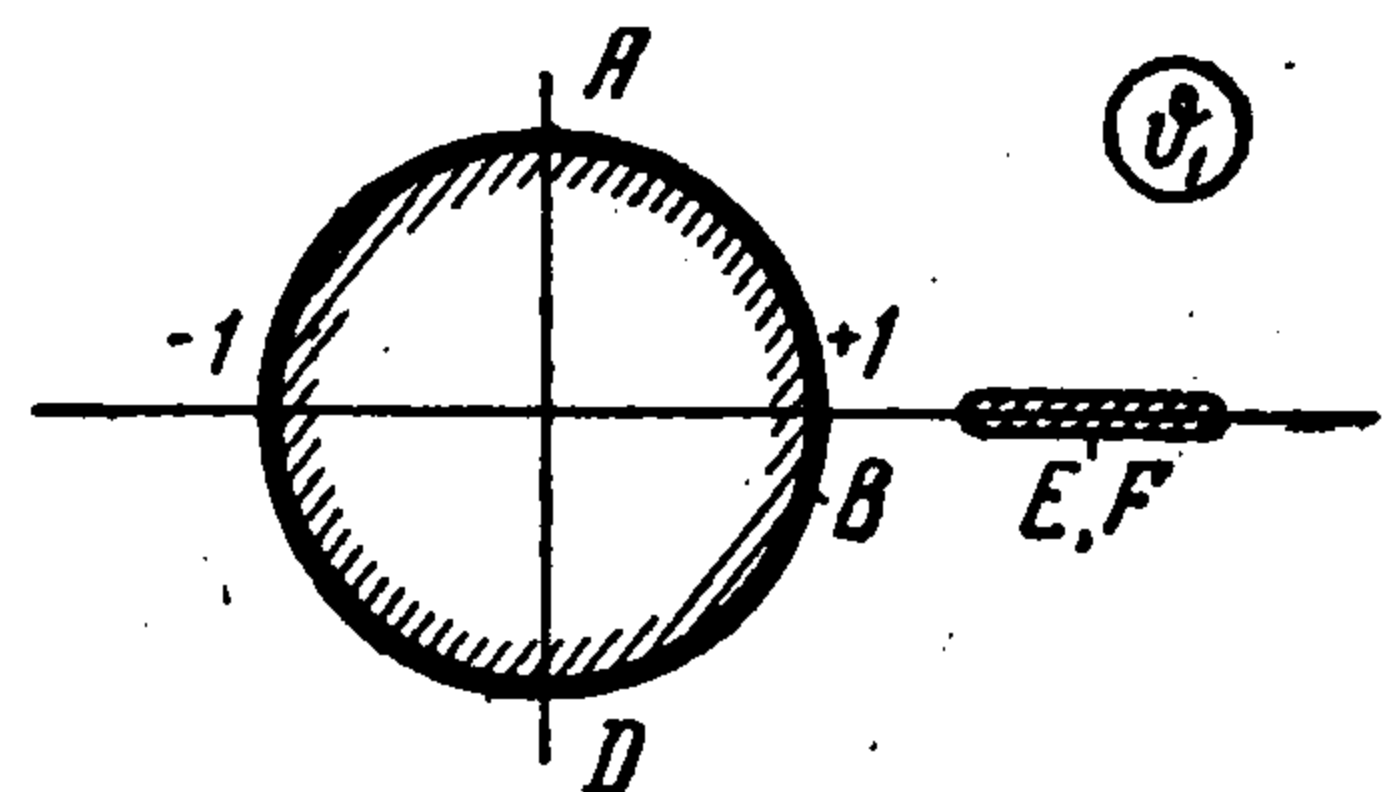
$$\vartheta_2 = \text{im} \left[ \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(\alpha)} - 2\zeta(u) \right] + C \quad (3.6)$$

где  $\wp(u)$  — эллиптическая функция Вейрштрасса для периодов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На мнимой оси  $\wp(u)$  действительна и отрицательна, а  $\wp'(u)$  — чисто мнимая величина с отрицательным коэффициентом при  $i$ . На действительной оси  $\wp(u)$  меняется от  $\infty$  до  $\wp(1/2\omega_1) = e_1$  и симметрична по отношению к  $u = 1/2\omega_1$ .

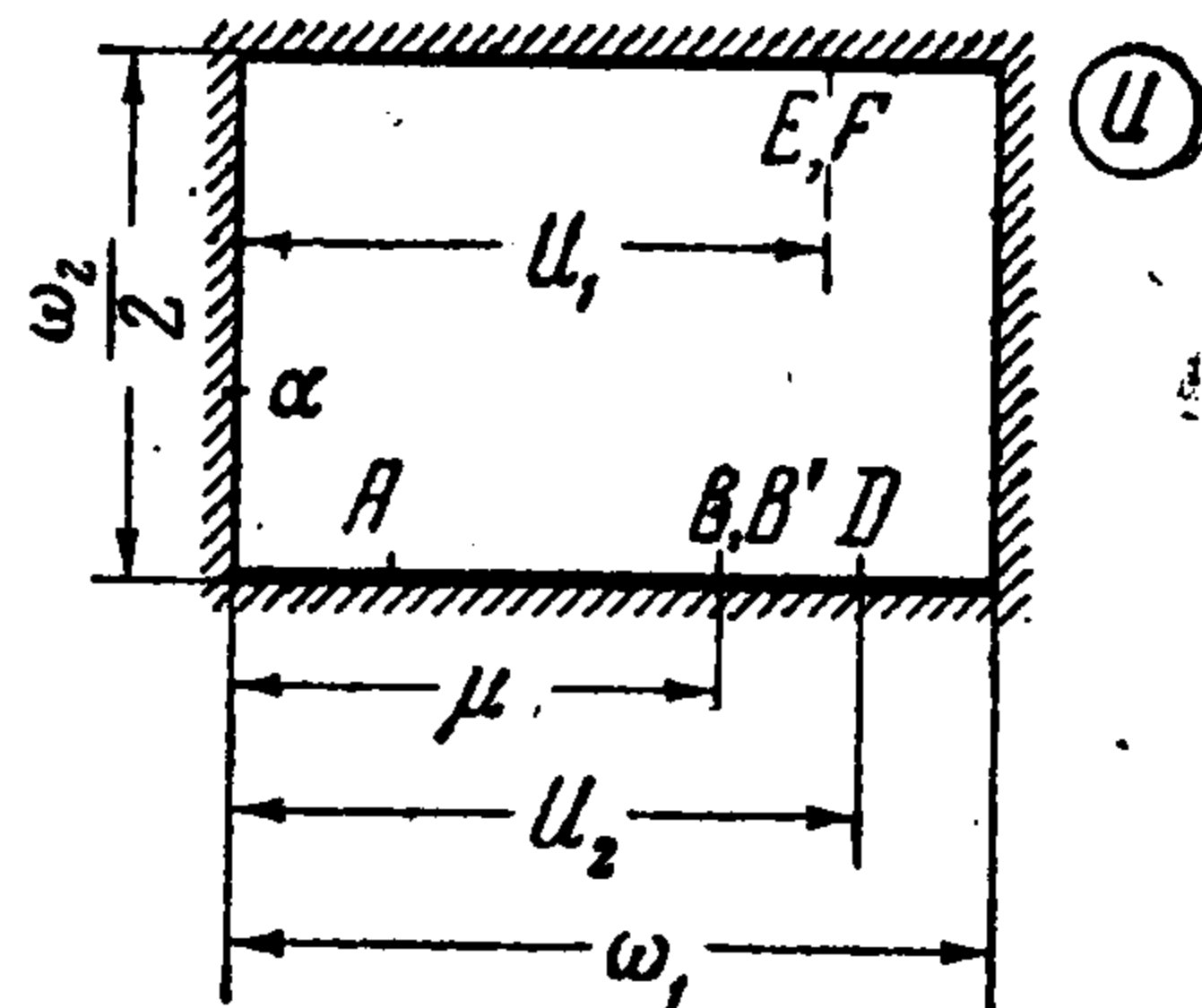
Можно показать, что при движении вдоль нижней стороны прямоугольника значению  $u = 0$  отвечает минимум  $\vartheta_2 = -1$ , а значению  $u = 1/2\omega_1$  — максимум  $\vartheta_2 = +1$ . Используя соответствие этих координат, определяем в выражении (3.6) две постоянные и после преобразований приведем (3.6) к виду

$$\vartheta_2 = \frac{\wp_1(\alpha) + \wp_1(u)}{\wp_1(\alpha) - \wp_1(u)}, \quad \wp_1(u) = \wp(u) - e_1 \quad (3.7)$$

Две константы  $\alpha$  и  $\omega_2 / \omega_1$  остались свободными, так как концы отрезка «свободная поверхность» на  $\vartheta_2$  не заданы.



Фиг. 6



Фиг. 8

Выберем стороны нашего прямоугольника на плоскости  $u$  равными сторонам прямоугольника на плоскости  $v$ , тогда на основании (2.10) получим

$$\omega_1 = 1/2 \Omega_1, \quad \omega_2 = \Omega_2 \quad (3.8)$$

Если бы абсцисса  $u_1$  точек  $E, F$  была равна абсциссе  $\mu$  точек  $B'B$ , то конформное отображение  $\vartheta_2$  на прямоугольник (фиг. 5) плоскости  $v$  можно было, учитывая периодичность  $\wp(u)$ , получить подстановкой в (3.7)  $u = v + \mu$ .

В самом деле при этом контуры прямоугольников совпадают, их нижние стороны соответствуют контуру «пластинка», а верхние — контуру «свободная поверхность». Положение точек  $B', B, E, F$  согласуется. Запишем условие, при котором  $u_1 = \mu$ . Величина  $u_1$  находится из (3.7) при  $\vartheta_2 = 1 / \cos \alpha_1$  согласно (3.4).

После соответствующих преобразований для  $u_1$  получим уравнение

$$\wp(u_1) = e_2 \left( \frac{e_3}{e_2} \cdot \frac{\wp_1(\alpha) \cos \alpha_1 - 1}{e_1 - e_3 \cos \alpha_1 + 1} - 1 \right) \left( \frac{\wp_1(\alpha) \cos \alpha_1 - 1}{e_1 - e_3 \cos \alpha_1 + 1} - 1 \right)^{-1} \quad (3.9)$$

Здесь  $e_1, e_2, e_3$  связаны с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  функции  $\wp(u)$  соотношениями, аналогичными (2.8).

Величина  $\mu$  может быть определена через координаты  $u_2$  и  $v_2$  критической точки  $D$ , которой соответствует  $\vartheta_2 = 0$  и  $\tau = 0$ . Из (3.7) и (2.11) получаем для определения  $u_2$  и  $v_2$  уравнения

$$\wp_1(u_2) = -\wp_1(\alpha), \quad \frac{\operatorname{sn}^2(v_2 \sqrt{1-s_3})}{\operatorname{cn}^2(v_2 \sqrt{1-s_3})} = -\frac{s_3}{s_2} \quad (3.10)$$

Из условия  $u = v + \mu$  (см. также фигуры 5,8) следует, что  $\mu = u_2 - v_2$ .

Из условия  $u_1 = \mu$  находим  $u_1 = u_2 - v_2$ .

Подставив этот результат в (3.9) и заменив  $\wp(\alpha)$  на основании (3.10), получим уравнение для  $u_2$

$$\wp(u_2 - v_2) = e_2 \left( \frac{e_3}{e_2} \frac{\wp_1(u_2) \cos \alpha_1 - 1}{e_1 - e_3 \cos \alpha_1 + 1} + 1 \right) \left( \frac{\wp_1(u_2) \cos \alpha_1 - 1}{e_1 - e_3 \cos \alpha_1 + 1} + 1 \right)^{-1} \quad (3.11)$$

Используя теорему сложения для  $\wp$  и связь между  $\wp'$  и  $\wp$ , получаем из (3.11) алгебраическое уравнение для  $\wp(u_2)$ , решив которое, находим  $u_2$ , а затем по первой формуле (3.10) определяем  $\alpha$ .

Для определения констант при фиксированном угле атаки  $\alpha_1$  целесообразно задаваться значениями  $s_2$  и  $s_3$ , после чего по (2.6), (2.7) находятся  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а по (3.10) —  $v_2$ , по (3.8) определяем  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Зная  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , по формулам, аналогичным (2.8), вычисляются  $e_1, e_2, e_3$  и решается (3.11). Далее по (3.10) находится  $\wp(\alpha)$ , а затем  $\mu$ .

Собирая формулы (3.1), (3.2), (3.7) и учитывая, что  $u = v + \mu$ , можем написать выражение

$$\frac{2\vartheta}{\vartheta^2 + 1} = \frac{\wp_1(\alpha) + \wp_1(v + \mu)}{\wp_1(\alpha) - \wp_1(v + \mu)} \quad (3.12)$$

реализирующее конформное отображение  $\vartheta$  на прямоугольник параметрической плоскости  $v$ . Конформное отображение  $w$  на  $v$  дается формулами (2.2) и (2.11).

Когда известны  $V_0 \partial z / \partial w = f_1(v)$  и  $w = f_2(v)$ , определение размеров пластинки, распределения давлений, действующих сил, линий тока и т. п. производится обычными методами [3].

Поступила 10 V 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г у р в и ц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Гостехиздат, 1933.
2. С е д о в Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, М — Л., 1950.
3. Г у р е в и ч М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.