

ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ДВУХСВЯЗНЫХ И ТРЕХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Г. П. Черепанов¹ (Москва)

Ниже рассматривается метод решения плоской задачи динамики идеальной несжимаемой невесомой жидкости об установившемся отрывном обтекании тел полигональной формы в том случае, когда область течения жидкости является двухсвязной или трехсвязной. Показано, что решение указанной задачи сводится к квадратурам. Решение аналогичной задачи для односвязной области может быть получено методом Н. Е. Жуковского [1-3], а для двухсвязной области — методом Л. И. Седова [2]. В качестве иллюстрации метода получено решение задачи о подводном крыле.

§ 1. Постановка задачи. Пусть установившийся плоский потенциальный поток идеальной несжимаемой невесомой жидкости занимает трехсвязную (или двухсвязную) область в физической плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Часть границы течения жидкости является заранее известной и состоящей из прямолинейных отрезков; обозначим ее через M . Остальная часть границы течения жидкости является свободной и неизвестной заранее; обозначим ее через L .

В плоской гидродинамике установившихся потенциальных течений несжимаемой идеальной жидкости имеют место основные соотношения [1-3]

$$v_x + iv_y = \overline{w'(z)}, \quad p = A - \frac{1}{2}\rho |w'(z)|^2 \quad (A = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2) \quad (1.1)$$

Здесь p — давление, v_x и v_y — компоненты скорости жидкости по осям координат, ρ — плотность, p_∞ и v_∞ — давление и скорость в бесконечно удаленной точке. Аналитическая функция $w'(z)$ может быть представлена в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(z - z_k) + w_0(z) \quad (1.2)$$

Здесь Γ_k — величина циркуляции вокруг граничного контура C_k , $k = 1, 2, 3$; z_k — точка внутри контура C_k ; функция $w_0(z)$ — однозначная аналитическая; величины Γ_k задаются или определяются из некоторых дополнительных условий.

При помощи основных формул (1.1) граничные условия задачи можно сформулировать следующим образом:

$$\operatorname{Im} w(z) = \psi_k \quad \text{на } C_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

$$\arg w'(z) = -\theta_j \quad \text{на } M, \quad |w'(z)|^2 = v_\infty^2 (1 + Q_i) \quad \text{на } L \quad (1.4)$$

Здесь θ_j — угол, образуемый j -ым прямолинейным отрезком границы M по направлению течения с осью x ; Q_i — числа кавитации на различных участках свободной границы. Одна из постоянных и неизвестных заранее величин ψ_k может быть положена равной нулю.

Подобные математические задачи возникают в теории кавитации и струй, в теории подводного крыла и т. д. [1-3]. В частности, когда участок L отсутствует, получаем задачу о потенциальном обтекании трех многоугольников; когда контур C_k является частью границы L , он может быть интерпретирован как полый вихрь и т. д.

§ 2. Решение краевых задач. 1°. Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$. Функция $z = \omega(\zeta)$ однолистно конформно отображает внешность трех (или двух) разрезов действительной оси плоскости ζ на трехсвязную (или соответственно двухсвязную) область течения плоскости z , причем бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует некоторая точка $\zeta = \zeta_0$ на плоскости ζ . Известно, что для произвольных двухсвязных и трехсвязных областей такое отображение всегда возможно [4, 5]. Отметим, что область порядка связности больше трех, вообще говоря, уже нельзя отобразить на внешность разрезов вдоль одной и той же прямой [4, 5]. Обозначим

$$w[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta), \quad \ln \frac{w'[\omega(\zeta)]}{v_\infty} = \Phi(\zeta) \quad (2.1)$$

Краевые задачи для определения аналитических функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ на основании формул (1.3) и (1.4) запишутся в виде

$$\operatorname{Im} \Psi(\zeta) = \psi_k \quad \text{при } \zeta \in (a_k, b_k) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Re} \Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \ln(1 + Q_i) \quad \text{при } \zeta \in L, \quad \operatorname{Im} \Phi(\zeta) = -\theta_j \quad \text{при } \zeta \in M \quad (2.3)$$

Здесь через L и M обозначены снова образы соответствующих участков границы плоскости z .

Функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ обладают следующими свойствами.

1. Если в бесконечно удаленной точке плоскости z , являющейся внутренней точкой, имеет место разложение

$$w(z) = v_\infty e^{-i\theta} z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + O(z^{-1})$$

то в соответствующей точке $\zeta = \zeta_0$ функция $\Psi(\zeta)$ будет иметь полюс и логарифмическую особенность, а функция $\Phi(\zeta)$ будет ограниченной. Если бесконечно удаленная точка плоскости z является граничной точкой, то в соответствующей точке плоскости ζ может быть логарифмическая особенность или полюс функции $\Psi(\zeta)$. Например, возвратной струйке в схеме Эфроса — Джилберга — Рокка соответствует логарифмическая особенность (с окрестностью) в плоскости ζ .

2. Вихрям и источникам плоскости z соответствуют в плоскости ζ логарифмические особенности у функции $\Psi(\zeta)$ и полюсы у функции $\Phi(\zeta)$.

3. При обходе отрезка (a_k, b_k) , соответствующего контуру C_k , действительная часть функции $\Psi(\zeta)$ получает приращение Γ_k . В точках плоскости ζ , соответствующих критическим точкам течения, функция $\Phi(\zeta)$ имеет логарифмические особенности.

4. В концах отрезков (a_k, b_k) функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, вообще говоря, ограничены.

Более подробное рассмотрение встречающихся типов особых точек аналитических функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ содержится в монографии М. И. Гуревича [3].

Условие (2.2) удобно продифференцировать по ζ и искать решение полученной задачи Дирихле уже в классе неограниченных в концах a_k, b_k и однозначных функций. Решение этой задачи имеется в книгах [2, 6, 7].

Смешанная краевая задача (2.3) является частным случаем краевой задачи Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами для внешности разрезов вдоль прямой, замкнутое решение которой получено в работе автора [8]. Заметим, что в случае двухсвязной области исходная гидродинамическая задача может быть сведена к задаче Дирихле и смешанной краевой задаче для кольца, решение которой в замкнутом виде получено Л. И. Седовым [2].

2°. Смешанная краевая задача (2.3) может быть сведена [8] к краевой задаче Римана для двух функций с матричным коэффициентом $G(t)$

$$G(t) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha(t) \\ \beta(t) & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha(t) = \begin{cases} -1 & (t \in L^+) \\ +1 & (t \in M^+) \end{cases}, \quad \beta(t) = \begin{cases} -1 & (t \in L^-) \\ +1 & (t \in M^-) \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь L^\pm, M^\pm обозначают соответствующие участки разрезов, расположенные на верхнем или нижнем берегу. Правая часть краевой задачи Римана может быть записана в форме

$$f = \begin{vmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{vmatrix}, \quad f_1(t) = \begin{cases} 2 \ln(1 + Q_i) & (t \in L^+) \\ -2i\theta_j & (t \in M^+) \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} 2 \ln(1 + Q_i) & (t \in L^-) \\ 2i\theta_j & (t \in M^-) \end{cases} \quad (2.5)$$

Решение краевой задачи Римана (2.4), (2.5) ищется в классе функций, ограниченных в концах отрезков (a_k, b_k) и имеющих заданные особенности (полюсы или логарифмические точки). Как обычно, введением некоторых новых функций, полученных устранением всех особенностей внутри области, задача сводится к краевой задаче Римана (с другими коэффициентами) для функций, не имеющих особенностей внутри области. Общее решение такой задачи выписано в работе [8]. Здесь его приводить не будем. Заметим лишь, что в формуле (1.11) работы [8] может оказаться, что произ-

ведение $[B_n(z) X_{1,2}(z)]^{-1}$ в некоторых концах $z = g_i$ отрезков (a_k, b_k) имеет неинтегрируемую особенность, так что формула (1.11) теряет смысл. В этом случае вместо $B_n(z)$ в формуле (1.11), как легко заметить, следует взять функцию

$$B_n(z) \prod_i (z - g_i)^{-1}$$

Полученное решение будет удовлетворять всем условиям задачи и интегралы будут сходящимися. Соответственно условия разрешимости неоднородной задачи запишутся несколько иначе. Аналогичное замечание справедливо также в отношении формул (1.9) и (1.10) работы [9].

При решении конкретных задач удобнее непосредственно применять процедуру решения, указанную в работах [8,9], чем пользоваться сразу общими формулами.

§ 3. Задача о подводном крыле. Пусть бесконечно-тонкая пластинка шириной $2l$ движется под свободной поверхностью жидкости со скоростью v_∞ (фиг. 1). Жидкость считается идеальной, несжимаемой, невесомой. Начало декартовых координат x, y выберем в центре пластинки, а ось x направим параллельно направлению движения пластинки. Угол наклона пластинки к оси x равен α . Движение обратим и считаем, что поток набегаёт со скоростью v_∞ на неподвижную пластинку. Примем схему обтекания Жуковского — Чаплыгина с конечностью скорости на задней кромке пластинки (фиг. 1). Задача о подводном крыле с учетом весомости жидкости в линейной постановке решена М. А. Лаврентьевым и М. В. Келдышем [10]. Е. А. Федоров [3] решил задачу о подводном крыле для невесомой жидкости, причем в качестве схемы обтекания была взята схема С. А. Чаплыгина и А. Л. Лаврентьева.

Область течения плоскости z отобразим конформно на внешность двух разрезов действительной оси плоскости ζ (фиг. 2). В качестве таких разрезов можно выбрать отрезки $(0,1)$ и (a_2, ∞) , так чтобы бесконечно удаленной точке плоскости z соответствовала бесконечно удаленная точка плоскости ζ [10]. Точкам A и B (фиг. 1) при этом соответствуют точки с абсциссами a и b на верхнем берегу разреза $(0,1)$.

Краевую задачу (2.2) для определения функции $\Psi(\zeta)$ запишем в виде

$$\text{Im} \frac{d\Psi}{d\zeta} = 0 \quad (0, 1) \quad (a_2, \infty), \quad \Psi(\zeta) = O(\zeta^{1/2}) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

Решение задачи Дирихле (3.1) имеет следующий вид [2, 6, 7]

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = \frac{c_0(\zeta - a)}{\sqrt{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - a_2)}} \quad (3.2)$$

Здесь c_0 — действительная постоянная; корень принимает положительные значения на верхнем берегу разреза $(0, 1)$.

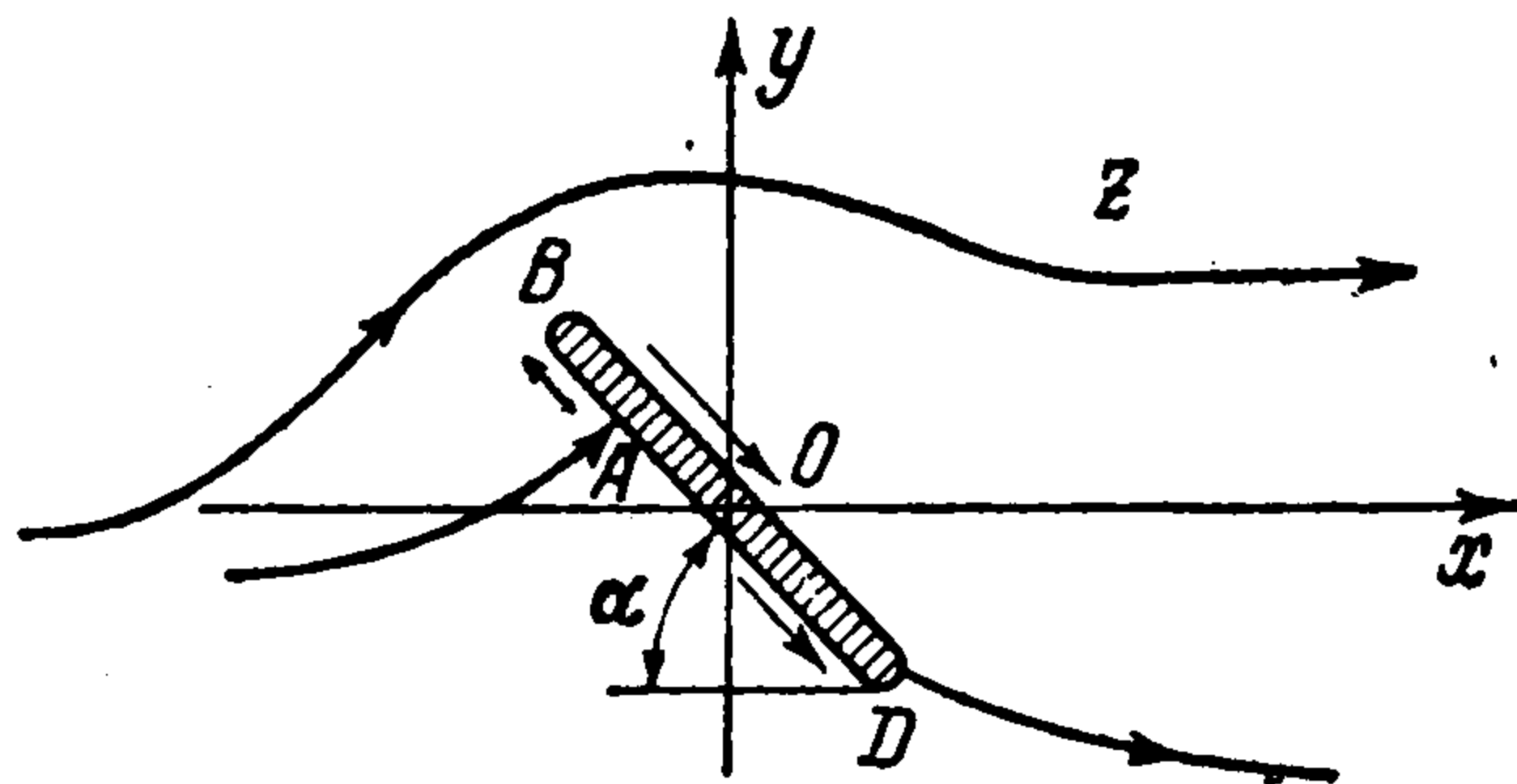
Краевая задача (2.3) для определения функции $\Phi(\zeta)$ в рассматриваемом случае примет, очевидно, вид

$$\begin{aligned} \text{Re} \Phi(\zeta) &= 0 & (a_2, \infty) \\ \text{Im} \Phi(\zeta) &= -\pi + \alpha & \text{на верхнем берегу разреза } (0,1) \text{ между точками } a \text{ и } b \\ \text{Im} \Phi(\zeta) &= \alpha & \text{на остальной части разреза } (0,1) \\ \Phi(\zeta) &= o(1) & \text{при } \zeta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

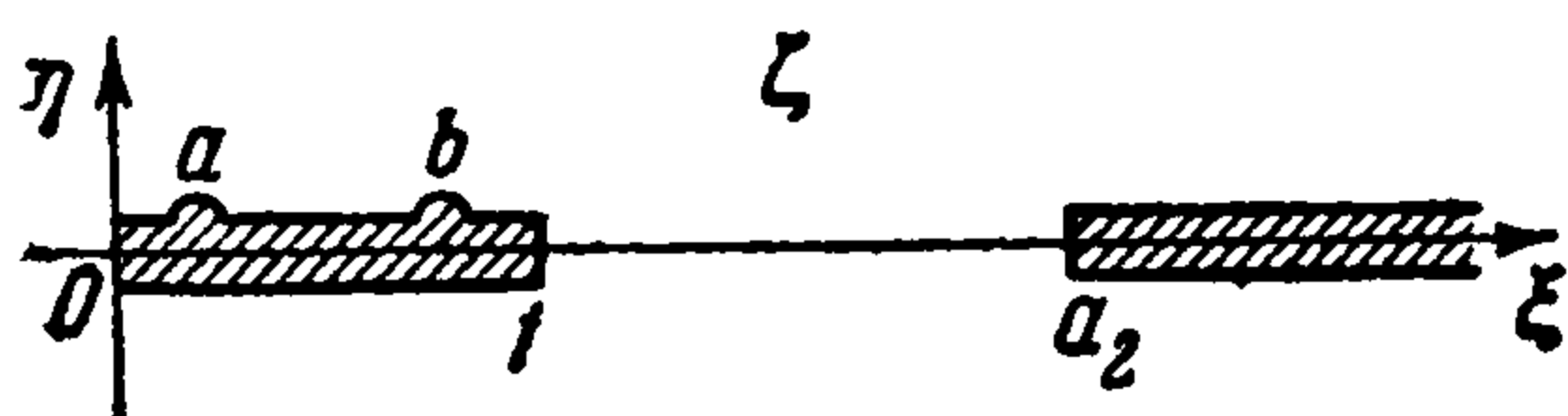
Каноническое решение соответствующей задачи Римана находим по формуле (1.10) работы [8]

$$X_1(\zeta) = X_2(\zeta) = \sqrt{\zeta - a_2} \quad (3.4)$$

Корень считаем положительным на верхнем берегу разреза (a_2, ∞) . В рассматриваемом случае каноническое решение нетрудно угадать. Заметим, что при этом система уравнений (1.6) работы [8] удовлетворяется, так как $\alpha/\beta = 1$ (см. также [9]).



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение краевой задачи (3.3) найдется по формуле (1.11) работы [8], причем нужно учесть замечание в конце предыдущего параграфа. Опуская довольно громоздкие выкладки, связанные с вычислением интегралов, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} = v_{\infty} e^{\alpha i} & \left(\frac{\sqrt{b-a_2} + \sqrt{\zeta-a_2}}{\sqrt{b-a_2} - \sqrt{\zeta-a_2}} \frac{\sqrt{a-a_2} - \sqrt{\zeta-a_2}}{\sqrt{a-a_2} + \sqrt{\zeta-a_2}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\frac{2\sqrt{\zeta(\zeta-1)}\sqrt{b(b-1)}}{b-\zeta} + \frac{2\zeta(\zeta-1)}{b-\zeta} + 2\zeta - 1 \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\frac{2\sqrt{\zeta(\zeta-1)}\sqrt{a(a-1)}}{a-\zeta} + \frac{2\zeta(\zeta-1)}{a-\zeta} + 2\zeta - 1 \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь функция $\sqrt{\zeta(\zeta-1)}$ ведет себя как $O(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$; аргумент корня изменяется на πi при обходе точек a и b на верхнем берегу разреза (и равен $-\pi i$ на верхнем берегу разреза $(0,1)$ между точками a и b).

Преобразующая функция $z = \omega(\zeta)$ определяется из уравнения

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{d\Psi}{d\zeta} \cdot \frac{dw}{dz} \quad (3.6)$$

Правая часть уравнения (3.6) определяется формулами (3.5), (3.2) и является известной функцией ζ .

Для определения неизвестных параметров c_0 , a_2 , a и b имеем следующие условия:

- 1) $\arg \left(\frac{1}{v_{\infty}} \frac{dw}{dz} \right) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$
- 2) $\oint_{C_1} \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right| d\zeta = 4l$ (C_1 — отрезок $(0,1)$)
- 3) $\text{Im} \int_1^{a_2} \frac{d\Psi}{d\zeta} d\zeta = q + v_{\infty} (q - \text{параметр, определяющий глубину погружения})$
- 4) $\oint_{C_1} \frac{d\omega}{d\zeta} d\zeta = 0$ (условие однозначности)

Решение полученной системы конечных уравнений (3.7) для определения параметров c_0 , a_2 , a и b в связи с наличием очень сложных нетабулированных интегралов представляет самостоятельную задачу.

Поступила 4 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехтеоретиздат, т. 1, 1948.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., 1950.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
4. Чаплыгин С. А. К теории триплана. Избр. тр. по механике и математике. М., 1954.
5. Седов Л. И. Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики. УМН, 1939, вып. VI.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1962.
8. Черепанов Г. П. Задача Римана-Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой или вдоль окружности. ДАН СССР, 1963.
9. Черепанов Г. П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5.
10. Лаврентьев М., А., Келдыш М. В. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Тр. Конференции по теории волнового сопротивления. М., ЦАГИ, 1937.
11. Келдыш М. В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области. УМН, 1939, вып. VI.