О ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

А. Ф. Сидоров

(Челябинск)

Течения типа двойных волн для плоских и пространственных движений политропного газа изучались в работах [1–6]. В этих работах, в основном с использованием свойства потенциальности течений, выведены уравнения, описывающие движения типа двойных волн и рассмотрен ряд приложений теории этих течений к решению конкретных газодинамических задач.

Рассмотренные в [1] течения могут быть использованы при решении задач об установившемся обтекании невозмущенным сверхзвуковым потоком некоторых специальных поверхностей. В [5] и [6] теория плоских двойных волн применялась для построения течений за несимметричными ударными и детонационными волнами постоянной интенсивности.

Ниже рассматривается новое приложение теории плоских двойных волн также в предположении потенциальности течения. Оказывается, что в классе двойных волн возможно примыкание через неподвижную характеристику установившихся плоских течений изотермического и политропного газов к нестационарным плоским течениям типа двойных волн. Это обстоятельство позволяет в предположении гиперболичности изучаемых систем уравнений (рассматриваются сверхзвуковые потоки) поставить ряд граничных задач в плоскости годографа для скорости звука $C(u_1, u_2)$ (u_1, u_2 — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$) и потенциала $\Phi^\circ(u_1, u_2)$.

Поставленные задачи в некотором смысле аналогичны основным краевым задачам для плоских установившихся потенциальных течений в криволинейных каналах ([9]). Если для установившегося течения скорость звука можно найти из уравнения Бернулли, то в данном случае вместо уравнения Бернулли приходится рассматривать нелинейное уравнение второго порядка для скорости звука $C(u_1, u_2)$ в плоскости годографа, известное из теории двойных волн (см. [3,4]), и для этого уравнения необходимо решать граничные задачи типа задачи Гурса или смешанной задачи.

При этом в основном рассматривается случай, когда распределение скоростей вдоль линии подвижной стенки и вдоль линии, разделяющей области стационарного и нестационарного течений, изображается в плоскости годографа неподвижной во времени кривой $K(u_1, u_2) = 0$.

Поставленные граничные задачи позволяют в принципе получать решения, описывающие движения газа в криволинейных каналах, стенки которых до некоторого места неподвижны, а затем двигаются по определенному закону, так что течение в части физической плоскости, ограниченной неподвижными характеристиками, проходящими через последние неподвижные точки стенок канала, стационарно, а в области за характеристиками нестационарно.

В качестве иллюстрации для изотермического газа методом Массо решена задача о примыкании через неподвижную характеристику к стационарной простой волне нестационарной двойной волны.

1. Система уравнений, описывающих двойные волны, в предположении прямолинейности образующих (см. [4]), имеет вид

$$\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\theta\,[(1-\theta_1^2)\theta_{22}+2\theta_1\theta_2\theta_{12}+(1-\theta_2^2)\theta_{11}]+\tfrac{1}{2}(\gamma-3)(\theta_1^2+\theta_2^2)+2=0 \qquad (1.1)$$

$$(1-\theta_1^2)\Phi_{22}^\circ+2\theta_1\theta_2\Phi_{12}^\circ+(1-\theta_2^2)\Phi_{11}^\circ=0 \qquad (1.2)$$

$$x_i=[u_i+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\theta\theta_i]\,t+\Phi_i^\circ \qquad (i=1,2) \qquad (1.3)$$

Здесь

$$\theta_i=\frac{\partial\theta}{\partial u_i},\quad \Phi_i^\circ=\frac{\partial\Phi^\circ}{\partial u_i},\quad \theta_{ik}=\frac{\partial^2\theta}{\partial u_i\,\partial u_k},\quad \Phi_{ik}^\circ=\frac{\partial^2\Phi^\circ}{\partial u_i\,\partial u_k} \qquad (i,\ k=1,2)$$

Течение считается изэнтропичным; уравнение состояния берется в виде

$$p = a^2(S)\rho^\gamma \qquad \left(\theta = \frac{2}{\gamma - 1}C\right)$$

Здесь p — давление, S — энтропия, γ — показатель адиабаты, ρ — плотность. Предполагается прямолинейность образующих; это означает, что вектор скорости $\mathbf{u}$ сохраняется вдоль прямых линий в пространстве x_1, x_2, t, определяемых соотношениями (1.3). После решения системы уравнений (1.1), (1.2) для функций θ и Φ°, определенной в плоскости годографа, течение в физической плоскости находится из соотношений (1.3). Заметим, что типы уравнений (1.1) для θ и (1.2) для Φ° совпадают и определяются знаком выражения

$$K = \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $K > 0$, т. е. что тип уравнений (1.1) и (1.2) гиперболический и имеются вещественные характеристики, одни и те же для обоих уравнений. Рассмотрим следующую задачу [1].

Может ли к установившемуся плоскому потенциальному потоку примыкать неустановившееся течение типа двойной волны? В плоском установившемся потенциальном течении имеет место интеграл Бернулли. Запишем его в виде

$$\tfrac{1}{4}(\gamma - 1)\theta^2 + \tfrac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) = A^2 = \text{const} \tag{1.5}$$

Допустим, что неустановившаяся двойная волна граничит с двумерным установившимся течением вдоль некоторой линии $\varphi(u_1, u_2) = 0$ в плоскости годографа. Тогда вдоль этой линии функция θ, определяемая уравнением (1.1), должна удовлетворять следующим, вытекающим из (1.5) и (1.3), соотношениям

$$\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\theta\theta_i + u_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.6}$$

(производные θ_i непрерывны при переходе через рассматриваемую линию).

Из (1.3) и (1.6) следует, что границей между рассматриваемыми течениями может служить лишь неподвижная линия, определяемая условиями

$$x_i = \Phi_i^\circ \quad (i = 1, 2), \qquad \varphi(u_1, u_2) = 0 \tag{1.7}$$

Если кривая $\varphi(u_1, u_2) = 0$ вырождается в точку $u_1 = c_1 = \text{const}$, $u_2 = c_2 = \text{const}$ и $c_1^2 + c_2^2 > 0$, то общей линии в физической плоскости между течениями нет. Особняком стоит случай $c_1 = c_2 = 0$, для которого в [6] показано, что к области покоя может через подвижный слабый разрыв примыкать неустановившаяся двойная волна. Этот случай в данной статье не рассматривается.

Соотношения (1.6) можно трактовать как начальные данные задачи Коши для уравнения (1.1) вдоль линии $\varphi(u_1, u_2) = 0$. Поскольку уравнению (1.1) удовлетворяет функция θ, определенная из интеграла Бернулли (1.5), то, чтобы получить нестационарное движение, необходимо линию $\varphi(u_1, u_2) = 0$ считать характеристикой уравнений (1.1) и (1.2). Запишем уравнения характеристических полосок (см. [8], гл. III) для (1.1) и (1.2) в виде

$$(1 - \theta_2^2)\,du_2^2 - 2\theta_1\theta_2\,du_2du_1 + (1 - \theta_1^2)\,du_1^2 = 0 \tag{1.8}$$

$$\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\theta\,(1 - \theta_2^2)\,d\theta_1du_2 + [\tfrac{1}{2}(\gamma - 3)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2]\,du_1du_2 + {}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\theta\,(1 - \theta_1^2)\,du_1d\theta_2 = 0$$

$$(1 - \theta_2^2)\,du_2d\Phi_1^\circ + (1 - \theta_1^2)\,du_1d\Phi_2^\circ = 0$$

$$d\theta = \theta_1du_1 + \theta_2du_2, \qquad d\Phi^\circ = \Phi_1^\circ du_1 + \Phi_2^\circ du_2$$

---

[1] Отметим попутно, что М. Бурнат в работе [7] построил пример примыкания к области постоянного плоского движения нестационарного потока, но в классе простых волн. В данном рассмотрении возможности конструирования нестационарных течений, как мы увидим ниже, значительно шире.

Характеристика в плоскости годографа, определяемая первым уравнением (1.8), где θ подставляется из интеграла Бернулли (1.5), совпадает с соответствующей характеристикой стационарного движения и, следовательно (см. [9]), будет эпициклоидой.

Вследствие того что коэффициенты при старших производных в уравнениях для Φ° и θ вдоль рассматриваемой характеристики совпадают с соответствующими коэффициентами уравнения для потенциала установившегося течения и интеграл Бернулли (1.5) удовлетворяет уравнению (1.1), условия характеристических полосок (1.8) выполняются вдоль взятой стационарной характеристики тождественно. Таким образом, высказанное утверждение о возможности примыкания к двумерному установившемуся потенциальному течению нестационарной двойной волны доказано.

Совершенно аналогично дело обстоит в случае изотермического газа, для которого вместо уравнений (1.1) — (1.3) имеют место уравнения

$$(1 - q_1^2)(q_{22} + 1) + 2q_1q_2q_{12} + (1 - q_2^2)(q_{11} + 1) = 0 \tag{1.9}$$

$$(1 - q_1^2)\Phi_{22}^\circ + 2q_1q_2\Phi_{12}^\circ + (1 - q_2^2)\Phi_{11}^\circ = 0 \tag{1.10}$$

$$x_i = (u_i + q_i)t + \Phi_i^\circ \qquad (i = 1, 2) \tag{1.11}$$

где

$$q = \ln \rho, \qquad q_i = \frac{\partial q}{\partial u_i}, \qquad q_{ik} = \frac{\partial^2 q}{\partial u_i \partial u_k}$$

Характеристиками для стационарного движения в плоскости годографа будут эвольвенты окружности, поэтому в данном случае характеристическую полоску для уравнения (1.10) можно записать в параметрическом виде так:

$$u_1 = \cos p + (p - p_0)\sin p, \qquad q_1 = -\cos p - (p - p_0)\sin p$$

$$u_2 = \sin p - (p - p_0)\cos p, \qquad q_2 = -\sin p + (p - p_0)\cos p$$

$$q = c - {}^1/_2 (p - p_0)^2 \qquad (c = \text{const}, \ p \text{ — параметр})$$

2. Рассмотрим некоторые свойства подвижных стенок, которые допускает изучаемый класс течений. Под подвижной стенкой при этом понимается некоторая движущаяся с течением времени t кривая в плоскости x_1, x_2, задаваемая уравнением $\psi(x_1, x_2, t) = 0$, через которую нет потока газа. Вдоль линии стенки должно выполняться следующее кинематическое условие движения: проекция вектора скорости газа на нормаль к стенке должна равняться нормальной скорости движения стенки.

Пусть $\mathbf{n}$ — нормаль к линии стенки в точке x_1, x_2 в момент времени t, а D нормальная скорость движения стенки в этой точке. Тогда кинематическое условие движения можно записать в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = D \tag{2.1}$$

Из условия (2.1) для функции ψ получим уравнение

$$\partial\psi / \partial x_1 u_1 + \partial\psi / \partial x_2 u_2 + \partial\psi / \partial t = 0 \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.2) функции u_i, найденные из соотношений (1.3) (после решения уравнений (1.1) и (1.2)), и решая для (2.2) задачу Коши $\psi = \psi(x_1, x_2)$ при $t = t_0$, можно находить для заданного течения движение различных подвижных стенок, форма которых известна в момент $t = t_0$.

Отметим еще одно свойство. Будем рассматривать случай, когда движению подвижной стенки соответствует фиксированная кривая в плоскости годографа.

Теорема. В классе нестационарных плоских течений типа двойных волн не существует неподвижных криволинейных стенок с постоянным во времени распределением скоростей $K(u_1, u_2) = 0$.

Действительно, пусть такая стенка нашлась и кривой $K(u_1, u_2) = 0$ соответствует некоторая цилиндрическая поверхность в пространстве x_1, x_2, t. Тогда из наличия прямолинейных образующих, принадлежащих этой поверхности, вдоль которых постоянны u_1 и u_2, следовало бы, что нормали к линии стенки постоянны, а, следовательно, форма стенки прямолинейна.

Найдем выражения для D и $\mathbf{n}$, если движение кривой в плоскости x_1x_2 определяется уравнениями (1.3) и образ этой кривой в плоскости годографа известен и задается уравнением

$$u_2 = f(u_1) \tag{2.3}$$

Полагая

$$\Delta_i = u_i + {}^1/_2(\gamma - 1)\theta\theta_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.4}$$

из (1.3) будем иметь

$$dx_i = \Delta_i' t du_1 + \Delta_i dt + \Phi_i^{\circ\prime} du_2 \qquad (i = 1, 2) \tag{2.5}$$

где штрих означает дифференцирование вдоль кривой (2.3). Для вектора, нормального к рассматриваемой кривой в момент времени t в точке u_1, u_2 получим

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime}}{\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime}} \tag{2.6}$$

Решая систему уравнений (2.5), (2.6), найдем

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{(\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime})\,[\Delta_1(\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime}) - \Delta_2(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime})]}{(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime})^2 + (\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime})^2} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{-(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime})\,[\Delta_1(\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime}) - \Delta_2(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime})]}{(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime})^2 + (\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime})^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Принимая во внимание, что

$$D = \left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

условие (2.1) можно представить в виде

$$\Delta_1(\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime}) - \Delta_2(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime}) = u_1(\Delta_2' t + \Phi_2^{\circ\prime}) - u_2(\Delta_1' t + \Phi_1^{\circ\prime}) \tag{2.9}$$

и, следовательно, так как t произвольно, вдоль линии подвижной стенки должны выполняться соотношения

$$\theta_1\Delta_2' - \theta_2\Delta_1' = 0, \qquad \theta_1\Phi_2^{\circ\prime} - \theta_2\Phi_1^{\circ\prime} = 0 \tag{2.10}$$

Первое условие (2.10) определяет некоторую зависимость $F(u_1, u_2, \theta_1, \theta_2, \theta) = c = \mathrm{const}$ вдоль линии (2.3) для уравнения (1.1), причем константа c должна быть найдена из условий сопряжения в точке, где неподвижная стенка канала переходит в подвижную. Точно также, после нахождения функции θ (u_1, u_2), условие (2.10) определяет вдоль линии (2.3) некоторую зависимость $\Psi(u_1, u_2, \Phi_1^\circ, \Phi_2^\circ) = \mathrm{const}$ для уравнения (1.2). Заметим, что в случае установившегося течения первое уравнение (2.10) выполняется автоматически (так как $\Delta_i = 0$), а второе уравнение (2.10) выражает тот факт, что вдоль неподвижной стенки нормальная составляющая вектора скорости равна нулю.

В рассмотренной постановке задачи вдоль линии подвижной стенки задается распределение скоростей, а движение и форма стенки определяются затем из уравнений (1.3). В принципе возможен и другой подход к задаче, когда в некоторый момент времени t задается форма подвижной стенки. Это приводит к условиям типа (2.10) в физической плоскости, но при этом кривая в плоскости годографа, соответствующая линии подвижной стенки (точно так же, как и в случае стационарного движения), неизвестна и это усложняет решение задачи, так как уравнение (1.1) для функции θ справедливо в плоскости годографа.

Решение для стационарного движения тождественно удовлетворяет первому условию (2.10), следовательно, непосредственно смыкаться через неподвижную характеристику стационарное течение и неустановившееся течение с подвижной стенкой рассматриваемого типа не могут, так как в противном случае из решения смешанной задачи для уравнений (1.1) и (1.2) с начальными данными на характеристике и на нехарактеристической линии (2.3) было бы получено лишь стационарное течение.

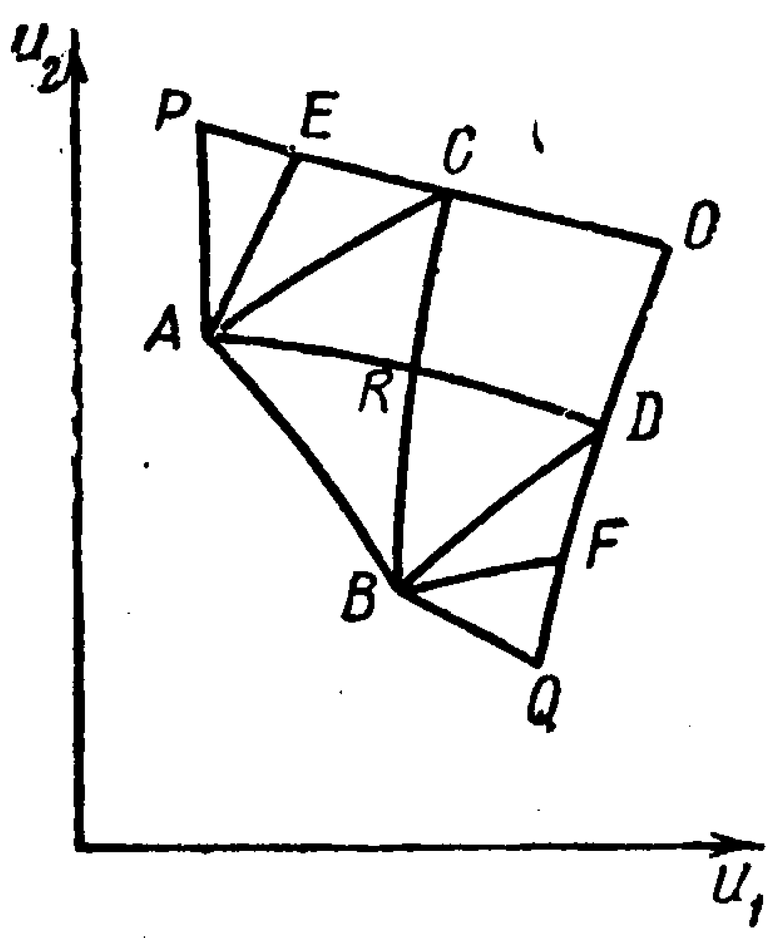
Таким образом, общую картину движения в плоскости годографа можно представить в таком виде (фиг. 1).

Линии AR и BR соответствуют неподвижным стационарным характеристикам и ограничивают область ARB, в которой движение стационарно. Области $AECR$ и $BRDF$ соответствуют неустановившемуся течению, но подвижные стенки рассматриваемого типа в них отсутствуют. Течение в этих областях можно получить, задавая, например, вдоль некоторых нехарактеристических линий AC и BD какое-либо условие на функции θ_1, θ_2 и $\Phi_1°$, $\Phi_2°$.

После решения смешанных задач в областях ACR и BRD находится решение задачи Коши в областях AEC и BDF, ограниченных характеристиками AE, EC и BF, FD с начальными данными на линиях AC и BD. В области $RCOD$ решается задача с начальными данными на двух характеристиках RC и RD.

Наконец, в областях APE и BQF (линии AP и BQ соответствуют подвижным стенкам) решаются смешанные задачи с начальными данными на характеристиках AE и BF и условиями (2.10) вдоль линий стенок AP и BQ.

Все описанные задачи для уравнений (1.1) и (1.2) могут быть решены численно в характеристиках методом Массо, при этом в условиях (2.10) производные заменяются конечными разностями и задача легко решается обычным способом.



Фиг. 1

Рассмотренный подход к задаче о примыкании установившегося течения в канале к нестационарному течению в канале с подвижными стенками, разумеется, не будет единственным. В данном подходе имеются следующие возможности: можно произвольно задавать форму линий AC и BD в физической плоскости и в плоскости годографа и комбинацию функций θ, θ_1 и θ_2 вдоль нее, а также распределение скоростей вдоль подвижных стенок канала. Этот произвол позволяет, в частности, рассмотреть вопрос о получении неустановившегося течения с заданными свойствами (например, можно максимально ускорить стационарный вначале поток в областях ACR, BRD и затем определить соответствующий закон движения подвижных стенок канала). В принципе можно было бы задавать какие-либо дополнительные условия на линиях подвижных стенок канала AP и BQ, решать задачу Коши в областях APE и BFQ и, найдя характеристики AE и BF, решать задачу с начальными данными на двух характеристиках в областях $AECR$ и $BRDF$.

3. В качестве иллюстрации к изложенному приведем расчет для изотермического газа, но при этом, для простоты, рассмотрим случай примыкания нестационарной двойной волны не к течению общего типа, а к установившейся простой волне таким образом, что границей между течениями служит характеристика лишь одного семейства. Пусть установившийся однородный сверхзвуковой поток вначале распространяется в канале с прямолинейными стенками, а затем одна из стенок становится криволинейной, так что постоянное течение переходит в простую стационарную волну следующего вида (фиг. 2):

$$u_1 = \cos s + (s + 1 - {}^1/_4\pi) \sin s, \qquad u_2 = \sin s - (s + 1 - {}^1/_4\pi) \cos s$$

$$s = x_1 + x_2 \operatorname{tg} s + {}^1/_4\pi, \qquad q = c - {}^1/_2 u_1^2 - {}^1/_2 u_1^2 \qquad (c = \text{const}) \qquad (3.1)$$

Искривленная часть стенки неподвижного канала OA, начинающаяся в точке (0,0), задается параметрически уравнениями

$$x_1 = s - x_2 \operatorname{tg} s - {}^1/_4\pi, \qquad x_2 = \cos^2 s + \cos s \qquad (3.2)$$

$$\exp\left[\frac{s^2}{2} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)s\right] \left(2 \int\limits_{{}^1/_4\pi}^{s} \sin \exp\left[-\frac{s^2}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)s\right] ds - \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left[\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

До характеристики OB

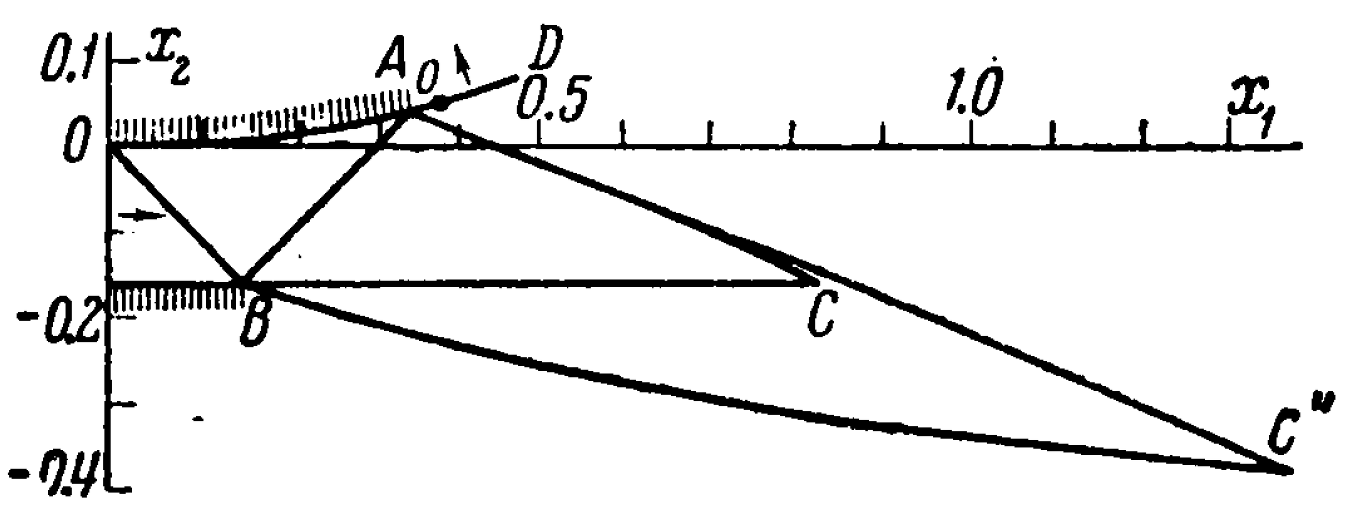
$$x_1 + x_2 = 0 \tag{3.3}$$

стенки канала прямолинейны, поток однороден и $u_2 = 0$, $u_1 = \sqrt{2}$. В области OAB имеет место простая стационарная волна. Форма неподвижной характеристики AB находится после интегрирования линейного уравнения

$$\frac{dx_2}{ds} = \frac{(\cos^2 s - x_2)\,[u_1 + u_2\,(s + 1 - {}^1/_4\pi)]}{2\cos s\,(s + 1 - {}^1/_4\pi)} \tag{3.4}$$

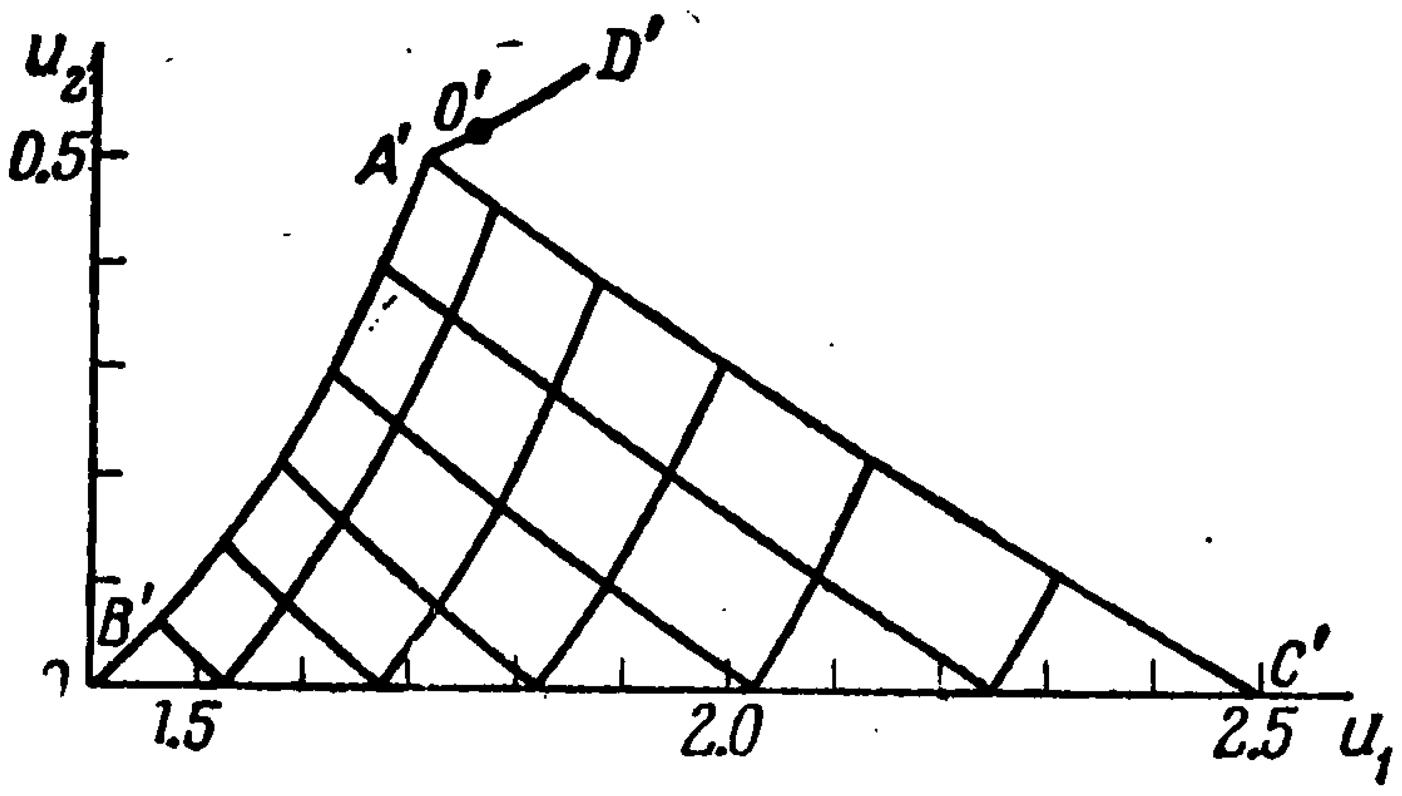
с начальным условием в точке A, $s \in [1.26;\ {}^1/_4\pi]$. В области BAC методом Массо решаются уравнения (1.10) и (1.11) для неустановившейся двойной волны, причем вдоль нехарактеристической линии BC ($x_2 = -0.1593$) задавались условия

$$q_1 = \mathrm{const} = -\sqrt{2}$$
$$\Phi_2^\circ = \mathrm{const} = -0.1593, \quad u_2 = 0 \tag{3.5}$$



Фиг. 2

Решение и характеристики в плоскости годографа представлены на фиг. 3.



Фиг. 3

Характеристика $A'B'$ соответствует области простой волны OAB в физической плоскости, линия $A'D'$ — подвижной стенке AD. В области $C'A'D'$ решение полностью не определялось и рассматривалось положение подвижной стенки лишь в окрестности точки A. Форма подвижной стенки указана на фиг. 2. Нормальная скорость движения стенки в точке o $D = 0.103$, в плоскости годографа точке o соответствует точка o'.

Область BAC в физической плоскости соответствует области $B'A'C'$ в плоскости годографа в момент времени $t = 0$, а область BAC'' — в момент $t = 0.5$. В данном случае для изотермического газа якобиан преобразования координат из плоскости годографа в физическую плоскость имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial u_1 & \partial x_2 / \partial u_2 \\ \partial x_2 / \partial u_1 & \partial x_2 / \partial u_2 \end{vmatrix} = [(1 + q_{11})(1 + q_{22}) - q_{12}^2]\, t^2 +$$
$$+ [(1 + q_{11})\,\Phi_{22}^\circ + (1 + q_{22})\,\Phi_{11}^\circ - 2q_{12}\Phi_{12}^\circ]\, t + \Phi_{11}^\circ\Phi_{22}^\circ - \Phi_{12}^{\circ 2} \tag{3.6}$$

При $t = 0$ непосредственно проверяется, что

$$\Phi_{11}^\circ\Phi_{22}^\circ - \Phi_{12}^{\circ 2} \neq 0 \tag{3.7}$$

т. е. переход в физическую плоскость возможен и предельных линий не появляется в некотором интервале изменения времени $t_0 > t > 0$. Отметим, что поставленные задачи не позволяют пока в рамках двойных волн получить полное решение проблемы о переходе от стационарного течения в канале с неподвижными стенками к нестационарному течению, возникающему, если в некоторый момент времени начать двигать с какого-либо места стенки канала. Это обстоятельство связано с появлением предельных линий, если рассматривать моменты времени $t < 0$. Исследование времени существования рассмотренных режимов здесь не затрагивает.

В заключение приношу благодарность Н. Н. Яненко за внимание и советы.

Поступила 12 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. 1949. Сб. теор. работ по аэродинамике. Оборонгиз, 1957.
2. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
3. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ДАН СССР, 1958, т. 119, № 3.
4. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. ДАН СССР, т. 123, № 5, 1958.
5. Сидоров А. Ф. К вопросу об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
6. Сидоров А. Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газовой динамики. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
7. Бурнат М. Задача Коши для сжимаемых течений типа простых волн. Archiwum Mechaniki Stosowaney. 3/4, 14, 1962.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики, ГИТТЛ, т. IV, 1953.
9. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. ИЛ., М., 1961.

РАЗВИТИЕ И ЗАТУХАНИЕ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН

Л. В. Черкесов

(Минск)

Рассматривается пространственная задача о развитии и затухании поверхностных волн, возникающих при прямолинейном движении по свободной поверхности с постоянной скоростью c некоторой системы давлений. Аналогичные задачи в случае установившихся движений рассматриваются в работах [1-4].

§ 1. Пусть к горизонтальной свободной поверхности жидкости, занимающей полупространство $z < 0$ и текущей со скоростью c в положительном направлении оси x, прикладываются, начиная с момента времени $t = 0$, давления вида $p = p_0 a(x,y)$. Предполагая движение жидкости безвихревым, потенциал скоростей $\Phi\ (x,\ y,\ z,\ t)$ запишем в виде

$$\Phi\ (x,\ y,\ z,\ t) = cx + \varphi\ (x,\ y,\ z,\ t)$$

Потенциал возмущенного движения $\varphi\ (x,\ y,\ z,\ t)$ должен удовлетворять следующим уравнениям [2]:

$$\Delta\varphi = 0, \qquad z < 0 \tag{1.1}$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_z + 2c\varphi_{xt} + c^2\varphi_{xx} = -c\rho^{-1}p_0 a_x, \qquad z = 0 \tag{1.2}$$

$$\varphi\ (x,\ y,\ z,\ 0) = 0, \qquad \varphi_t + c\varphi_x = -p_0\rho^{-1}a, \qquad z = 0, \qquad t = 0 \tag{1.3}$$

При этом возвышение свободной поверхности жидкости $\zeta\ (x,\ y,\ t)$ дается формулой

$$\zeta = -g^{-1}\left[\varphi_t + c\varphi_x + p_0\rho^{-1}a\right]_{z=0} \tag{1.4}$$

Условия (1.3) выражают тот факт, что в начальный момент времени возмущенные движения отсутствуют, а свободная поверхность горизонтальна. Применяя к (1.1) — (1.4) преобразование Фурье по переменным x и y, получим

$$\Phi_{zz} - (m^2 + n^2)\,\Phi = 0, \qquad z < 0 \tag{1.5}$$

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z + 2cim\Phi_t - m^2c^2\Phi = -c\rho^{-1}p_0\, imA, \qquad z = 0 \tag{1.6}$$

$$\Phi\ (m,\ n,\ z,\ 0) = 0, \qquad \Phi_t + imc\Phi = -p_0\rho^{-1}A, \qquad z = 0, \qquad t = 0 \tag{1.7}$$

$$Z = -g^{-1}\left(\Phi_t + cim\Phi + p_0\rho^{-1}A\right)_{z=0} \tag{1.8}$$