

Здесь $I_i(rq)$ и $K_i(rq)$ ($i = 0$ или 2) — функции Бесселя мнимого аргумента и

$$A_i(r, q) = - \left\{ \int_r^\infty r \Psi_i(r, q) I_i(rq) dr + \frac{I_i'(q)}{K_i'(q) - \lambda q K_i(q)} \int_1^\infty r \Psi_i(r, q) I_i(rq) dr - \right.$$

$$\left. - \frac{K_i(q)}{K_i'(q) - \lambda q K_i(q)} \int_1^\infty r \Psi_i(r, q) K_i(rq) dr \right\}, B_i(r, q) = - \int_r^\infty r \Psi_i(r, q) K_i(rq) dr \quad (4.22)$$

Подставляя (4.20) в (4.17), получим

$$\varphi_2(r, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_M [F_1(r, q) + \cos 2\theta F_2(r, q)] e^{q\tau} dq \quad (4.23)$$

По найденному значению $\varphi_2(r, \theta, \tau)$ и по известному $\varphi_1(r, \theta, \tau)$ определим $p(\theta, \tau)$ на контуре и деформацию $\varepsilon(\theta, \tau)$ по формулам

$$p(\theta, \tau) = p_0 - \rho a^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right), \quad \varepsilon(\theta, \tau) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right) \quad (4.24)$$

В силу эквивалентности задач формулы (4.15), (4.23) дают решение задачи дифракции ударной волны на круге с учетом второго приближения. Формула (4.15) дает решение задачи дифракции также на произвольном контуре S .

Примечания. Можно показать, что пространственные задачи дифракции могут быть решены во втором приближении методом, аналогичным изложенному выше.

Поступила 25 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов И. Г. К теории дифракции слабых ударных волн около контуров произвольной формы. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Hadamard J. Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy. Acta Math., 1908, vol. 31, 333.

О ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

М. П. Рябоконтъ

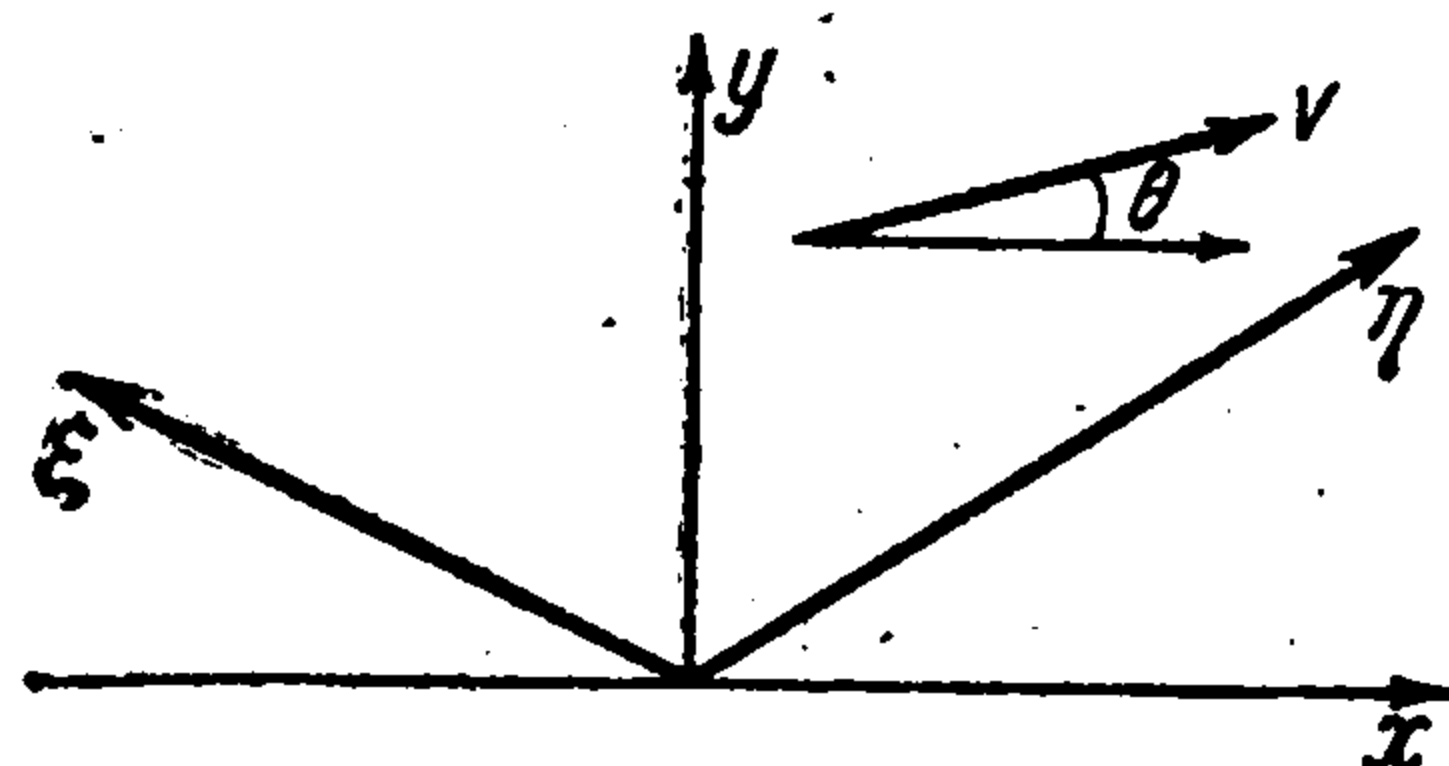
(Москва)

Рассматриваются сверхзвуковые течения газа вблизи оси сопел Лавалья, описываемые линеаризованными гиперболическими уравнениями второго порядка.

Получено выражение для определения формы линий тока в зависимости от распределения чисел M на оси сопла. Рассмотрено влияние разрывов начальных значений на поведение линий тока.

Решения не могут быть использованы для области перехода через скорость звука.

1. Уравнения характеристик сверхзвуковых осесимметричных безвихревых течений (фиг. 1) в характеристических координатах (η, ξ) имеют следующий вид:



Фиг. 1

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} = 0 \quad \left(\sigma(M) = \int_{v^*}^v \operatorname{ctg} \mu \frac{dv}{v} \right) \quad (1.1)$$

Здесь μ — угол Маха, M — число Маха, v_* — критическая скорость, θ — угол наклона вектора скорости к оси x .

Характеристические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos(\mu + \theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\cos(\mu - \theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sin(\mu + \theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin(\mu - \theta) \quad (1.2)$$

Для линеаризации уравнений предполагаем малости угла наклона линий тока

$$\theta = o(1) \quad (1.3)$$

и в уравнениях отбрасываем члены высшего порядка малости. Это условие имеет место в некоторой окрестности оси сопла.

Уравнения (1.1) показывают, что в любом характеристическом треугольнике $\sigma - \sigma_0$ и θ являются величинами одного порядка малости (здесь σ_0 — значение, взятое в некоторой точке треугольника). Отсюда следует, что с точностью до малых величин $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, $\mu = \mu(\sigma) = \text{const}$.

Уравнения (1.1) в линеаризированной форме принимают вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\theta \sin \mu}{y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\theta \sin \mu}{y} = 0 \quad (1.4)$$

а соотношения между координатами

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos \mu, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\cos \mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sin \mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin \mu \quad [(1.5)]$$

Характеристики обоих семейств будут прямыми, наклоненными к оси x под постоянными углами μ и $-\mu$. Исключая из (1.4) σ и переходя к декартовым координатам, получаем дифференциальное уравнение для определения θ

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\theta}{y} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad (c = \text{ctg } \mu) \quad (1.6)$$

Для решения уравнения (1.6) необходимо задать $\partial \theta / \partial y$ при $y = 0$. Второе начальное условие $\theta(x, 0) = 0$ (из условия симметрии). Обычно при расчете сопел Лаваля задается распределение чисел M (или $\sigma(M)$) на оси сопла. Связь между $(\partial \theta / \partial y)_{y=0}$ и $\sigma(x, 0)$ можно получить, используя любое из уравнений (1.4). Имеем

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{y=0} \quad (1.7)$$

2. Подстановка $u = \theta / y$ приводит к уравнению Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

Для получения решений, непрерывных при $y = 0$, необходимо положить, учитывая особенность во втором члене

$$(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$$

Это соотношение есть одно из начальных условий. Поэтому произвольно можно задавать только второе из начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{или} \quad u(x, 0) = (\partial \theta / \partial y)_{y=0} \quad (2.2)$$

3. Найдем сначала решение U уравнения (2.1), удовлетворяющее простым начальным условиям

$$\varphi(x) = \tau(x, x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнение (2.1) однородное, поэтому решение U будем искать как функцию от $z = (x - x_0) / y$. Подстановка этой функции в (2.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(c^2 - z^2) d^2 U / dz^2 + z dU / dz = 0 \quad (3.2)$$

Граничные значения для U имеют вид

$$U = \begin{cases} 1 & \text{при } x - x_0 = cy \text{ или } z = c \\ 0 & \text{при } x - x_0 = -cy \text{ или } z = -c \end{cases} \quad (3.3)$$

а. решение

$$U = \frac{1}{2} + \frac{z}{c\pi} \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{z}{c} \quad (-c \leq z \leq c) \quad (3.4)$$

$$U = 0 \quad \text{при } z \leq -c, \quad U = 1 \quad \text{при } z \geq c$$

4. Эту функцию можно использовать для построения решения при произвольных, но непрерывных начальных значениях $\varphi(x)$.

Непрерывную функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = \varphi(x - cy) + \int_{x-cy}^{\infty} \frac{d\varphi}{dx_0} \tau(x, x_0) dx_0 \quad (4.1)$$

так как $\tau = 0$ при $x_0 > x$ в силу (3.1). Приращение начальных значений

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx_0} \tau(x, x_0) dx_0$$

создает в точке (x, y) приращение функции

$$du = \frac{d\varphi}{dx_0} U\left(\frac{x - x_0}{y}\right) dx_0$$

Полное значение u , очевидно, представляется формулой

$$u = \varphi(x - cy) + \int_{x-cy}^{x+cy} \frac{d\varphi}{dx_0} U\left(\frac{x - x_0}{y}\right) dx_0 \quad (4.2)$$

так как $U = 0$ при $x_0 > x + cy$. Отсюда, интегрируя по частям и учитывая значения U на характеристиках (3.3), имеем

$$u = \frac{1}{y} \int_{x-cy}^{x+cy} \varphi(x_0) \frac{dU}{dz} dx_0 \quad \left(\frac{dU}{dz} = \frac{2}{c\pi} \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{c^2 y^2}} \right) \quad (4.3)$$

Можно показать, что формула (4.3) справедлива во всех случаях, когда распределение чисел M вдоль оси сопла непрерывно, т. е. течение не имеет сильных разрывов. Отметим, что в точках, где функция $\varphi(x)$ и ее производная $d\varphi/dx$ терпят разрывы, условие $(\partial u / \partial y) = 0$ при $y \rightarrow 0$ не выполняется.

5. Возвращаясь к функции $\theta = uy$, получаем для решения уравнения (1.6)

$$\theta = \int_{x-cy}^{x+cy} \varphi(x_0) \frac{dU}{dz} dx_0 \quad (5.1)$$

Рассмотрим функцию θ , у которой

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \varphi(x) = \begin{cases} ax^n & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Поведение функции $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ будем называть разрывом порядка n .

В соответствии с (5.1) выражение для θ в области между характеристиками $x = \pm cy$ имеет вид

$$\theta = \int_0^{x+cy} ax_0^n \frac{dU}{dz} dx_0 \quad (5.3)$$

В силу условия линеаризации (1.3) линии тока соответствуют $y \approx \text{const}$; поэтому соотношение (5.3) при $y = y_0$ выражает изменение угла θ вдоль линии тока $y \approx y_0$.

Произведем замену переменной

$$X = x + cy \quad (5.4)$$

Такая замена означает перенос начала координаты x в точку пересечения характеристики $x = -cy$ и линии $y = y_0$.

Разложение dU/dz в ряд относительно $(X - x_0)/y_0$ имеет вид

$$\frac{dU}{dz} = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{2}{cy_0}} \sqrt{X - x_0} \left[1 + \dots + a_k \frac{(X - x_0)^k}{y_0^k} + \dots \right] \quad (5.5)$$

Разложение θ в ряд по X/y_0 будет иметь вид

$$\theta = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{2}{cy_0}} a X^{n+1.5} \left(c_0 + \dots + c_k \frac{X^k}{y_0^k} + \dots \right), \quad c_i = a_i \int_0^1 \left(1 - \frac{x_0}{X} \right)^{0.5+i} \left(\frac{x_0}{X} \right)^n d \frac{x_0}{X} \quad (5.6)$$

При $n > -1$ все коэффициенты c_i имеют смысл.

Интегрируя по X , получаем разложение уравнения линии тока

$$y - y_0 = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{2}{cy_0}} a X^{n+2.5} \left[\frac{c_0}{n+2.5} + \dots + \frac{c_k X^k}{(n+k+2.5)y_0^k} + \dots \right] \quad (5.7)$$

Соотношение (5.7) показывает, что при разрыве порядка n начальной функции $\Phi(x)$ по характеристике $x = -cy$ распространяется разрыв линии тока порядка $n + 2.5$. При отсутствии сильных разрывов на оси x значения порядка разрыва линии тока составляют больше 1.5. Для исследования поведения θ перед отраженной характеристикой $x = cy$ произведем замену переменных

$$X_1 = cy_0 - x, \quad x_1 = x_0 + X_1 \quad (5.8)$$

Разложение dU/dz в ряд относительно x_1/y_0 имеет вид

$$\frac{dU}{dz} = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{2}{cy_0}} \sqrt{x_1} \left(1 + \dots + a_k \frac{x_1^k}{y_0^k} + \dots \right) \quad (5.9)$$

Выражение для θ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{X_1}^{2cy_0} a (x_1 - X_1)^n \frac{dU}{dz} dx_1 = \int_{X_1}^{2X_1} a X_1^n \left(\frac{x_1}{X_1} - 1 \right)^n \frac{dU}{dz} dx_1 + \int_{2X_1}^{2cy_0} a x_1^n \left(1 - \frac{X_1}{x_1} \right)^n \frac{dU}{dz} dx_1 = \\ &= a X_1^{n+1} \int_1^2 \left(\frac{x_1}{X_1} - 1 \right)^n \frac{dU}{dz} d \frac{d_1}{X_1} + a \int_{2X_1}^{2cy_0} x_1^n \left(1 + \dots + b_k \frac{X_1^k}{y_0^k} + \dots \right) \frac{dU}{dz} dx_1 \quad (5.10) \end{aligned}$$

Пусть N — натуральное число или ноль. Тогда (5.10) можно представить так:

при $n \neq -0.5 + N$

$$\theta = y_0^{n+1} \left(A_0 + \dots + A_k \frac{X_1^k}{y_0^k} + \dots \right) + \frac{X_1^{n+1.5}}{y_0^{0.5}} \left(B_0 + \dots + B_k \frac{X_1^k}{y_0^k} + \dots \right) \quad (5.11)$$

при $n = 0.5 + N$

$$\theta = y_0^{n+1} \left(c_0 + \dots + c_k \frac{X_1^k}{y_0^k} + \dots \right) + \frac{X_1^{n+1.5}}{y_0^{0.5}} \ln \frac{X_1}{y_0} \left(D_0 + \dots + D_k \frac{X_1^k}{y_0^k} + \dots \right) \quad (5.12)$$

Дифференцируя последнее соотношение, получаем, что кривизна линий тока $k = \partial\theta / \partial x$ при $n = -0.5$ на отраженной характеристике имеет логарифмическую особенность. Аналогичный результат для производных скорости в этом же частном случае получен в работе [3]. За отраженной характеристикой $x = cy$ имеем для θ

$$\theta = \int_0^{X_2} a X_2^n \left(1 + \frac{x_2}{X_2} \right)^n \frac{dU}{dz} dx_2 + \int_{X_2}^{2cy_0} a x_2^n \left(1 + \frac{X_2}{x_2} \right)^n \frac{dU}{dz} dx_2 \quad \left(\begin{array}{l} X_2 = x - cy_0 \\ x_2 = x_0 - X_2 \end{array} \right) \quad (5.13)$$

причем

$$\frac{dU}{dz} = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{2}{cy_0}} \sqrt{x_2} \left(1 + \dots + a_k \frac{x_2^k}{y_0^k} + \dots \right) \quad (5.14)$$

Это выражение при n натуральном или нуле превращается в полином степени n , в противном случае оно имеет вид, аналогичный (5.11) или (5.12).

При помощи формул (5.3) и (5.1), а также путем интегрирования и дифференцирования этих же формул можно получить следующие соотношения для угла θ , смещения линий тока $y - y_0$ и кривизны линий тока k , справедливые для всей области:

$$\theta = y_0^{n+1} F_1 \left(\frac{x}{y_0} \right), \quad y - y_0 = y_0^{n+2} F_2 \left(\frac{x}{y_0} \right), \quad k = y_0^n F_3 \left(\frac{x}{y_0} \right) \quad (5.15)$$

6. В качестве примера применения формулы (5.1) приведем расчет формы выравнивающего участка сопла Лавала, переводящего радиальный поток в параллельный.

Расстояние от «источника» до точки стыка радиального и параллельного участков на оси x обозначим через R , а радиус выхода сопла — r . Очевидно, $r/R = \theta_a$ — угол стенки сопла на радиальном участке. Начало координаты x поместим в точке

стыка участков. Очевидно

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/(R+x) & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Величину $1/(R+x_0)$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{R+x_0} = \frac{1}{R+x} \left[1 + \frac{y}{R+x} z + \frac{y}{(R+x)^2} z^2 + \dots \right]$$

Учитывая, что $y/(R+x) = O(\theta)$, в этом разложении необходимо оставить только первый член $1/(R+x)$. Пользуясь (5.1), получаем выражение для θ

$$\theta = \int_{x-cy}^0 \frac{1}{R+x_0} \frac{dU}{dz} dx_0 = \frac{y}{R+x} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi cy} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 y^2}} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{cy} \right) \quad (6.2)$$

Для приближенного вычисления уравнения линии тока $y \approx r$ необходимо проинтегрировать это уравнение, подставив в него $y = r$. При этом можно принять

$$\frac{1}{R+x} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{R} \quad \left(\frac{x}{R} = \frac{r}{R} \frac{x}{r} = O(\theta) \right)$$

Такое уравнение имеет вид

$$y - r_0 = \frac{xr}{2R} - \frac{xr}{\pi R} \arcsin \frac{x}{cr} - \frac{cr^2}{\pi R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 r^2}} + \frac{cr^2}{3\pi R} \left(1 - \frac{x^2}{c^2 r^2} \right)^{3/2} \quad (-cr \leq x \leq cr), \quad (6.3)$$

7. Исключая из (1.4) функцию θ и переходя к координатам x, y , получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0 \quad (7.1)$$

При начальных условиях

$$\sigma(x, 0) = \psi(x), \quad (\partial \sigma / \partial y)_{y=0} = 0 \quad (7.2)$$

решение уравнения (7.1) имеет вид

$$\sigma = \int_{x-cy}^{x+cy} \psi(x_0) \frac{1}{\pi cy} \frac{dx_0}{\sqrt{1 - (x-x_0)^2/c^2 y^2}}, \quad \varphi(x) = \frac{c}{2} \frac{d\psi}{dx} \quad (7.3)$$

8. Для сравнения с полученными соотношениями приведем (без вывода) некоторые результаты для плоского случая. Уравнения для θ и σ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0 \quad (8.1)$$

а решения (Даламбера) этих уравнений

$$\theta = \frac{1}{2c} \int_{x-cy}^{x+cy} \varphi(x_0) dx_0, \quad \sigma = \frac{\psi(x+cy) + \psi(x-cy)}{2}, \quad \varphi(x) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (8.2)$$

$$\psi(x) = \sigma(x, 0), \quad \theta(x, 0) = 0, \quad (\partial \sigma / \partial y)_{y=0} = 0$$

При непрерывных на оси значениях σ (при отсутствии на оси сильных разрывов) линии тока имеют разрывы выше первого порядка, т. е. не имеют угловых точек.

Порядок разрывов линий тока, распространяющихся по характеристикам, превышает на два порядка разрывов $\varphi(x)$. В частности, при простейших начальных условиях (3.1) линии тока в области $-cy \leq x - x_0 \leq cy$ представляют собой дуги окружностей, переходящие на характеристиках $x - x_0 = \pm cy$ в касательные прямые.

Поступила 2 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Yu W h y. Supersonic flow through nozzles with rotational symmetry; Commun. Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 1.
2. Chen Yu W h y. Flow through nozzles and related problems of cylindrical and spherical waves. Commun. Pure and Appl. Math., 1953, vol. 6, No. 2.
3. Meyer R. E. The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variables. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, 1.