

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ И НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

И. Г. Филиппов (Москва)

В работе [1] в линейной постановке решалась плоская нестационарная задача дифракции плоских слабых ударных волн на контурах произвольной формы, в частности на круге. Ниже дается обобщение результатов работы [1] на трехмерные задачи дифракции. При этом используется следующая теорема.

Теорема 1. Пространственная линейная задача дифракции плоских слабых ударных волн на телах произвольной формы Q эквивалентна внешней задаче обтекания четырехмерным установившимся сверхзвуковым $M = \sqrt{2}$ потоком идеального газа некоторого полого полубесконечного четырехмерного цилиндра, соответствующего телу Q , под малым углом атаки α_0 .

Доказательство этой теоремы не приводится, — оно аналогично доказательству соответствующей теоремы для плоских задач дифракции [1].

§ 1. В работе [1] рассматривалась плоская линейная задача дифракции ударной волны на произвольном контуре C или дифракции слабой ударной волны на произвольном бесконечном цилиндре, когда фронт падающей плоской ударной волны параллелен образующей цилиндра, имеющего в поперечном сечении контур C .

Покажем, что эта пространственная задача в случае, когда фронт падающей ударной волны составляет с осью цилиндра некоторый произвольный угол γ , сводится к плоской задаче дифракции, рассмотренной в работе [1].

Считая обтекание бесконечного цилиндра плоской слабой ударной волной безвихревым изэнтропическим, в безразмерной постановке задачу можно свести к нахождению потенциала возмущенных скоростей Φ , удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \quad \left(\tau = \frac{at}{l} \right) \quad (1.1)$$

где $2l$ — характерная длина (например, максимальный диаметр цилиндра), и условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\alpha_0 \cos \gamma \frac{\partial y}{\partial n} + \varepsilon'_\tau(s, z, \tau) \quad \text{на цилиндре} \quad (1.2)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{на фронте отраженной ударной волны } S^- \quad (1.3)$$

Здесь ε — деформация цилиндра, n — нормаль, s — касательная к цилиндру в плоскости xy .

Условие (1.2) выведено в предположении, что потенциал падающей ударной волны

$$\Phi_0(x, y, z, \tau) = \alpha_0 (y \cos \gamma + z \sin \gamma - \tau) \quad (1.4)$$

и величина деформации цилиндра $\varepsilon(s, z, \tau)$ связаны с давлением $p(s, z, \tau)$ на цилиндре соотношением

$$\varepsilon(s, z, \tau) = k [p(s, z, \tau) - p_0] \quad (1.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Решение, которое будет получено в предположениях (1.4) и (1.5), нетрудно [1] обобщить на случай, когда

$$\Phi_0(x, y, z, \tau) = f(y \cos \gamma + z \sin \gamma - \tau), \quad p(s, z, \tau) = \Psi[\varepsilon(s, z, \tau)]$$

Нетрудно видеть, что при любом τ фронт падающей ударной волны пересекает бесконечный цилиндр; безразмерная скорость волны вдоль оси z равна $\csc \gamma$.

Введем подвижную систему координат

$$x = x, \quad y = y, \quad \eta = \tau \sec \gamma - z \operatorname{tg} \gamma \quad (1.6)$$

В этой системе координат потенциал $\Phi(x, y, z, \tau)$ должен зависеть лишь от x, y, η . Аналогично и $\varepsilon(s, z, \tau)$ будет иметь вид

$$\varepsilon(s, z, \tau) = \varepsilon(s, \eta) \quad (1.7)$$

Кроме того, очевидно, что при $\eta \leq 0$ потенциал $\Phi \equiv 0$.

В координатах (1.6) уравнение (1.1) с условиями (1.2) — (1.5) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\alpha_0 \cos \gamma \frac{\partial y}{\partial n} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \quad \text{на } C \quad \left(\lambda_1 = -\frac{\rho a^2 k}{\cos^2 \gamma} \right) \quad (1.9)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } \eta \leq 0 \quad \text{на } S^- \quad (1.10)$$

$$\Phi_0(x, y, \eta) = \alpha_0 \cos \gamma (y - \eta), \quad \varepsilon(s, \eta) = k [p(s, \eta) - p_0] \quad (1.11)$$

Здесь для (1.9) учитывалось, что $p(s, \eta) \sim \partial \Phi / \partial \eta$. Система (1.8) — (1.10) эквивалентна плоской задаче дифракции [1] ударной волны на контуре C с той лишь разницей, что вместо τ стоит η и безразмерные константы зависят от γ .

Например, для кругового цилиндра единичного радиуса $\Phi(x, y, z, \tau)$ на поверхности цилиндра при $\eta > 0$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению:

$$\Phi(1, \theta_0, \eta_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\Phi(1, \theta, \eta) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} V \right] d\theta d\eta \right\} \quad (1.12)$$

где Σ — часть поверхности цилиндра во вспомогательной плоской задаче дифракции [1], отсекаемая конусом влияния из точки $(r_0 = 1, \theta_0, \eta_0)$; r и θ — полярные координаты в плоскости (x, y) ; V — функция Вольтерра трехмерного волнового уравнения.

При больших η или далеко за фронтом падающей ударной волны

$$\Phi(r_0, \theta_0, z_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{K_1(r_0 q) \exp [q (\tau_0 \sec \gamma - z_0 \operatorname{tg} \gamma)] dq}{K_1'(q) + \lambda_1 q K_1(q)} \frac{dq}{q^2} \quad (1.13)$$

Здесь M — контур интегрирования при применении обратного преобразования Лапласа, $K_1(q)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Для деформации ε при больших η , например, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, z, \tau) = & \lambda_1 \alpha_0 \cos \gamma \sin \theta \left\{ \exp [-q_1(\lambda_1) (\tau \sec \gamma - z \operatorname{tg} \gamma)] \times \right. \\ & \times [A(\lambda_1) \cos \{q_2(\lambda_1) (\tau \sec \gamma - z \operatorname{tg} \gamma)\} + B(\lambda_1) \sin \{q_2(\lambda_1) (\tau \sec \gamma - z \operatorname{tg} \gamma)\}] - \\ & \left. - \int_0^{\infty} \frac{\exp [-q (\tau \sec \gamma - z \operatorname{tg} \gamma)] dq}{\{[K_1'(q) + \lambda_1 q K_1(q)]^2 + \pi^2 [I_1'(q) + \lambda_1 q I_1(q)]^2\} q^2} \right\} \quad (1.14) \end{aligned}$$

Здесь $q_1(\lambda_1)$, $q_2(\lambda_1)$, $A(\lambda_1)$, $B(\lambda_1)$ — вполне определенные функции от λ_1 и $-q_1(\lambda_1) + iq_2(\lambda_1)$ представляет собой корень уравнения

$$K_1'(q) + \lambda_1 q K_1(q) = 0 \quad (q_1(\lambda_1) > 0)$$

§ 2. Рассмотрим задачу дифракции слабой ударной волны на сфере единичного радиуса (фиг. 1). В безразмерной постановке задача сводится к определению потенциала Φ возмущенных скоростей по уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \quad (2.1)$$

в области между поверхностью сферы и отраженной ударной волной и условиям

$$\partial \Phi / \partial r = -\alpha_0 \cos \theta + \varepsilon_r'(\theta, \tau) \quad \text{при } r = 1$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (2.2)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{на отраженной ударной волне } S^- \quad (2.3)$$

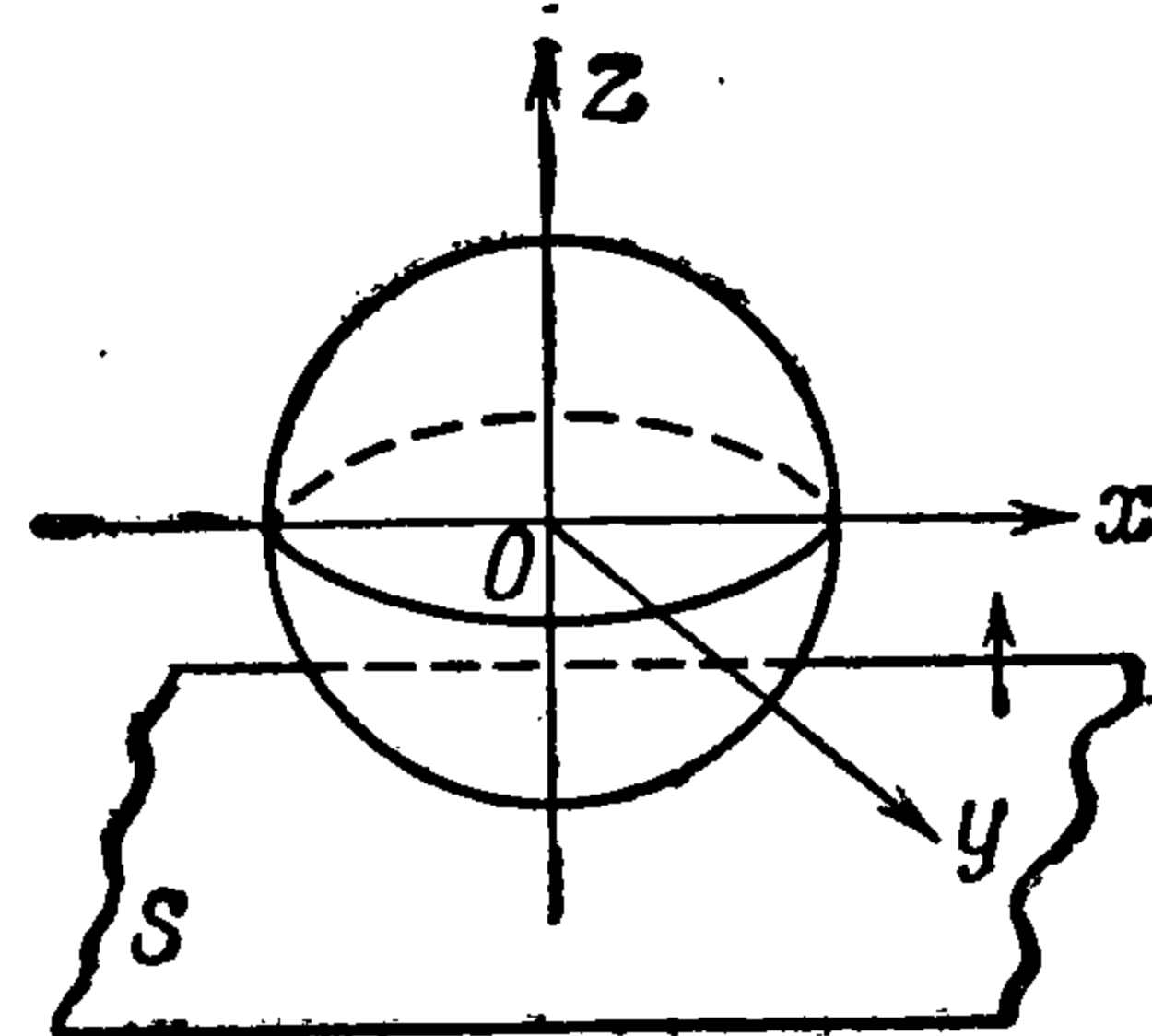
Здесь r, θ, φ — сферические координаты, т. е.

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

В силу симметрии потенциал Φ от φ не зависит.

Аналогично § 1 предполагаем, что потенциал Φ_0 падающей ударной волны равен

$$\Phi_0(x, y, z, \tau) = \alpha_0 (z - \tau)$$



Фиг. 1

и деформация сферы $\varepsilon(\theta, \tau)$ линейно связана с давлением $p(\theta, \tau)$ на сфере по формуле (1.5). Согласно теореме 1 будем рассматривать вспомогательную внешнюю задачу обтекания четырехмерного полого полубесконечного по оси τ ($\tau \geq 0$) цилиндра сверхзвуковым потоком идеального газа под малым углом атаки α_0 .

Рассмотрим картину дифракции ударной волны на сфере в некоторый момент времени $\tau_1 > 0$. При $\tau = \tau_1$ граница возмущенной области в задаче дифракции состоит из отраженной ударной волны и части поверхности сферы при $\tau_1 < \tau_2$ или из всей поверхности сферы при $\tau_1 \geq \tau_2$, где τ_2 — время, за которое падающая ударная волна полностью охватит сферу. Далее, рассечем поверхность четырехмерного цилиндра плоскостью $\tau = \tau_1$. Тогда четырехмерная кривая пересечения цилиндра плоскостью $\tau = \tau_1$ будет соответствовать части поверхности сферы (или всей поверхности сферы при $\tau_1 \geq \tau_2$), составляющей границу возмущенной области в задаче дифракции.

В силу упомянутой выше теоремы внешняя вспомогательная задача также будет описываться системой (2.1) — (2.3), которую будем решать методом, аналогичным методу Вольтерра для трехмерного волнового уравнения.

Построим решение $V(r, \theta, \varphi, \tau; r_0, \theta_0, \varphi_0, \tau_0)$ волнового уравнения (2.1), обращающееся в нуль на поверхности характеристического конуса

$$(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 - (z_0 - z)^2 = 0 \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что функция V имеет вид [2]

$$V = \frac{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 - (\tau_0 - \tau)}}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}} \quad (2.5)$$

Следуя методу решения волнового уравнения со многими независимыми переменными [2], можно показать, что

$$\Phi(r_0, \theta_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_T \left[\Phi(1, \theta, \tau) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} V \right] d\theta d\varphi d\tau \right\} \quad (2.6)$$

Так как значение Φ на поверхности четырехмерного цилиндра неизвестно, то, устремляя $r_0 \rightarrow 1$ в (2.6), получим интегро-дифференциальное уравнение для

$$\Phi(1, \theta_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{T_0} \left[\Phi(1, \theta, \tau) \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} V \right] d\theta d\varphi d\tau \right\} \quad (2.7)$$

где T и T_0 — объемы или части поверхностей четырехмерного цилиндра, отсекаемые конусами влияния (2.4) из точек $(r = r_0, \theta_0, \tau_0, \varphi_0)$ и $(r_0 = 1, \theta_0, \tau_0, \varphi_0)$ (фиг. 2) соответственно. Определив $\Phi(1, \theta, \tau)$ из уравнения (2.7), найдем величины $p(1, \theta, \tau)$ и $\varepsilon(\theta, \tau)$ по формулам

$$p(1, \theta, \tau) = p_0 - \rho a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad \varepsilon(\theta, \tau) = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad \lambda = -\rho a^2 k \quad (2.8)$$

Можно дать асимптотическое решение задачи дифракции на сфере при больших τ . На самом деле, при больших τ радиус r отраженной ударной волны слабо зависит от θ и потенциал Φ можно искать в виде

$$\Phi(r, \theta, \tau) = -\alpha_0 \cos \theta f(r, \tau) \quad (2.9)$$

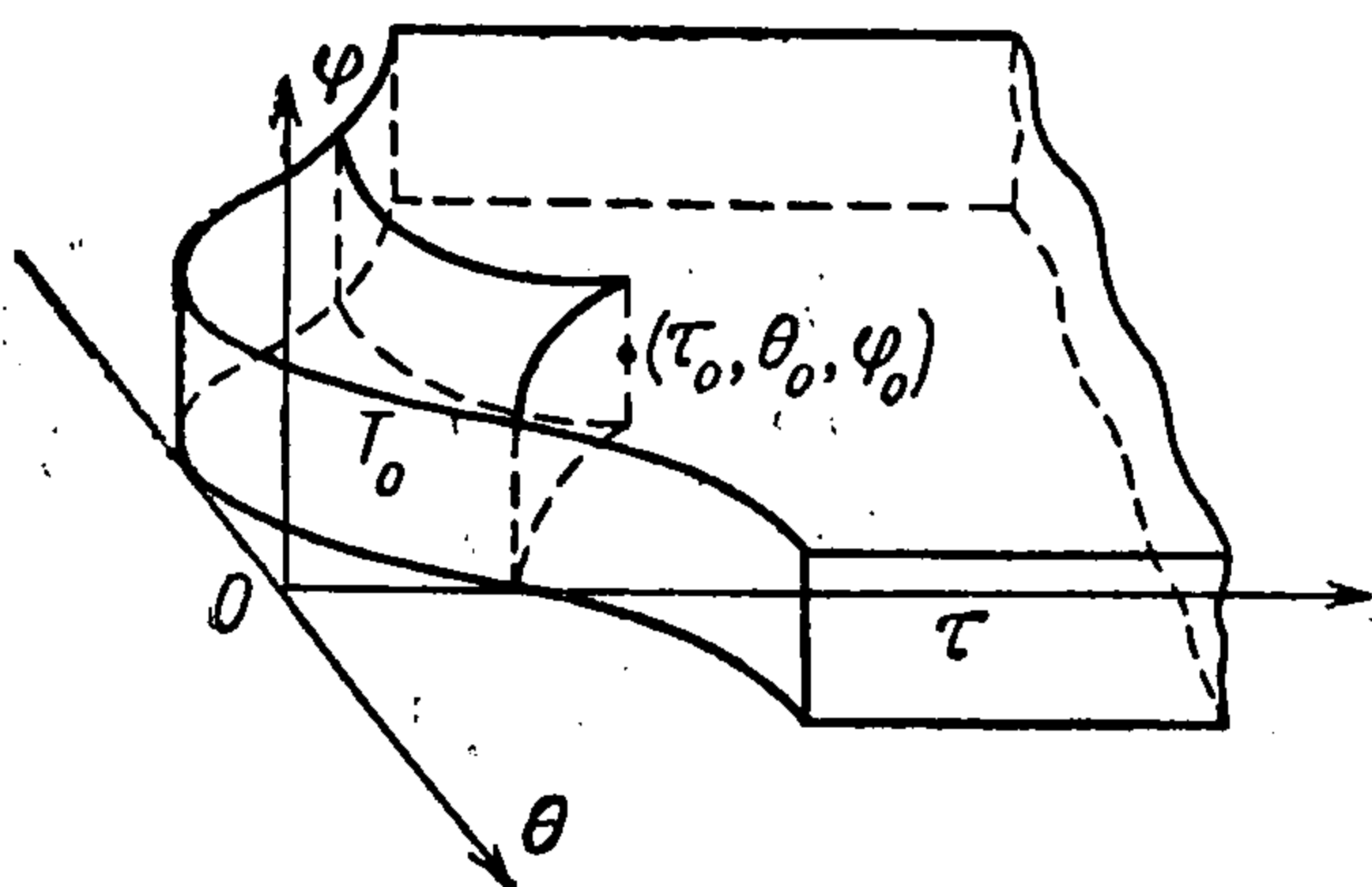
Подставим (2.9) в (2.1) и к полученному уравнению для $f(r, \tau)$ применим преобразование Лапласа. Для преобразованной функции $F(r, q)$, где q — переменная преобразования Лапласа, получим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} - \left(q^2 + \frac{2}{r^2} \right) F = 0 \quad (2.10)$$

при условии, что

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{q} - \lambda q^2 F \quad \text{при } r = 1 \quad (2.11)$$

и функция $f(r, \tau)$, а также ее производные по τ обращаются в нуль при $\tau \leq 0$.



Фиг. 2

Нетрудно видеть, что

$$F(r, q) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{K_{3/2}(rq) q^{-2}}{K_{3/2}'(q) + \lambda q K_{3/2}(q)}, \quad f(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_M F(r, q) e^{q\tau} dq \quad (2.12)$$

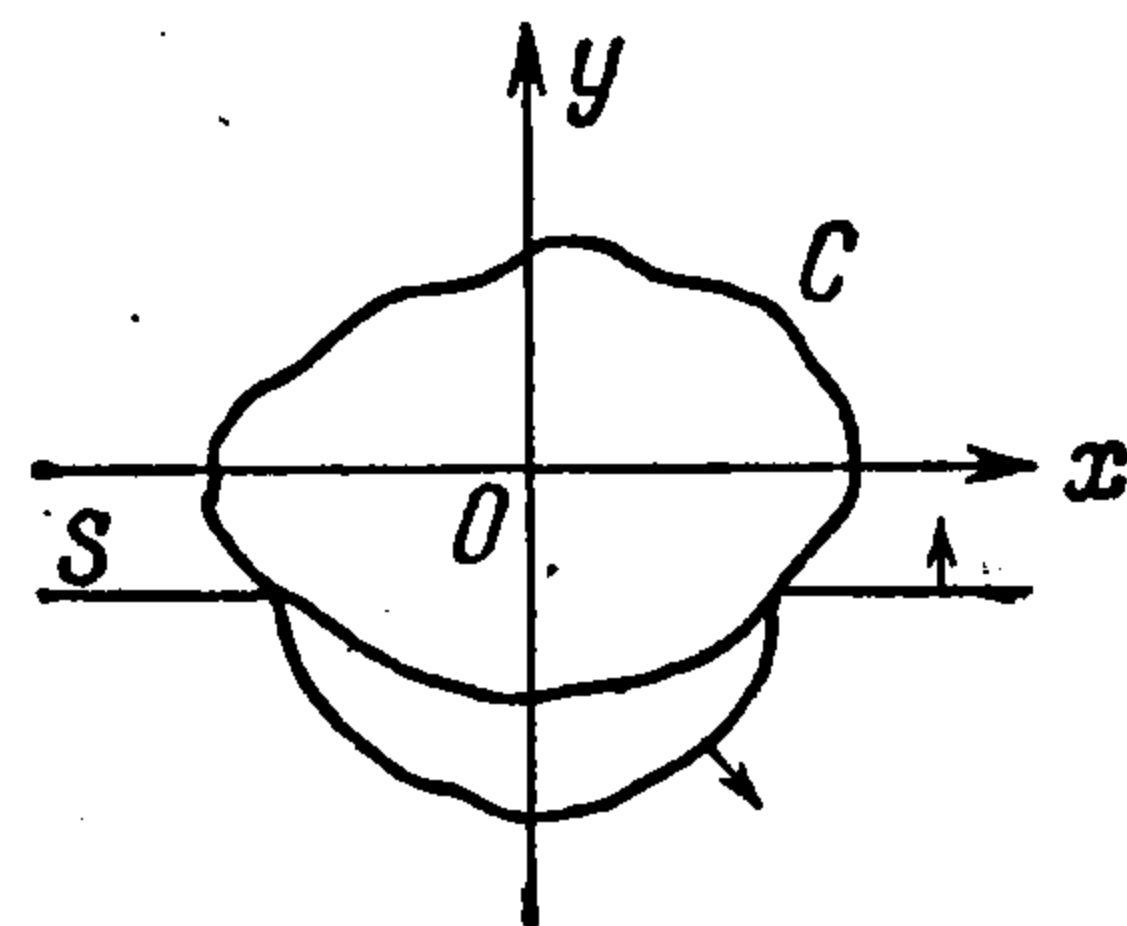
где $K_{3/2}(q)$ — сферическая функция Бесселя мнимого аргумента.

Подставив (2.12) в (2.9), получим выражение для $\Phi(r, \theta, \tau)$ при больших τ , после этого можно вычислить давление p и деформацию ε цилиндра.

При $\lambda = 0$ или $k = 0$ получим решение задачи дифракции на жесткой сфере.

§ 3. Рассмотрим дифракцию ударной волны на вытянутом эллипсоиде вращения. Введем сфероидальные координаты, положив

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi \\ y &= \frac{a_0}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi \\ z &= \frac{a_0}{2} \xi \eta \end{aligned}$$



Фиг. 3

где a_0 — безразмерное фокусное расстояние, и будем предполагать, что ударная волна распространяется вдоль оси z в положительном направлении.

Тогда опять в силу симметрии задачи потенциал Φ , удовлетворяющий волновому уравнению

$$\frac{4}{a_0^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] \right\} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \quad (3.1)$$

не будет зависеть от φ , причем Φ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{\alpha_0 a_0 \eta}{2} + \varepsilon_\tau'(\eta, \tau) \quad \text{при } \xi = 1, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad \text{и на } S^- \quad (3.2)$$

Поверхность эллипсоида соответствует значению $\xi = 1$.

В силу теоремы 1, как и в § 2, будем решать соответствующую вспомогательную задачу; для Φ при $\xi = 1$ можно получить интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\Phi(1, \eta_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} \left\{ \iiint_{T_1} \left[\Phi(1, \eta, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} V \right] d\eta d\varphi d\tau \right\} \quad (3.3)$$

Для сплюснутого эллипсоида вращения уравнение для Φ при $\xi = 1$ будет иметь почти тот же вид, что и уравнение (3.3), с той лишь разницей, что a_0 следует заменить на $-ia_0$ и $\xi = \text{ch } \mu$ на $i \text{sh } \mu$.

Примечание. Асимптотическое решение при больших τ трехмерных задач дифракции можно получить лишь для сферы (или для круга в плоских задачах).

§ 4. Рассмотрим плоскую нелинейную задачу дифракции слабой ударной волны около контура C произвольной формы (фиг. 3).

Будем предполагать, что поле течения за фронтом ударной волны является безвихревым изэнтропическим, что справедливо лишь при учете величин второго порядка интенсивности скачка. Введем потенциал скоростей Φ_1 плоского обтекания контура C . Тогда потенциал $\Phi = \Phi_1 / al$ с точностью до членов третьего порядка малости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = (n_0 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \tau} \right) \quad (4.1)$$

где a — скорость звука, l — характерный линейный параметр задачи, n_0 — показатель адиабаты, x, y — безразмерные координаты.

Граничные условия для Φ выражают:

- 1) непротекание газа через заданный контур C ,
- 2) непрерывность потенциала на фронте отраженной ударной волны.

Рассмотрим первое граничное условие.

Оно означает, что скорость частиц на контуре C равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C \quad (4.2)$$

Обозначим через $\Phi_0(x, y, \tau)$ потенциал скорости газа за скачком при $\tau < 0$. Тогда второе граничное условие можно записать в виде

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) \quad \text{на } S^- \quad \text{при } \tau > 0 \quad (4.3)$$

и равенство (4.3) переходит в тождество при $\tau \leq 0$. Для простоты положим, что

$$\Phi_0(x, y, \tau) = \alpha_0(y - \tau), \quad \alpha_0 = \frac{\Delta p}{\rho a^2} \quad (4.4)$$

где Δp — перепад давления на фронте падающей ударной волны, ρ — плотность невозмущенного газа. Положим

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0(x, y, \tau) + \Phi_1(x, y, \tau) + \Phi_2(x, y, \tau) + \dots \quad (4.5)$$

где Φ_i — величины i -го порядка малости. Подставляя (4.5) в (4.1), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\alpha_0 \frac{\partial y}{\partial n} \quad \text{на } C, \quad \Phi_1 = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad \text{и на } S^-$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} = (n_0 - 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} + 2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \tau} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial \tau} \right) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C, \quad \Phi_2 = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad \text{и на } S^- \quad (4.8)$$

Таким образом, задача дифракции свелась к решению систем (4.6) и (4.7) — (4.8) для потенциалов $\Phi_1(x, y, \tau)$ и $\Phi_2(x, y, \tau)$.

Линейная задача дифракции (4.6) решена [1], поэтому будем решать задачу дифракции во втором приближении.

Перейдем к решению системы (4.7) — (4.8).

Как и при решении линейной задачи дифракции [1] (т. е. при решении системы (4.6)), можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Задача дифракции слабой ударной волны на контуре C во втором приближении (4.7) — (4.8) эквивалентна вспомогательной внешней задаче обтекания сверхзвуковым $M = \sqrt{2}$ установившимся потоком идеального газа полого полубесконечного цилиндра по оси τ ($\tau \geq 0$) [1] под малым углом атаки α_0 во втором приближении, удовлетворяющей также системе (4.7) — (4.8) при $2n_1 = n_0 - 1$, где n_1 — показатель адиабаты вспомогательной задачи.

Заметим, что кривая пересечения поверхности полого цилиндра плоскостью $\tau = \tau_1$ соответствует части контура C при $\tau = \tau_1$, составляющей границу отраженной волны, или всему контуру C при $\tau_1 \geq \tau_2$, где τ_2 — время за которое падающая ударная волна полностью охватит контур C . Таким образом, будем решать вспомогательную внешнюю задачу, удовлетворяющую системе (4.7) — (4.8), причем возмущениями от внутренней поверхности будем пренебрегать.

При сверхзвуковых скоростях обтекания полого цилиндра задача отыскания решения уравнения (4.7) осложняется тем, что член, стоящий в правой части этого уравнения, вблизи поверхности цилиндра терпит разрыв. Это обусловлено тем, что решение линеаризованного уравнения (4.6) терпит разрыв на C , так как граничные условия для $\Phi_1(x, y, \tau)$ заданы на C . При решении уравнения (4.7) граничные условия для $\Phi_2(x, y, \tau)$ также должны задаваться на C , которая не должна лежать в поле течения. Очевидно, что кривая C лежит вне поля течения (является ее границей) и поэтому, в принципе, система (4.7) — (4.8) разрешима.

Систему (4.7) — (4.8) будем решать методом Вольтерра. Аналогично получим

$$\Phi_2(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \Phi_2(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial n} ds d\tau + \iiint_T F(\xi, \eta, \zeta) V d\xi d\eta d\zeta \right\} \quad (4.9)$$

Здесь $F(x, y, \tau)$ — правая часть уравнения (4.7); функция Вольтерра имеет вид

$$V = \ln \frac{(\tau_0 - \tau) + \sqrt{(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2}}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} \quad (4.10)$$

Интегрирование в (4.9) ведется по части поверхности Σ цилиндра, отсекаемой конусом влияния

$$(\tau_0 - \tau)^2 - (x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 = 0 \quad (4.11)$$

из произвольной точки (x_0, y_0, τ_0) и по объему T , заключенному внутри конуса влияния (4.11) и ограниченному поверхностью цилиндра Σ , частью волновой поверхности, отсекаемой конусом влияния (4.11), и поверхностью конуса влияния [1].

Устремляя точку (x_0, y_0, τ_0) к поверхности цилиндра в уравнении (4.9), получим интегральное уравнение для потенциала Φ_2 на поверхности цилиндра.

При решении задачи (4.7) — (4.8) предполагалось, что контур недеформируем.

Предположим, что контур деформируем и его деформация ε линейно зависит от давления $p(s, \tau)$ на C , т. е.

$$\varepsilon(s, \tau) = k [p(s, \tau) - p_0] \quad (4.12)$$

где k — коэффициент пропорциональности, s — длина дуги; условие (4.2) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \varepsilon'_\tau(s, \tau) \quad \text{на } C \quad (4.13)$$

Положим

$$\varepsilon(s, \tau) = \varepsilon_1(s, \tau) + \varepsilon_2(s, \tau) + \dots = k [p_1(s, \tau) + p_2(s, \tau) + \dots - p_0] \quad (4.14)$$

Если деформация $\varepsilon_1(s, \tau)$ известна [1], уравнение (4.9) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_0, y_0, \tau_0) = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\Phi_2(x, y, \tau) \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu} V \right] ds d\tau + \right. \\ & \left. + \iiint_T F(\xi, \eta, \zeta) V d\xi d\eta d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\lambda = -\rho a^2 k, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta \partial \tau} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} \right) \quad (4.16)$$

В частном случае, когда контур C — окружность, уравнение (4.9) или (4.15) имеет тот же вид. Для окружности, кроме того, можно построить асимптотическое решение системы (4.7) — (4.8), где одно из граничных условий можно заменить условием (4.13). На самом деле, при больших τ можно положить

$$\Phi_2(x, y, \tau) = f_1(r, \tau) + \cos 2\theta f_2(r, \tau) \quad (4.17)$$

где r и θ — полярные координаты.

Подставим (4.17) в (4.7), (4.8), (4.13) и к полученной системе применим преобразование Лапласа. Тогда $F_1(r, q)$ и $F_2(r, q)$ будут удовлетворять уравнениям (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} - q^2 F_1 = \Psi_0(r, q), & \quad \frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_2}{dr} - \left(q^2 + \frac{4}{r^2} \right) F_2 = \Psi_2(r, q) \\ \frac{dF_1}{dr} = \lambda q^2 F_1, & \quad \frac{dF_2}{dr} = \lambda q^2 F_2 \quad \text{при } r = 1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Функции $\Phi_2(x, y, \tau)$ и ее производные по τ должны исчезать при $\tau \leq 0$. Функции F_1, F_2 и Ψ_0, Ψ_2 представляют собой изображения функций f_1, f_2 и ψ_0, ψ_2 , полученные преобразованием Лапласа. При этом положено (4.20)

$$F(r, \theta, \tau) = \psi_0(r, \tau) + \cos 2\theta \psi_2(r, \tau), \quad \Phi_1(r, \theta, \tau) = \alpha_0 \sin \theta f_1(r, \tau)$$

Функция $f_1(r, \tau)$ считается известной [1].

Нетрудно видеть, что решение уравнений (4.18) имеет вид

$$\begin{aligned} F_1(r, q) = A_0(r, q) K_0(rq) + B_0(r, q) I_0(rq) \\ F_2(r, q) = A_2(r, q) K_2(rq) + B_2(r, q) I_2(rq) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь $I_i(rq)$ и $K_i(rq)$ ($i = 0$ или 2) — функции Бесселя мнимого аргумента и

$$A_i(r, q) = - \left\{ \int_r^\infty r \Psi_i(r, q) I_i(rq) dr + \frac{I_i'(q)}{K_i'(q) - \lambda q K_i(q)} \int_1^\infty r \Psi_i(r, q) I_i(rq) dr - \right.$$

$$\left. - \frac{K_i(q)}{K_i'(q) - \lambda q K_i(q)} \int_1^\infty r \Psi_i(r, q) K_i(rq) dr \right\}, B_i(r, q) = - \int_r^\infty r \Psi_i(r, q) K_i(rq) dr \quad (4.22)$$

Подставляя (4.20) в (4.17), получим

$$\varphi_2(r, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_M [F_1(r, q) + \cos 2\theta F_2(r, q)] e^{q\tau} dq \quad (4.23)$$

По найденному значению $\varphi_2(r, \theta, \tau)$ и по известному $\varphi_1(r, \theta, \tau)$ определим $p(\theta, \tau)$ на контуре и деформацию $\varepsilon(\theta, \tau)$ по формулам

$$p(\theta, \tau) = p_0 - \rho a^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right), \quad \varepsilon(\theta, \tau) = \lambda \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right) \quad (4.24)$$

В силу эквивалентности задач формулы (4.15), (4.23) дают решение задачи дифракции ударной волны на круге с учетом второго приближения. Формула (4.15) дает решение задачи дифракции также на произвольном контуре S .

Примечания. Можно показать, что пространственные задачи дифракции могут быть решены во втором приближении методом, аналогичным изложенному выше.

Поступила 25 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов И. Г. К теории дифракции слабых ударных волн около контуров произвольной формы. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
2. Hadamard J. Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy. Acta Math., 1908, vol. 31, 333.

О ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

М. П. Рябоконтъ

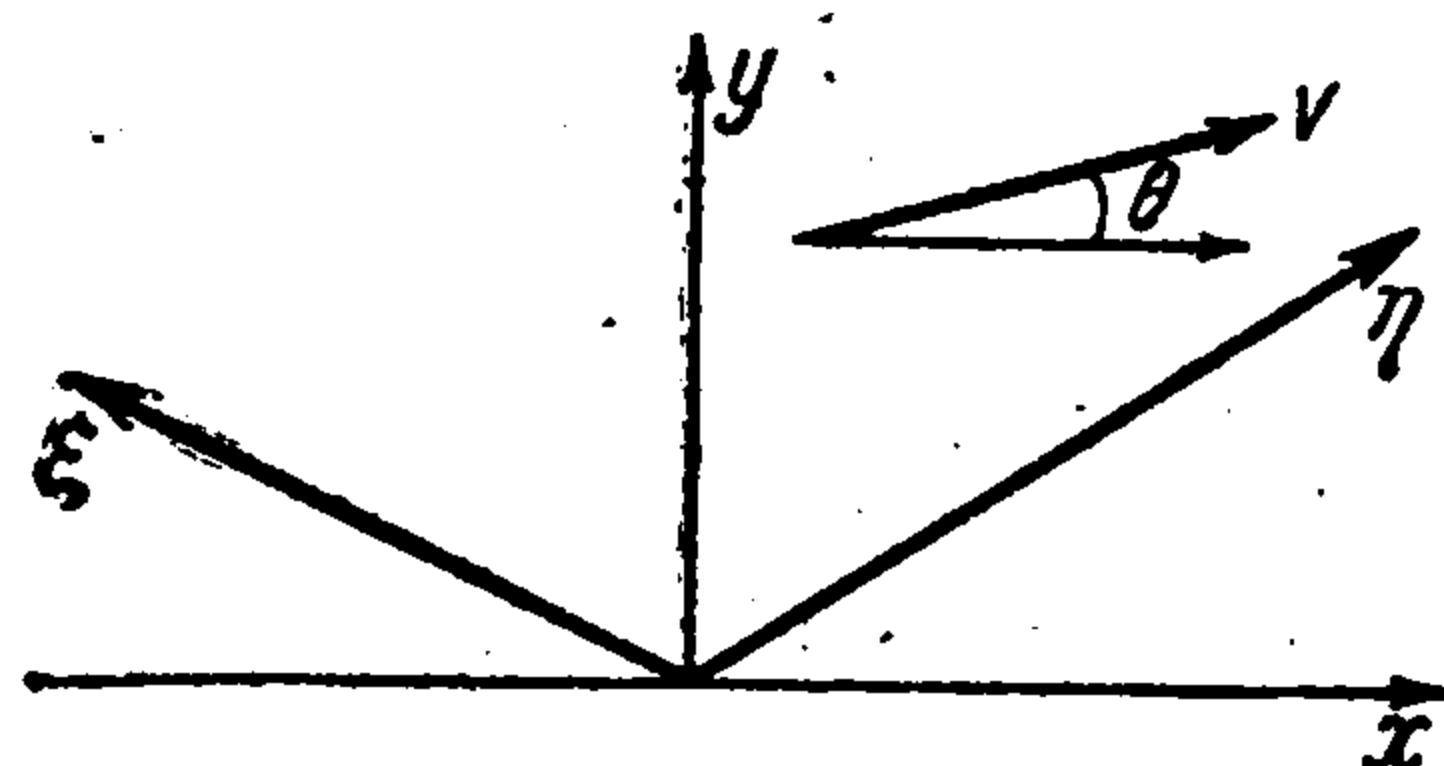
(Москва)

Рассматриваются сверхзвуковые течения газа вблизи оси сопел Лавалья, описываемые линеаризованными гиперболическими уравнениями второго порядка.

Получено выражение для определения формы линий тока в зависимости от распределения чисел M на оси сопла. Рассмотрено влияние разрывов начальных значений на поведение линий тока.

Решения не могут быть использованы для области перехода через скорость звука.

1. Уравнения характеристик сверхзвуковых осесимметричных безвихревых течений (фиг. 1) в характеристических координатах (η, ξ) имеют следующий вид:



$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} = 0 \quad \left(\sigma(M) = \int_{v^*}^v \operatorname{ctg} \mu \frac{dv}{v} \right) \quad (1.1)$$

Фиг. 1

Здесь μ — угол Маха, M — число Маха, v_* — критическая скорость, θ — угол наклона вектора скорости к оси x .

Характеристические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos(\mu + \theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\cos(\mu - \theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sin(\mu + \theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin(\mu - \theta) \quad (1.2)$$