ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

П. В. Харламов (Новосибирск)

Известны три интеграла уравнений Эйлера, описывающих движение тела, указанного в названии статьи, что дает принципиальную возможность понижения порядка уравнений движения с шестого до третьего, а при исключении независимой переменной — и до второго.

Предпринимались неоднократные попытки осуществить такое понижение. Однако, в ряде работ оно оказывалось неполным (например, полученная система имела четвертый порядок), либо проводилось при некоторых ограничениях (например, при требовании, чтобы эллипсоид инерции тела был эллипсоидом вращения), либо, наконец, требовало выполнения операций, результаты которых не могли быть выписаны явно в общем случае (например, решения алгебраического уравнения общего вида достаточно высокой степени).

В данной работе рассматриваемая задача в общем случае сведена к двум уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок. Наиболее простой вид эти уравнения приобретают в специальной прямоугольной системе координат, оси которой, вообще говоря, не совпадают с главными осями эллипсоида инерации тела для неподвижной точки. Попутно обобщены и уравнения Чаплыгина — Ковалевского — снято ограничение на положение центра тяжести тела.

§ 1. Понижение порядка уравнений Эйлера. В системе координат, неизменно связанной с телом, изменение с течением времени вектора $\mathbf{x}$ — момента количества движения тела относительно его неподвижной точки, и вектора $\boldsymbol{\gamma}$, имеющего направление силы тяжести и равного по величине произведению веса тела на расстояние между центром тяжести и неподвижной точкой, описывается уравнениями Эйлера [1]

$$d\mathbf{x} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}, \qquad d\boldsymbol{\gamma} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\mathbf{e}$ — орт луча, направленного из неподвижной точки в центр тяжести тела.

Понизим порядок уравнений (1.1), воспользовавшись известными интегралами

$$T - \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma} = h, \qquad \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\gamma} = m, \qquad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \gamma^2 \tag{1.2}$$

Здесь $T = {}^1/_2\, \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}$ — кинетическая энергия тела, h и m — постоянные интегрирования. Из первого уравнения (1.1) и первого интеграла (1.2) находим

$$\boldsymbol{\gamma} = (T - h)\, \mathbf{e} + (d\mathbf{x} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e} \tag{1.3}$$

Подставим (1.3) во второй и третий интегралы (1.2)

$$(d\mathbf{x} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\cdot(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) + (T - h)(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = m \qquad (d\mathbf{x}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 + (T - h)^2 = \gamma^2 \tag{1.4}$$

Кроме того, первое уравнение (1.1) дает

$$\mathbf{e}\, (d\mathbf{x} / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = 0 \tag{1.5}$$

Три уравнения (1.4), (1.5) определяют компоненты вектора $\mathbf{x}$ и не содержат $\boldsymbol{\gamma}$.

Если оси координат направить по главным осям эллипсоида инерции тела для неподвижной точки и обозначить проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{e}$ соответственно через p, q, r; Ap, Bq, Cr; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; e_1, e_2, e_3, то уравнения (1.1) и интегралы (1.2) записываются так

$$A dp / dt + (C - B)\, qr = e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2, \qquad d\gamma_1 / dt = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{1.6}$$
$$(123),\ (pqr),\ (ABC)$$

$${}^1/_2\, (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - e_i\gamma_i = h, \qquad Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = m, \qquad \gamma_i\gamma_i = \gamma^2 \tag{1.7}$$

Невыписанные уравнения получаются из (1.6) одновременной круговой перестановкой индексов и букв, указанных в скобках. В (1.7) по дважды входящему индексу проводится суммирование от 1 до 3. Такие сокращения записи приняты и в дальнейшем.

Запишем в главных осях уравнения (1.4), (1.5)

$$d / dt \, (Ape_1 + Bqe_2 + Cre_3) + (C - B)\, e_1 qr + (A - C)\, e_2 rp + (B - A)\, e_3 pq = 0$$

$$\begin{gathered}(Cre_2 - Bqe_3)\,[Adp / dt + (C - B)\, qr] + (Ape_3 - Cre_1)\,[Bdq / dt + (A - C)\, rp] + \\ + (Bqe_1 - Ape_2)\,[Cdr / dt + (B - A)\, pq] + \\ + (Ape_1 + Bqe_2 + Cre_3)\,[{}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - h] = m \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}[Adp / dt + (C - B)\, qr]^2 + [Bdq / dt + (A - C)\, rp]^2 + [Cdr / dt + (B - A)\, pq]^2 + \\ + [{}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - h]^2 = \gamma^2\end{gathered}$$

и формулы (1.3)

$$\begin{gathered}\gamma_1 = Be_3 dq/dt - Ce_2 dr/dt + [(A - B)\, e_2 q + (A - C)\, e_3 r]\, p + e_1\,[{}^1/_2\,(Ap^2 + \\ + Bq^2 + Cr^2) - h] \qquad (123),\ (pqr),\ (ABC)\end{gathered}$$

Удобнее воспользоваться специальной прямоугольной системой координат. Первую координатную ось проводим через центр тяжести тела, а вторую и третью направляем так, чтобы в выражении кинетической энергии тела, как квадратичной формы компонент вектора **x** отсутствовало произведение yz:

$$T = {}^1/_2\,(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + (b_1 y + b_2 z)\, x$$

(постоянные a, a_1, a_2, b_1, b_2 определяются распределением массы в теле). Тогда (1, 0, 0) — компоненты орта **e**;

$$\omega_1 = ax + b_1 y + b_2 z, \qquad \omega_2 = a_1 y + b_1 x, \qquad \omega_3 = a_2 z + b_2 x$$

для компонент вектора $\boldsymbol{\gamma}$ сохраним прежние обозначения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Уравнения (1.1) и интегралы (1.2) в специальных осях имеют вид

$$dx / dt = (a_2 - a_1)\, yz + (b_2 y - b_1 z)\, x \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}dy / dt = (a - a_2)\, xz + (b_1 y + b_2 z)\, z - b_2 x^2 - \gamma_3 \\ dz / dt = -(a - a_1)\, xy - (b_1 y + b_2 z)\, y + b_1 x^2 + \gamma_2\end{gathered} \tag{1.10}$$

$${}^1/_2\,(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + (b_1 y + b_2 z)\, x - \gamma_1 = h, \qquad x_i \gamma_i = m, \qquad \gamma_i \gamma_i = \gamma^2 \tag{1.11}$$

Уравнение (1.5) сводится к (1.9), а уравнения (1.4) записываются так

$$\begin{gathered}y\, dz / dt - z\, dy / dt + (y^2 + z^2)(b_1 y + b_2 z) + \\ + x\,[(a - {}^1/_2 a_1)\, y^2 + (a - {}^1/_2 a_2)\, z^2] + {}^1/_2 a x^3 - hx = m\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[(a_2 - a)\, xz - (b_1 y + b_2 z)\, z + b_2 x^2 + dy / dt]^2 + \\ + [(a_1 - a)\, xy - (b_1 y + b_2 z)\, y + b_1 x^2 - dz / dt]^2 + \\ + [{}^1/_2\,(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + (b_1 y + b_2 z)\, x - h]^2 = \gamma^2\end{gathered} \tag{1.12}$$

Решения, для которых $x = \text{const}$, система (1.9), (1.12) допускает лишь в случаях Лагранжа [2], Гесса [3], Бобылёва [4] — Стеклова [5] и при движениях тела с сохранением неподвижной оси. Оставляя эти случаи в стороне, выберем x в качестве независимой переменной, сводя задачу к двум уравнениям первого порядка

$$\begin{gathered}[(a_2 - a_1)\, yz + (b_2 y - b_1 z)\, x]\,(ydz / dx - zdy / dx) + (y^2 + z^2)(b_1 y + b_2 z) + \\ + x\,[(a - {}^1/_2 a_1)\, y^2 + (a - {}^1/_2 a_2)\, z^2] + {}^1/_2 a x^3 - hx - m = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\{[(a_2 - a_1)\, yz + (b_2 y - b_1 z)\, x]\, dy / dx + (a_2 - a)\, xz - (b_1 y + b_2 z)\, z + b_2 x^2\}^2 + \\ + \{[(a_1 - a_2)\, yz + (b_1 z - b_2 y)\, x]\, dz / dx + (a_1 - a)\, xy - (b_1 y + b_2 z)\, y + b_1 x^2\}^2 + \\ + [{}^1/_2\,(ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2) + (b_1 y + b_2 z)\, x - h]^2 - \gamma^2 = 0\end{gathered} \tag{1.13}$$

Уравнения (1.13) допускают перестановку величин y и z при одновременной перестановке индексов 1, 2.

Если из (1.13) найдена зависимость y и z от x, то из (1.9) квадратурой устанавливается зависимость t от x. Зависимость $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ от x дают формулы

$$\gamma_1 = {}^1/_2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)\, x - h$$

$$\gamma_2 = (a - a_1)\, xy + (b_1y + b_2z)\, y - b_1x^2 + [(a_2 - a_1)\, yz + (b_2y - b_1z)\, x]\, dz / dx$$

$$\gamma_3 = (a - a_2)\, xz + (b_1y + b_2z)\, z - b_2x^2 + [(a_1 - a_2)\, yz + (b_1z - b_2y)\, x]\, dy / dx$$

полученные из (1.10), (1.11), (1.9).

Указанные Гессом [3] уравнения следуют из (1.8). Аналогично, из (1.13) находим

$$\begin{aligned}(y^2 + z^2)\, [(a_2 - a_1)\, yz + (b_2y - b_1z)\, x]\, dy / dx = \\ = (y^2 + z^2)\, [(a - a_2)\, xz + (b_1y + b_2z)\, z - b_2x^2] + \\ + xz\, [{}^1/_2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)\, x - h] - mz + yR\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(y^2 + z^2)\, [(a_1 - a_2)\, yz + (b_1z - b_2y)\, x]\, dz / dx = \\ = (y^2 + z^2)\, [(a - a_1)\, xy + (b_1y + b_2z)\, y - b_1x^2] + \\ + xy\, [{}^1/_2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)\, x - h] - my - zR\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R^2 = (y^2 + z^2)\, \gamma^2 + 2mx\, [{}^1/_2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)\, x - h] - \\ - (x^2 + y^2 + z^2)\, [{}^1/_2 (ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2) + (b_1y + b_2z)\, x - h]^2 - m^2\end{aligned}$$

§ 2. Уравнения движения в косоугольных координатах. Свяжем неизменно с телом прямолинейную косоугольную систему координат с началом в неподвижной точке. Направленные по осям этой системы векторы $\text{э}_i\,(i = 1, 2, 3)$, вообще говоря, различные по модулю, образуют основной координатный базис.

Для векторов э^k взаимного базиса имеем формулу $\epsilon_{ijk}\text{э}^k = \text{э}_i \times \text{э}_j$, где

$$\epsilon_{ijk} = \text{э}_i \cdot (\text{э}_j \times \text{э}_k) \tag{2.1}$$

ϵ_{ijk} — тензор Леви — Чивита [6].

Определим вектор угловой скорости соотношением [7]

$$\omega^k = \frac{1}{2}\, \epsilon_{i\cdot\cdot}^{\cdot jk} \omega_{\cdot j}^{i\cdot} \qquad \left(\omega_{i\cdot}^{\cdot j} = \frac{d\text{э}_i}{dt} \cdot \text{э}^j - \text{тензор угловой скорости} \right)$$

Имеем $\omega_{\cdot j}^{i\cdot} = \epsilon_{\cdot jk}^{i} \omega^k$, и, дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{r} = r^i\text{э}_i$ точки тела, находим ее скорость $v^j = \epsilon_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot} r^i \omega^k$; после этого имеем вектор

$$\mathbf{x} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm \quad \text{или} \quad x_i = A_{is}\omega^s \qquad \left(A_{is} = \epsilon_{jki}\, \epsilon_{l\ s}^{\ k} \int r^l r^j dm\right)$$

где A_{is} — тензор инерции. Так как $\det |A_{is}| \neq 0$, то $\omega^s = a^{si}x_i$. Симметричный тензор a^{si} естественно назвать гирационным тензором. В уравнения

$$d\mathbf{x} / dt = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad d\boldsymbol{\gamma} / dt = 0$$

характеризующие изменение момента количества движения тела и постоянство вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе координат, подставим $\mathbf{x} = x_i\text{э}^i$, $\boldsymbol{\gamma} = \gamma^i\text{э}_i$, $\mathbf{e} = e^i\text{э}_i$; получим

$$dx_i / dt + \epsilon^j_{\ ik} a^{kl} x_l x_j = \epsilon_{kji} e^k \gamma^j \tag{2.2}$$

$$d\gamma^i / dt + \epsilon_{j\ k}^{\ i} a^{kl} x_l \gamma^j = 0 \tag{2.3}$$

Замкнутая система уравнений Эйлера имеет шестой порядок. Известны интегралы

$$ {}^1/_2 a^{ij} x_i x_j - e_i\gamma^i = h, \qquad x_i\gamma^i = m, \qquad \gamma_i\gamma^i = \gamma^2 \tag{2.4}$$

В дальнейшем неоднократно использовано вытекающее из (2.1) легко проверяемое соотношение

$$e^{imn}e_{ikj}u_{\cdot\cdot m}^{\cdot\cdot}w_{\cdot\cdot}^{k\cdot} = g_{\cdot j}^{n\cdot}u_{\cdot\cdot s}^{\cdot\cdot}w_{\cdot\cdot}^{s\cdot} - u_{\cdot\cdot j}^{\cdot\cdot}w_{\cdot\cdot}^{n\cdot} \qquad (g_{\cdot j}^{n} = \mathrm{э}^{n}\cdot\mathrm{э}_j \text{ — метрический тензор}) \quad (2.5)$$

справедливое для любых тензоров $u_{\cdot\cdot m}^{\cdot\cdot}$ и $w_{\cdot\cdot}^{k\cdot}$.

Умножая (2.2) на $e^{imn}e_m$, получаем, учитывая (2.5) и первый из интегралов (2.4),

$$\gamma^n = e^{imn}e_m\,(dx_i\,/\,dt + e^j_{\ ik}a^{kl}x_lx_j) + e^n\,({}^1\!/_2a^{is}x_ix_s - h) \qquad (2.6)$$

а при подстановке (2.6) во второй и третий интегралы (2.4) находим

$$e^{imn}e_mx_n\,(dx_i\,/\,dt + e^j_{\ ik}a^{kl}x_lx_j) + e^nx_n\,({}^1\!/_2a^{is}x_ix_s - h) = m$$

$$g^{is}\,(dx_i\,/\,dt + e^j_{\ ik}a^{kl}x_lx_j)\,(dx_s\,/\,dt + e^p_{\ sm}a^{mn}x_nx_p) + ({}^1\!/_2a^{sp}x_sx_p - h) = \gamma^2 \qquad (2.7)$$

Совместно с уравнением

$$e^i\,(dx_i\,/\,dt + e^j_{\ ik}a^{kl}x_lx_j) = 0 \qquad (2.8)$$

получающимся из (2.2), уравнения (2.8) составляют систему третьего порядка.

Подставим теперь (2.6) в (2.3)

$$e^{jki}e_kd^2x_i\,/\,dt^2 + (2g^{il}a^{ks} + g^{is}a^{kl} - g^{ks}a^{il} - g^{kl}a^{is})\,e_kx_sdx_l\,/\,dt +$$

$$+\, e_{j\ n}^{\ i}a^{nm}\,({}^1\!/_2a^{sl}g^{kj} + g^{js}a^{kl})\,e_kx_mx_sx_l - he_{j\ k}^{\ i}a^{kl}e^jx_l = 0 \qquad (2.9)$$

Определитель $|\,e^{jki}e_k\,|$ равен нулю, и, следовательно, некоторая линейная комбинация уравнений (2.9) не содержит вторых производных. Умножая (2.9) на e_i, приходим к уравнению (2.8), которое с двумя из уравнений (2.9) составляет систему пятого порядка.

§ 3. Понижение порядка уравнений движения до второго. Уравнения (2.7), (2.8) записаны в произвольной системе координат. Теперь же первую координатную ось проведем через центр тяжести тела. При этом $e^1 = e$, $e^2 = e^3 = 0$, $e_i = g_{i1}e$, и уравнение (2.8) записывается так

$$dx_1\,/\,dt + \sqrt{g}\,(g^{3j}a^{2l} - g^{2j}a^{3l})\,x_jx_l = 0 \qquad (3.1)$$

где $g = \det\,|\,g_{ij}\,|$. Оставляя в стороне известные решения, отмеченные в § 1, для которых $x_1 = \mathrm{const}$, исключим при помощи (3.1) переменную t из (2.7), воспользовавшись при этом соотношением $\in^j_{\ 1k}a^{kl} = \sqrt{g}\,(g^{3j}a^{2l} - g^{2j}a^{3l})$ (123), уже примененным при выводе уравнения (3.1). Получаем

$$[(g_{31}x_1 - g_{11}x_3)\,dx_2\,/\,dx_1 - (g_{21}\,x_1 - g_{11}x_2)\,dx_3\,/\,dx_1]\,(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_l +$$

$$+\,[(g_{31}x_1 - g_{11}x_3)\,(g^{1j}a^{3l} - g^{3j}a^{1l}) + (g_{21}x_1 - g_{11}x_2)\,(g^{1j}a^{2l} - g^{2j}a^{1l})]\,x_jx_l +$$

$$+\,x_1\,({}^1\!/_2a^{jl}x_jx_l - h) - m/e = 0 \qquad (3.2)$$

$$g^{22}\,[(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_ldx_2\,/\,dx_1 + (g^{1j}a^{3l} - g^{3j}a^{1l})\,x_jx_l]^2 +$$

$$+\,g^{33}\,[(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_ldx_3\,/\,dx_1 + (g^{2j}a^{1l} - g^{1j}a^{2l})\,x_jx_l]^2 +$$

$$+\,2g^{23}\,[(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_ldx_2\,/\,dx_1 +$$

$$+\,(g^{1j}a^{3l} - g^{3i}a^{1l})\,x_jx_l]\,[(g^{2i}a^{3k} - g^{3i}a^{2k})\,x_ix_kdx_3\,/\,dx_1 + (g^{2i}a^{1k} - g^{1i}a^{2k})\,x_ix_k] +$$

$$+\,({}^1\!/_2\,a^{ik}x_ix_k - h)^2 - \gamma^2 = 0$$

Итак, за исключением случаев $x_1 = \mathrm{const}$ задача о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, сведена к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (3.2), каждое из которых имеет первый порядок.

Определив из этих уравнений x_2 и x_3 в зависимости от x_1, установим квадратурой связь между x_1 и t и из (3.1)

Величины γ^i находим затем без интегрирования по формулам (2.7), которые в данном случае принимают вид

$$\frac{\gamma^1}{e} = \left(g_{31}\frac{dx_2}{dx_1} - g_{21}\frac{dx_3}{dx_1}\right)(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_l + \left(\frac{1}{2}a^{jl} + a_1{}^l g^{1j}\right)x_jx_l - h$$
$$\gamma^2 = g_{11}e\left[(g^{2j}a^{3l} - g^{3j}a^{2l})\,x_jx_l\frac{dx_3}{dx_1} + (g^{2j}a^{1l} - g^{1j}a^{2l})\,x_jx_l\right] \quad (23) \qquad (3.3)$$

При переходе к специальной прямоугольной системе координат уравнения (3.1), (3.2), (3.3) сведутся к (1.10), (1.13), (1.14). Одно из уравнений (2.9) совпадает с (1.10), а остальные два после исключения переменной t записываются так

$$[(a_2 - a_1)\,yz + (b_2y - b_1z)\,x]\,\frac{d}{dx}\,[(a_2 - a_1)\,yz + (b_2y - b_1z)\,x]\,\frac{dy}{dx} -$$
$$- [(a_2 - a_1)\,yz + (b_2y - b_1z)\,x]\left\{[(2a - a_2)\,x + 3b_2z + 2b_1y]\,\frac{dz}{dx} + b_1z\frac{dy}{dx}\right\} +$$
$$+ (\tfrac{1}{2}a_1{}^2 - b_1{}^2)\,y^3 - 2b_1b_2y^2z + [(a - a_2)(a_1 - a_2) + \tfrac{1}{2}a_1a_2 - b_2{}^2]\,yz^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}b_1(5a_1 - 4a)\,xy^2 + 3b_2(a_2 - a_1)\,xyz + \tfrac{1}{2}b_1(2a - a_2)\,xz^2 +$$
$$+ \{x^2\,[2\,(b_1{}^2 + b_2{}^2) - \tfrac{1}{2}a\,(2a - 3a_1)] - ha_1\}\,y + \tfrac{3}{2}ab_1x^3 - hb_1x = 0 \quad (12),\ (yz) \qquad (3.4)$$

Очевидно, (1.13) — первые интегралы уравнений (3.4). В частности, если центр тяжести тела находится на одной из главных осей гирационного эллипсоида, (3.4) дают уравнения Чаплыгина [8] — Ковалевского [9]. Действительно, полагая $b_1 = b_2 = 0$, $a = 1/A$, $a_1 = 1/B$, $a_2 = 1/C$, $x = Ap$, $y = Bq$, $z = Cr$, получаем из (3.4)

$$\frac{B}{A}(B - C)^2\left(r^2\frac{d^2q^2}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dp}\frac{dq^2}{dp}\right) - (B - C)(2C - A)\,p\frac{dr^2}{dp} +$$
$$+ Aq^2 + [2\,(C - A)(C - B) + AC]\,r^2 + A\,(3A - 2B)\,p^2 - 2hA = 0 \quad (qr),\ (BC)$$

Если теперь ввести новые переменные

$$\sigma = \frac{B - C}{A}\,q^2, \qquad \tau = \frac{B - C}{A}\,r^2$$

то получим уравнения Ковалевского. Уравнения Чаплыгина получим при

$$q^2 = \frac{A}{B}\frac{C - A}{B - C}\,p^2 - \frac{2}{B}\,\tau, \qquad r^2 = \frac{A}{C}\frac{A - B}{B - C}\,p^2 + \frac{2}{C}\,\sigma$$

Поступила 17 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Динамика твердого тела в работах Эйлера. Сб. Леонард Эйлер. Изд. АН СССР, 1959.
2. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Гостехиздат, 1950, т. II.
3. Hess W. Über die Euler'shen Bewegungsgleichungen und über neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Math. Annalen, 1890. Bd. 37.
4. Бобылев Д. Н. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тр. Отд. физич. наук Об-ва любит. естествозн., т. VIII, вып. 2, 1896.
5. Стеклов В. А. Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Отд. физич. наук Об-ва любит. естествозн., т. VIII, вып. 2, 1896.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
7. Кильчевский Н. А. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. Гостехиздат, 1954.
8. Сретенский Л. Н. О работах С. А. Чаплыгина по теоретической механике. Собр. соч. С. А. Чаплыгина. Гостехиздат, 1950, т. III.
9. Kowalewski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers un einen festen Punkt. Math. Annalen, 1908, Bd. 65.