К УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ГИРОСТАТА

Н. Н. Колесников

(Москва)

Методы решения задач об устойчивости движений гиростата с неподвижной точкой, представляющего собой твердое тело с жидким наполнением [1], оказалось возможным распространить на свободные гиростаты, движущиеся в ньютоновском поле сил [2].

Ниже рассматривается подобная задача для гиростата, составленного из некоторого твердого тела T_1 и роторов T_2, оси которых неподвижны относительно основного тела T_1. Трением на оси роторов и другими диссипативными эффектами пренебрегается. Общая теория и устойчивость по Ляпунову движений таких гиростатов, имеющих одну неподвижную точку, хорошо исследованы, например, в [1]. Здесь получены достаточные условия устойчивости одного частного решения уравнений движения свободного гиростата в ньютоновском поле сил.

1. Выберем начало 0 неподвижной декартовой системы координат ξ, η, ζ в гравитирующем центре. С гиростатом, движущимся в этом ньютоновском центральном поле сил, жестко свяжем подвижную систему x, y, z, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции гиростата.

Пусть A, B и C — главные центральные моменты инерции гиростата, M — его масса.

Рассматриваемую механическую систему, состоящую из твердого тела — оболочки T_1 и симметричных роторов T_2, будем обозначать одной буквой T.

Момент количеств движений системы T относительно 0 равен

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{K} \qquad \left(R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\ V^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс системы, $\mathbf{V}$ — его скорость, $\mathbf{K}$ — момент количеств движений гиростата в его движении относительно кениговых осей. Из условий задачи ясно, что относительно этих осей имеет место теорема о моменте количества движения. Но

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_T + \mathbf{K}_2$$

где $\mathbf{K}_T$ — момент количества движения всей системы T, рассматриваемой как одно твердое тело, а $\mathbf{K}_2$ — момент количеств относительных движений T_2.

Если проекции вектора мгновенной угловой скорости ω тела T_1 на подвижные оси p, q, r, то составляющими вектора $\mathbf{K}_T$ на те же оси будут величины

$$Ap,\ Bq,\ Cr$$

Проекции K_2 на x,y, z обозначим через k_1, k_2, k_3.

Пусть τ_1, τ_2,τ_3 — направляющие косинусы R в системе x, y, z, а направляющие косинусы между осями систем координат ξ, η, ζ и x, y, z определяются табличкой, приведенной справа.

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Уравнения движения рассматриваемой материальной системы по теореме о движении центра масс и о моменте количеств движения относительно кениговой системы имеют следующий вид:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \qquad (\xi\ \eta\ \zeta) \tag{1.1}$$

$$A\frac{dp}{dt} + \frac{dk_1}{dt} + (C - B)\,qr + qk_3 - rk_2 = L_x \qquad (p\ q\ r,\ 1,\ 2,\ 3,\ ABC,\ xyz) \tag{1.2}$$

Здесь символы в скобках показывают, что остальные два уравнения (1.1) и (1.2) получаются круговой перестановкой указанных букв; L_x, L_y, L_z — моменты ньютоновских сил, действующих на систему T, относительно соответствующих осей.

Учитывая, что для реальных механических систем отношение их характерного размера к R есть величина порядка $10^{-4} \div 10^{-6}$, ньютоновский потенциал или функцию сил U можно записать так [3]:

$$U = \frac{\mu M}{R} - \frac{3\mu}{2R^3}\left(A\tau_1^2 + B\tau_2^2 + C\tau_3^2 - \frac{A+B+C}{3}\right) \tag{1.3}$$

Теперь

$$L_x = \frac{3\mu}{R^3}(C - B)\,\tau_3\tau_2, \qquad L_y = \frac{3\mu}{R^3}(A - C)\,\tau_1\tau_3, \qquad L_z = \frac{3\mu}{R^3}(B - A)\,\tau_2\tau_1 \tag{1.4}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \alpha_1 \frac{\xi}{R} + \beta_1 \frac{\eta}{R} + \gamma_1 \frac{\zeta}{R} \\ \tau_2 &= \alpha_2 \frac{\xi}{R} + \beta_2 \frac{\eta}{R} + \gamma_2 \frac{\zeta}{R} \\ \tau_3 &= \alpha_2 \frac{\xi}{R} + \beta_3 \frac{\eta}{R} + \gamma_3 \frac{\zeta}{R} \end{aligned} \tag{1.5}$$

и U зависит от всех направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$. Компоненты L_x, L_y, L_z вектора гравитационного момента, действующего на систему T, определяются в виде функций либо от τ_1, τ_2, τ_3, либо от α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ по известным формулам [4] или непосредственно с помощью (1.4) и (1.5). Система уравнений (1.1), (1.2) должна быть дополнена известными кинематическими уравнениями Пуассона для направляющих косинусов и уравнениями относительного движения тел T_2. В данном случае уравнения относительного движения должны иметь вид уравнений движения твердого тела с неподвижной осью.

2. Исследуем частный случай: движение свободного симметричного гиростата,

$$A = C, \qquad k_1 = k_3 = 0, \qquad k_2 = k(t) \tag{2.1}$$

где $k(t)$ — ограниченная непрерывная функция времени.

При этом (1.3) обращается в

$$U = \frac{\mu M}{R} - \frac{3\mu}{2R^3}\left[(B - A)\,\tau_2^2 - \frac{(B - A)}{3}\right] \tag{2.2}$$

а уравнения движения системы принимают следующий вид:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (A - B)\,qr - rk(t) = \frac{3\mu}{R^3}(A - B)\,\tau_3\tau_2 \\ &B\frac{dq}{dt} + \frac{dk(t)}{dt} = 0 \\ &A\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + pk(t) = \frac{3\mu}{R^3}(B - A)\,\tau_2\tau_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $k(t)$ считается известной функцией времени, что и позволяет, вместе с уравнениями Пуассона для направляющих косинусов, считать систему замкнутой. Уравнения движения свободного гиростата рассматриваемого типа в ньютоновском поле сил с потенциалом (2.2) при условиях (2.1) допускают несколько первых интегралов.

Из второго уравнения (2.4) следует очевидный интеграл

$$Bq + k(t) = H = \text{const} \tag{2.5}$$

Домножим уравнения (2.3) последовательно на $d\xi / dt$, $d\eta / dt$, $d\zeta / dt$, (2.4) на p, q, r, затем сложим их и проинтегрируем. Принимая во внимание (1.5) и кинематические уравнения Пуассона для α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$, получим интеграл живых сил:

$$M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] + A\,(p^2 + r^2) - 2U = \text{const} \tag{2.6}$$

где U имеет вид (2.2).

Другой интеграл легко получить, проектируя вектор момента количеств движения T относительно 0 на ось ζ, которую, не нарушая общности, можно считать перпендикулярной плоскости орбиты. Этот первый интеграл имеет вид

$$M\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)+Ap\gamma_1+(Bq+k(t))\gamma_2+Ar\gamma_3=\text{const} \tag{2.7}$$

Кроме того, имеют место тривиальные соотношения

$$\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2=1, \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \tag{2.8}$$

Интегралы (2.6) и (2.7) при введении сферических координат центра масс системы и учете (2.5) запишутся следующим образом:

$$M\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+R^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+R^2\cos^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]+A(p^2+r^2)-2U=\text{const}$$

$$MR^2\cos^2\psi\frac{d\varphi}{dt}+A(p\gamma_1+q\gamma_3)+H\gamma_2=\text{const} \tag{2.9}$$

3. Уравнения движения (2.3), (2.4) вместе с кинематическими уравнениями Пуассона допускают частное решение

$$\begin{gathered}
p=r=0, \qquad q=B^{-1}(H-k(t)) \\
\gamma_1=\gamma_3=0, \quad \gamma_2=1; \qquad R=R_0, \qquad dR/dt=0 \\
\psi=0, \qquad d\psi/dt=0, \qquad \varphi=\omega t+\varphi_0, \qquad d\varphi/dt=\omega=\text{const} \\
\tau_2=0, \qquad \tau_1=\sin\Omega(t) \qquad \tau_3=\cos\Omega(t), \qquad d\Omega/dt=\omega-q(t)
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Движение гиростата, отвечающее этому решению, состоит в том, что центр масс системы двигается по круговой орбите радиуса R_0 с постоянной угловой скоростью ω, а гиростат вращается вокруг оси симметрии, остающейся перпендикулярной плоскости орбиты, с угловой скоростью q, причем ротор совершает заданное движение, так что $Bq+k(t)=H=\text{const}$. Задача состоит в исследовании устойчивости по Ляпунову указанного невозмущенного движения по отношению к группе переменных:

$$p,\ r,\ H,\ \tau_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ R,\ dR/dt,\ \psi,\ d\psi/dt,\ d\varphi/dt \tag{3.2}$$

4. Пусть

$$p,\ r,\ H+x,\ \tau_2,\ \gamma_1,\ \gamma_3,\ \gamma_2=1+x_2,\quad R=R_0+x_3$$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dx_3}{dt}=\dot{x}_3,\qquad \psi,\ \frac{d\psi}{dt}=\dot{\psi},\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}=\omega+\frac{dx_4}{dt}=\omega+\dot{x}_4$$

представляют собой обозначение исследуемых на устойчивость переменных задачи в возмущенном движении. Тогда уравнения возмущенного движения гиростата с одним ротором в ньютоновском поле сил при условиях (2.1) допускают интегралы

$$\begin{aligned}
V_1={}&MR_0^2\dot{\psi}^2+M\dot{x}_3^2-MR_0^2\omega^2\psi^2+\Big(2MR_0\omega^2+\\
&+\frac{2\mu M}{R_0^2}+\frac{6(B-A)\mu}{R_0^4}\Big)x_3+\left(M\omega^2-\frac{2\mu M}{R_0^3}-\frac{6(B-A)\mu}{R_0^5}\right)x_3^2+\\
&+4MR_0\omega x_3\dot{x}_4+MR_0^2\dot{x}_4^2+2MR_0\dot{x}_4+\frac{3\mu(B-A)}{R_0^3}\tau_2^2+A(p^2+r^2)+o(3)=\text{const}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2={}&MR_0^2\dot{x}_4+2MR_0\omega x_3+2MR_0x_3\dot{x}_4+M\omega x_3^2-MR_0^2\omega\psi^2+A(p\gamma_1+r\gamma_3)+\\
&+Hx_2+x_1+x_1x_2+o(3)=\text{const}
\end{aligned}$$

$$V_3=x_1=\text{const},\quad V_4=\gamma_1^2+\gamma_3^2+x_2^2+2x_2$$

Здесь $o(3)$ означает члены не ниже третьего порядка малости относительно возмущений. Устойчивость рассматриваемого невозмущенного движения исследуем прямым методом Ляпунова. Для этого рассмотрим функцию переменных (3.2), построенную по методу [5] Н. Г. Четаева в виде связки первых интегралов уравнений движения рассматриваемой задачи

$$W = V_1 - 2\omega (V_2 - V_3) + H\omega V_4 + \lambda_1 V_2^2 + \lambda_2 V_3^2 = MR_0^2\dot{\psi}^2 + M\dot{x}_3^2 + MR_0^2\omega^2\psi^2 +$$

$$+ (MR_0^2 + \lambda_1 M^2 R_0^4)\dot{x}_4^2 + 4\lambda_1 M^2 R_0^3 \omega x_3 \dot{x}_4 + \left(4\lambda_1 M^2 R_0^2\omega^2 - 3M\omega^2 - \frac{3(B-A)\mu}{R_0^2}\right) x_3^2 +$$

$$+ \frac{3(B-A)\mu}{R_0^3}\tau_2^2 + Ap^2 - 2\omega Ap\gamma_1 + H\omega\gamma_1^2 + Ar^2 - 2\omega Ar\gamma_3 +$$

$$+ H\omega\gamma_3^2 + (-2\omega + 2H\lambda_1) x_1 x_2 + (H\omega + \lambda_1 H^2) x_2^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_1^2 +$$

$$+ 2\lambda_1 MR_0^2 H x_2 \dot{x}_4 + 2\lambda_1 MR_0^2 x_1 \dot{x}_4 + 4\lambda_1 MR_0 H\omega x_2 x_3 + 4\lambda_1 MR_0\omega x_1 x_3 \qquad (4.1)$$

В данной квадратичной форме λ_1 и λ_2 — постоянные. Согласно критерию Сильвестра для определенной положительности квадратичной функции W достаточно и необходимо выполнения следующих неравенств:

$$B > A, \qquad H > A\omega \qquad (4.2)$$

и также положительности всех главных диагональных миноров определителя

$$\| c_{ij} \| \quad (c_{ij} = c_{ji}) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$c_{11} = \lambda_1 MR_0^2\omega^2 - 3M\omega^2 - \frac{3(B-A)\mu}{R_0^5}; \qquad c_{12} = 2\lambda_1 M^2 R_0^3\omega$$

$$c_{13} = 2\lambda_1 MR_0 H\omega, \quad c_{14} = 2\lambda_1 MR_0\omega, \quad c_{22} = MR_0^2 + \lambda_1 M^2 R_0^4$$

$$c_{23} = \lambda_1 MR_0^2 H, \qquad C_{24} = \lambda_1 MR_0^2, \qquad c_{33} = H\omega + \lambda_1 H^2$$

$$c_{34} = -\omega + \lambda_1 H, \qquad c_{44} = \lambda_1 + \lambda_2$$

Последним требованиям можно удовлетворить выбором постоянных λ_1 и λ_2 при условии $H < MR_0^2\omega / 3$, что выполняется заведомо для всех практически рассматриваемых случаев.

Следовательно, при выполнении условий (4.2) и соответствующем подборе констант λ_1, λ_2 квадратичная форма (4.1) будет определенно положительной относительно всех входящих в нее переменных, поэтому она может служить функцией Ляпунова в данном случае, так как $dW / dt = 0$ в силу уравнений возмущенного движения.

Согласно же теореме Ляпунова об устойчивости из сказанного следует устойчивость невозмущенного движения гиростата с одним ротором, собственный момент количества движения которого удовлетворяет условию

$$Bq + k(t) - A\omega > 0$$

Полученное неравенство показывает, что такой гиростат как бы вращается по орбите как твердое тело с измененным главным моментом инерции, равным H / ω, тоже удовлетворяющим неравенству $H / \omega > A$. При $k(t) = 0$, $q = \omega$ имеем единственное условие $B > A$.

Поступила 9 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
2. Колесников Н. Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.
3. Белецкий В. В. О вибрации спутника. Сб. «Искусственные спутники Земли». Изд-во АН СССР, 1959, вып. 3.
4. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.