ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский (Москва)

Рассмотрим задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском центральном поле сил в предположении, что неподвижная точка закреплена на расстоянии R от притягивающего центра.

Предполагая, что расстояние R велико по сравнению с размерами тела, представим [1] силовую функцию $U(\gamma, \gamma', \gamma'')$ с точностью до постоянного слагаемого в виде ряда по степеням R^{-1}

$$\begin{aligned} U(\gamma, \gamma', \gamma'') = &- Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') - {}^3/_2 g(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)R^{-1} + \\ &+ {}^3/_2 g\,[(J_{xxx} + J_{xyy} + J_{xzz})\gamma + (J_{yyy} + J_{yxx} + J_{yzz})\gamma' + (J_{zzz} + J_{zxx} + J_{zyy})\gamma'']R^{-2} - \\ &- {}^5/_2 g\,[J_{xxx}\gamma^3 + J_{yyy}\gamma'^3 + J_{zzz}\gamma''^3 + 6J_{xyz}\gamma\gamma'\gamma'' + 3(J_{yxx}\gamma'\gamma^2 + J_{zxx}\gamma''\gamma^2 + J_{xyy}\gamma\gamma'^2 + \\ &+ J_{xzz}\gamma\gamma''^2 + J_{zyy}\gamma''\gamma'^2 + J_{yzz}\gamma'\gamma''^2)]R^{-2} + (\ldots)R^{-3} \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$J_{xyz} = \iiint\limits_V xyz\,\rho dv$$

Обозначим через $U_n(\gamma, \gamma', \gamma'')$ выражение (I), в котором отброшены члены порядка выше R^{-n}. Тогда получим приближенные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле сил

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = \gamma''\frac{\partial U_n}{\partial \gamma'} - \gamma'\frac{\partial U_n}{\partial \gamma''}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \begin{pmatrix} ABC \\ pqr \\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} \tag{2}$$

переходящие при $n = 0$ в уравнения обычной задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле сил тяжести.

Отметим, что вторые части уравнений (2) представляют многочлены, а первые интегралы этих уравнений

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U_n(\gamma, \gamma', \gamma'') = C_1 \tag{3}$$

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2, \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

будут алгебраическими. Кроме того, система уравнений (2) не содержит явно время t и имеет последний множитель Якоби равный единице. Таким образом, общие свойства уравнений (2) и их первых интегралов при $n > 0$ совпадают с соответствующими общими свойствами уравнений (2) и их первых интегралов при $n = 0$.

Как известно [2], для уравнений классической задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки имеет место следующая теорема: четвертый алгебраический интеграл существует в тех и только в тех случаях (в случае Эйлера, в случае Лагранжа, в случае Ковалевской), в которых имеются однозначные на всей плоскости комплексного переменного t общие решения для $p, \ldots, \gamma''$.

Возникает вопрос, имеет ли место эта теорема для уравнений (2) и при $n > 0$.

Рассмотрим уравнения (2) при $n = 1$. В работах [3, 4] было показано, что для этих уравнений четвертый алгебраический интеграл существует только в двух случаях, аналогичных случаям Эйлера и Лагранжа для системы (2) при $n = 0$. Из работы [5] следует, что отыскание всех случаев, когда интегралы дифференциальных уравнений (2) при $n = 1$ однозначны, не приводит к новым случаям, а сводится к исследованию решений в указанных выше двух случаях.

Однако на основании решений, найденных в этих случаях Коббом [6], Е. И. Харламовой [7], В. В. Белецким [8], не удалось до настоящего времени полностью выяснить вопрос об однозначности получаемого общего интеграла задачи. Все же есть некоторые основания полагать, что и в этих двух случаях будут существовать однозначные общие решения для $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ и указанная выше теорема будет иметь место для уравнений (2) при $n = 1$.

Рассмотрим уравнения (2) при $n = 2$ и покажем, что эта теорема не имеет места. Возьмем твердое тело, удовлетворяющее условиям

$$x_0 = y_0 = 0, \qquad A = B, \qquad J_{zxx} = J_{zyy}, \qquad J_{zzz} - 3J_{zxx} = l \neq 0$$
$$J_{xxx} = J_{yyy} = J_{xyz} = J_{yxx} = J_{xyy} = J_{yzz} = J_{xzz} = 0$$

(Таким твердым телом будет, например, прямой однородный круговой цилиндр радиуса r и высоты h_1 ($h_1 \neq {}^1/_2 \sqrt{6}r$), закрепленный в центре основания.)

В этом случае выражение для функции U_2 на основании формулы (I) будет

$$U_2(\gamma'') = -Mgz_0\gamma'' - {}^3/_2 g(C-A)\gamma''^2 R^{-1} + {}^3/_2 gl\gamma'' R^{-2} - {}^5/_2 gl\gamma''^3 R^{-2} \tag{4}$$

и первые три уравнения системы (2) примут вид

$$\frac{dp}{dt} - mqr_0 = -\gamma'\varphi, \qquad \frac{dq}{dt} + mpr_0 = \gamma\varphi, \qquad \frac{dr}{dt} = 0$$
$$\left(m = \frac{A-C}{A}, \quad \varphi = \frac{1}{A}\frac{\partial U_2}{\partial \gamma''} = \varphi(\gamma'')\right) \tag{5}$$

Уравнения (5) имеют четвертый интеграл $r = r_0$, который вместе с тремя первыми интегралами (3), переписанными в виде

$$p^2 + q^2 - \frac{2U_2}{A} = h, \qquad p\gamma + q\gamma' - (m-1)r_0\gamma'' = k, \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{6}$$

позволяет получить для определения величины γ'' следующее соотношение [1]

$$\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2 = (1 - \gamma''^2)\left[h + \frac{2U_2(\gamma'')}{A}\right] - [k + (m-1)r_0\gamma'']^2 \equiv P(\gamma'') \tag{7}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$t - t_0 = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{P(\gamma'')}} \tag{8}$$

Обращение этого интеграла (8) дает зависимость γ'' от времени, т. е. общее решение для γ''. Но из формул (4) и (7) и условия $l \neq 0$ вытекает, что $P(\gamma'')$ будет полиномом пятой степени от γ'', т. е. интеграл (8) будет гиперэллиптическим интегралом, обращение которого [9] не дает однозначной функции.

Таким образом, при $n = 2$ существование четвертого общего алгебраического интеграла не влечет за собой однозначности получаемого общего интеграла. Проведя аналогичные рассуждения, легко видеть, что это обстоятельство будет иметь место и для всех $n > 2$, если рассматривать такие тела, для которых $U_n = U_n(\gamma'')$.

Отсюда следует, что указанная выше теорема для $n \geqslant 2$ не имеет места.

Поступила 16 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Изд. АН СССР, 1940.
3. Архангельский Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6.
4. Архангельский Ю. А. Об алгебраических интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1963, т. XXVII, вып. 1.
5. Архангельский Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
6. Kobb G. Sur le probléme de la rotation d'un corps autor d'un point fixe. Bull. Soc. math., 1895, т. XXIII.
7. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1959, № 6.
8. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
9. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, 1953.